LEON CHWISTEK

ZASADA SPRZECZNOŚCI W ŚWIETLE NOWSZYCH BADAŃ BERTRANDA RUSSELLA

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1912.

Państwu Wacławowstwu Sieroszewskim
w dowód najgłębszego szacunku
ofiaruje L. Chwistek

LEON CHWISTEK Paryż dn. 11. VI. 1913.

ZASADA SPRZECZNOŚCI W ŚWIETLE NOWSZYCH BADAŃ BERTRANDA RUSSELLA

W KRAKOWIE
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1912.

Osobne odbicie z Tomu LV. Rozpraw Wydziału historyczno-filozoficznego. Akademii Umiejętności w Krakowie.

Kraków 1912. — Drukarnia Uniw. Jagiell. pod zarządem J. Filipowskiego.

Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań Bertranda Russella.

Napisał

Leon Chwistek.

WSTĘP.

1. Zagadnienie, jakiem w niniejszej pracy zamierzam się zająć, należy do kategoryi pytań, które w ostatecznej redukcyi sprowadzają się do olbrzymiego problemu: czy sprzeczność jest istotną właściwością myśli ludzkiej, czy też nie. — Problemat ten zajmował filozofów od czasów najdawniejszych. Od najdawniejszych też czasów rozważano go równolegle z innym wielkim problemem, z problemem istnienia. Zanim jeszcze sformułowano explicite zasadę sprzeczności, zanim więc stworzono narzędzie do odróżnienia tego co nie jest sprzeczne od tego co zawiera sprzeczność, oparli Eleaci na pojęciu sprzeczności kryteryum odróżniające to co istnieje od tego, co nie istnieje. Wiemy mianowicie [1]), że Parmenides odmówił istnienia światu zjawisk jedynie dlatego, że dostrzegał w nim na każdym kroku sprzeczności. Od stwierdzań sprzeczności roi się rzeczywiście filozofia grecka, począwszy od bezwartościowych sofizmatów a skończywszy na głębokich i do dziś dnia interesujących paradoksach. Jakkolwiek jednak wszyscy niemal filozofowie zajmują się konstatowaniem sprzeczności, to przecież nie wszyscy w rozwiązywaniu ich idą śladem Eleatów. Potrzeba załatwienia się z sprzecznościami, usunięcia ich lub też zdeprecyonowania, nie jest w Grecyi bynajmniej tak ogólna jak dzisiaj, a poglądy afirmujące sprzeczność nie są rzadkością. Już wielkiemu Heraklitowi przypisy-

[1]) Por. Wasserberg: O intuicyi u Bergsona, Przegląd filozoficzny 1912.

wano mniemanie, jakoby tosamo mogło być i nie być [1]), a Protagoras twierdził kategorycznie, że każde mniemanie jest prawdziwe, temsamem więc przyjmował, że mogą być prawdziwe dwa sądy z sobą sprzeczne [2]).

Poglądy te rozwijały się równolegle z ideami mającemi początek u Parmenidesa. Za czasów Aleksandra Wielkiego obydwa kierunki dosięgnęły szczytu rozwoju. Z jednej strony Pyrrhon głosi naukę, że każda rzecz sama w sobie jest w równym stopniu jednem jak i drugiem, a wszystko polega na ludzkiej umowie i obyczaju, a uczeń jego Tymon Flius wprowadza pojęcie ἰσοσθένεια τῶν λόγων dla wyrażenia tego faktu, że za każdem zdaniem i zdaniem przeciwnem przemawiają równie silne argumenty [3]). Z drugiej strony Arystoteles formułuje ściśle zasadę sprzeczności i stawia ją na czele swej metafizyki jako „najtrwalszą" z zasad, a równocześnie poddaje ją interesującej analizie, która zawiera ustępy wzbudzające dziś jeszcze podziw.

2. W najnowszych czasach wystąpił prof. Łukasiewicz z surową krytyką teoryi zasady sprzeczności Arystotelesa. P. Łukasiewicz twierdzi, że Arystoteles popełnił zasadniczy błąd, przyjmując zasadę sprzeczności za podstawę wszelkiego dowodzenia, a równocześnie robiąc daremne wysiłki udowodnienia tejże. Rzeczywiście, byłaby to niekonsekwencya nie do darowania, tem bardziej, że dostrzeżenie jej nie przedstawiałoby najmniejszej trudności. Ażeby wyrobić sobie zdanie o tezie p. Łukasiewicza, zwrócimy się do tekstów cytowanych przez niego. Na str. 39 cytuje p. Łukasiewicz w oryginale dłuższy ustęp metafizyki (*Γ* 4. 1006 a 3—15) i parafrazuje go w sposób następujący, „by uwydatnić nastrój, który w nim odczuwa":

„Myśmy oto rzekli, że niepodobna, ażeby coś zarazem było i nie było i wykazaliśmy przez to (!), że zasada ta jest najpewniejszą z wszystkich. Chcecie dowodów? Niema dowodów! Jestto bowiem nieuctwo nie wiedzieć, co wymaga dowodu, a co nie wymaga. Nie można przecież dowodzić wszystkiego, bobyśmy się zgubili w nieskończoności, tak, że i wtedy nie byłoby dowodu. Zresztą, jeśli wam tak bardzo na dowodach zależy, to owszem są i dowody; tylko nie takie zwykłe, lecz „elenchtyczne". Niechno który sprobuje choć słowo powiedzieć! Jeśli zaś nic nie mówi, to śmieszne byłoby z nim się spierać, zupełnie tak jakbyś z drzewem gadał".

Ten ustęp robi na p. Łukasiewiczu takie wrażenie, jak gdyby

---

[1]) Arist. Met. Γ 3.
[2]) Arist. Met. Γ 5.
[3]) Überweg Heinze: Grundriss der Gesch. der Phil. I 324.

Arystoteles „gniewał się zamiast argumentować“ i „nadrabiał miną, by się nie zdradzić, że z jego sprawą krucho“. Muszę się przyznać, że nawet w parafrazie p. Łukasiewicza tego „nastroju“ wyczuć nie mogę. Owszem poglądy Arystotelesa wydają mi się jasne i najsłuszniejsze w świecie. Ten punkt był już omawiany przez tylu komentatorów Arystotelesa[1]), że wydaje mi się wskazanem ograniczyć się do kilku słów.

Co do pierwszej części cytatu, to stanie się ona zupełnie jasną w ciągu niniejszej pracy. Tutaj chciałbym zwrócić uwagę na te dowody zasady sprzeczności, które nie są zwykłe ale elenchtyczne. Naprzód zapytać się należy, czy mamy prawo nazywać wprowadzenie pojęcia dowodu elenchtycznego wybiegiem. Zdaje mi się, że nie. Oto wyjaśnienie:

W sprawie zasad nie może być dyskusyi. Arystoteles nie może zmusić nikogo do przyjęcia zasady sprzeczności, nie może więc udowodnić jej w znaczeniu tego wyrazu zwykłem. Do tego trzeba mieć gotowy system logiki, który obie strony dysputujące zarówno zechcą przyjąć. Jest jednak Arystoteles w stanie dokonać czego innego. Jeśli tylko przeciwnik podejmie się mówić, nie trudno będzie doprowadzić go do sądów, których może on sam nie będzie akceptował. Doprowadzić go do tego można oczywiście tylko przy pomocy jakichś rozumowań, n. p. syllogizmów. Dla Arystotelesa rozumowania te nie mogą mieć oczywiście wartości same przez się, wie bowiem o tem, że mają one z góry jako założenie zasadę sprzeczności, ale przeciwnik, któryby przeprowadził rozumowania te w mniemaniu, że nie przyjął zasady sprzeczności, może się z nich wiele nauczyć. Rzeczywiście, jeśli n. p. przyjdzie do wniosku, że człowiek jest trójrzędowcem, to może zawaha się w swojem mniemaniu, — zdaje się, że na to można było liczyć, przynajmniej w Grecyi. To, że dowody Arystotelesa formalnie przypominają rozumowania klasyczne, nie może być miarą znaczenia, w jakiem nimi operuje Arystoteles. Natomiast ciągłe powoływanie się ze strony Arystotelesa na to, że bez zasady sprzeczności nie mielibyśmy wyrazów a temsamem pojęć jednoznacznie określonych, wskazuje najlepiej, że Arystoteles rozumiał wybornie na jakim terenie prowadzi swoje rozważania. Chodziło mu poprostu o to, żeby oświetlić zasadę swoją z różnych stron, ażeby wyjaśnić jej doniosłość przeciwnikom. Dzisiaj, oczywiście argumenty te są niepotrzebne, nie zależy bowiem nikomu na tem, ażeby zjednywać zwolenników zasady sprzeczności.

3. W nowszych czasach walkę przeciw zasadzie sprzeczności zainaugurował Hegel, czyniąc sprzeczność podstawowym postulatem swojej filozofii. Sprzeczność jest według Hegla powszechną własnością

---

[1]) Por. cytaty u p. Łukasiewicza na str. 58—59.

przedmiotów, gdyż samo istnienie przedmiotów pociąga sprzeczność pomiędzy materyą a formą[1]). Argumenty Hegla nie mają poważniejszej wartości, opiera się on bowiem na zasadniczem nieporozumieniu, nie odróżniając tego, co jest sprzeczne od tego, co jest przeciwne[2]).

Dzisiaj głównym rzecznikiem sprzeczności jest profesor uniwersytetu w Grazu Meinong. Uczony ten neguje ogólność zasady sprzeczności, przyjmując, że sądy odnoszące się do przedmiotów takich jak *okrągły czworobok* mogą być z sobą sprzeczne. Z teoryami Meinonga przyjdzie nam rozprawić się w ciągu dalszym.

4. Ciekawy pogląd na zasadę sprzeczności rozwinął się w naszej filozofii. Charakteryzuje się on ultrapraktycznemi dążnościami. Twórcą jego, a zarazem najwybitniejszym przedstawicielem jest Trentowski. Poglądy zbliżone do Trentowskiego znajdujemy w książce prof. Łukasiewicza o Arystotelesie, tej samej o której mówiliśmy przed chwilą. Obydwaj wymienieni autorowie odmawiają zasadzie sprzeczności wartości aksyomatu logiki, spychając ją do rzędu reguł praktycznych. I tak u Trentowskiego czytamy co następuje[3]):

„Wszystko to pokazuje, iż zasada sprzeczności niczego innego nie naucza, tylko, abyśmy mówili, działali i myśleli awożnie[4]), abyśmy nie plątali się sami z sobą w niedorzeczne przeciwieństwa. Strzeż się zatem przed logicznym krzyżem! Popełniając go w myśli, mowie lub uczynku, mordujesz własną duszę, jak niegdyś Żydzi Zbawiciela. Kto się sam z sobą krzyżuje, jest moralnym samobójcą.

„W pospolitem życiu, na łonie towarzystwa a nawet przed sądowym trybunałem, ma przeto zasada ta swe znaczenie i może być prawdziwości poznania sprawdzianem. Atoli w krajach umiejętności ma się rzecz zupełnie inaczej".

Prof. Łukasiewicz, jakkolwiek o Trentowskim wyraża się z pewnem lekceważeniem[5]), daje wyraz poglądom niemal identycznym. Świadczą o tem następujące zdania:

„Wartość zasady sprzeczności nie jest natury logicznej, lecz logiczno-praktycznej ale ta wartość praktyczno-etyczna jest tak olbrzymia, że wobec niej brak logicznej w rachubę nie wchodzi". (p. 147).

A dalej: (149)

---

[1]) Überweg Heinze: Grundriss IV p. 57.

[2]) Als ob das, was conträr ist, nicht ebenso sehr als contradictorisch bestimmt werden müsste. Hegel Wissenschaft der Logik. Werke V 55, Berlin 1841.

[3]) Myślini, Poznań 1844 I, p. 416—417.

[4]) Konsekwentnie.

[5]) „nawet nasz Trentowski powtarzał za mistrzem, że to prawo dawnej logiki nie wiele jest warte" p. 145. O zasadzie sprzeczności u Arystot. Kraków 1910.

„Zasada ta jest jedyną bronią przeciw błędom i kłamstwu. Gdyby sądy sprzeczne nie znosiły się nawzajem, gdyby twierdzenie nie niweczyło przeczenia, lecz jedno mogło istnieć spokojnie obok drugiego, tobyśmy nie mieli żadnego środka, aby fałsz zdemaskować lub napiętnować. — ... Tak więc zasada sprzeczności i tylko ona umożliwia nam zwycięską walkę z wszelkiego rodzaju nieprawdą i na tem polega całe jej znaczenie".

W wyciąganiu wniosków jest filozof epoki romantycznej o wiele bardziej radykalny niż uczony współczesny. „Z tego wszystkiego pokazuje się—czytamy u Trentowskiego—iż zasada sprzeczności jest oczywistą niedorzecznością, która ma zarozumiałość i naturę każdej głupoty, t. j. będąc sama niedorzecznością, narzuca się nam jako puklerz przeciw niedorzecznościom" [1]); u p. Łukasiewicza daremnie szukalibyśmy podobnych enuncyacyi, nie mniej jednak musimy skonstatować fakt, że p. Łukasiewicz nie uważa wcale sprzeczności w naukach apriorycznych za błąd, ale przeciwnie pisze o niej co następuje [2]):

„Dlatego też nie widzę dla wiedzy żadnego w tem niebezpieczeństwa, jeśliby jakaś sprzeczność w naukach apryorycznych, n. p. Russellowska nie dała się rozwiązać, w naukach tych bowiem przyjmujemy tylko sądy ściśle udowodnione, jeśliby więc i jaka sprzeczność dała się udowodnić, to fakt ten moglibyśmy najspokojniej zaregestrować i uważać nawet za cenną zdobycz naukową".

5. Umyślnie zamieszczam tu powyższe cytaty, aby zwrócić uwagę, na to, jak bardzo dalekie są poglądy naszych filozofów na zasadę sprzeczności, od tych teoryi, jakie pod wpływem rozwoju nauk matematycznych wytworzyły się na zachodzie. Za reprezentantów teoryj tych można uważać sławnego matematyka Poincarégo i twórcę teoryi typów logicznych Bertranda Russella. W zasadzie uczeni ci opierają się na Arystotelesie. W dziełach ich daremnie szukalibyśmy wzmianki o jakiejś etyczno-praktycznej roli zasady sprzeczności, natomiast na każdym kroku spotykamy się z dowodami, że tę zasadę przyjmują oni za punkt wyjścia wszelkich teoretycznych dociekań. Co prawda, nie kładą oni nacisku na teoryę zasady sprzeczności, kierując swe usiłowania przedewszystkiem do usunięcia paradoksów z logiki.

Rezultaty tych autorów, a szczególnie Russella idą tak daleko, że wszelkie badania nad zasadą sprzeczności muszą dzisiaj przedewszystkiem na nich się opierać. I w pracy niniejszej, jak to tytuł wskazuje, teorye Russella odgrywają rolę podstawową. Jeśli nie z wszyst-

---

[1]) l. c. p. 418.
[2]) l. c. p. 150.

kimi rezultatami tego myśliciela można się zgodzić, to powód tego jest jak sądzę ten, że w wielkiej ilości pomysłów i dociekań, przeprowadzonych w stosunkowo krótkim czasie, muszą się zawsze znaleźć myśli idące zbyt daleko i nie uwzględniające dostatecznie dozwolonych granic hipotezy.

6. Z powyższego krótkiego przeglądu historycznego wynika, że problemat sprzeczności zamyka w sobie wielką ilość pytań, które z różnych punktów widzenia przez różnych filozofów były rozważane. W pracy niniejszej nie tylko nie zamierzam dyskutować tych różnych problemów, ale powstrzymuję się nawet w znacznej części od ich sformułowania. Zadanie moje jest o wiele skromniejsze. Wiąże się ono ściśle z wielką ideą sięgającą czasów Leibniza, a wznowioną w sposób imponujący w najnowszych czasach przez Peanę i Russella: ideą stworzenia doskonałego systemu logiki, obejmującego wszystkie nauki aprioryczne, a osobliwie matematykę. Dokonanie takiego czynu wydaje mi się niesłychanie ważnem, pod warunkiem, żeby odnośny system nie zawierał sprzeczności. Gdyby bowiem taki system rzeczywiście istniał, byłoby pewnem, że myśl ludzka i to myśl twórcza nie jest w sposób istotny związana z sprzecznością. Wszystkie inne formy myśli, wikłające się w sprzecznościach, możnaby wówczas uznać za niedostatecznie rozwinięte i zanieczyszczone czynnikami obcymi. — Z tych właśnie względów wydaje mi się zasadniczem pytanie:

Czy możliwy jest doskonały system logiki, wolny od sprzeczności?

Pytaniem tem zajmuje się w pierwszym rzędzie praca niniejsza. Ażeby rozważyć, jakiej kategoryi może być odpowiedź na to pytanie, nie można uchylić się od szczegółowego rozbioru tych systemów logiki, które dotychczas zostały stworzone. Wiadomo, że słynny system Peany upadł skutkiem pojawienia się w nim znanych paradoksów, temsamem więc nie nadawał się do rozważań w niniejszej pracy.

W ostatniej jednak dobie ogłosił Russell wspólnie z Whitheadem wielkie dzieło p. t. Principia Mathematica, w którem dokonał niezwykle śmiałej próby rekonstrukcyi dzieła Peany w tym kierunku, aby usunąć z niego wszelką sprzeczność. Otóż wydawało mi się koniecznem, poddać naprzód system Russella szczegółowemu rozbiorowi. Rezultat tej pracy okazał się negatywnym, doprowadził bowiem do stwierdzenia w systemie Russella sprzeczności.

Pomimo to, jak zobaczymy, zawiera system Russella idee, które stanowią ważną podstawę do dalszych badań. Opierając się na nich wykazuję, jakich rezultatów można się po nich spodziewać i jakiej kategoryi jest odpowiedź na postawiony problemat. W rozdziale końcowym zajmuję się problematem na pozór równoległym do poprzedniego, a mianowicie:

Czy możliwy jest system logiki wolny od zasady sprzeczności? Wykazuję, że problemat ten jest iluzoryczny, sprowadza się bowiem do psychologii poszczególnych jednostek.

ROZDZIAŁ I.

Logika formalna i jej paradoksy.

1. Potrzeba logiki formalnej i jej rozwój w historyi. — 2. Istota logiki formalnej. — 3. Przedstawienie paradoksów elementarnych. — 4. Próby rozwiązania paradoksów przed Poincarém. — 5. Teorye Poincaré'go i Russella. — 6. Przedmioty sprzeczne. — 7. Teorya Russella. — 8. Konkluzya.

1. Zacznijmy od założenia, że zasada sprzeczności jest postulatem, któremu winna czynić zadość każda logika. Założenie to możemy rozszerzyć na wszystkie klasyczne zasady logiki, a w szczególności na zasady tożsamości i wykluczonego środka. Wprowadzenie powyższych postulatów ujmuje myślenie w pewne ramy ściśle określone, wprowadza mianowicie pojęcie myślenia poprawnego. Jak długo obowiązują nasze założenia musimy wszelkie procesy myślowe wyłamujące się z pod nich uważać za alogiczne, t. j. znajdujące się w sferze nonsensu.

Postawienie powyższych wskaźników nie usuwa samo przez się zależności różnych sądów od psychologii jednostki rozumującej. Rzeczywiście, możemy sobie z łatwością wyobrazić dwóch ludzi, którzy zarówno przyjmują wymienione postulaty, a mimo to podtrzymują sądy wprost sobie przeciwne, przyczem porozumienie może być wykluczone. Taki stan rzeczy może pochodzić stąd, że procesy myślowe u obu ludzi wymienionych mogą być różne. Otóż, według naszych założeń jeden tylko z tych ludzi może myśleć zgodnie z zasadami logiki, drugi myśli napewno błędnie. Wynika stąd, że nie wystarczy przyjąć naszych założeń, aby uchronić się od błędów. Zapytajmy się, jaką może być droga, która może nas doprowadzić do tego celu.

Oddawna zauważono, że na ogół biorąc w procesach myślowych powtarzają się systematycznie pewne zjawiska związane z formą tych procesów. Tak n. p. jeśli ktoś się dowie, że panowie A i B są jego nieprzyjaciółmi, wnioskuje stąd natychmiast, że p. A jest jego nieprzyjacielem, a wniosek ten nie zależy najzupełniej od tego, kim jest p. A.

To zjawisko naprowadziło Arystotelesa na myśl, czy nie dałoby się sformułować raz na zawsze tego, co w owych procesach jest niezmienne. Myśl tę zrealizował Arystoteles, tworząc swój system logiki.

System ten został przez syllogistykę średniowieczną udoskonalony w ten sposób, że myślenie zostało niemal zupełnie zmechanizowane, a podmiotowi myślącemu odjęta wszelka możność kierowania się intuicyą w wnioskowaniu. Syllogistyka zamykała się jednak w zbyt ciasnych ramach, aby mogła zaspokoić wszystkie potrzeby. Nie była n. p. zdolna do wciągnięcia w swój zakres matematyki. Toteż już Descartes przeciwstawił syllogistyce metodę analizy matematycznej, jako łączącą przymiot kompletnej ścisłości z doskonałą płodnością. Ideę tę spopularyzowały pisma Kanta, który oddzielał matematykę jako naukę intuicyjną i syntetyczną od logiki jako nauki formalnej i analitycznej, a temsamem bezpłodnej. Kant nie uznawał przytem jakiegokolwiek postępu w logice od czasów Arystotelesa. Opinia ta jest do dzisiaj dość częsta u filozofów, a potwierdzają ją takie dzieła logiczne, jak logika Sigwarta lub Wundta, które zajmują się jedynie psychologicznem pogłębieniem teoryi Arystotelesa i uzupełniają ją metodologią nauk experymentalnych.

Idea doskonałego systemu logiki została stworzona przez Leibniza, jemu też zawdzięczamy pierwsze próby zbudowania takiego systemu, kontynuowane przez jego uczniów Segnera i Lamberta. Prace te były jednak nieznane i dopiero w ostatnich czasach zwrócił na nie uwagę Couturat. Dzisiejsza logika datuje się od prac George'a Boole'a[1]), który prawdopodobnie niezależnie od swoich poprzedników doszedł do skonstruowania systemu logiki formalnej, w formie co prawda dość mętnej. W Niemczech ogłosili systemy logiki Frege[2]) i Schröder[3]), dzieła ich jednak dla nadmiernej zawiłości symboliki pozostały nieznane.

2. Właściwy przewrót w tych usiłowaniach wywołały dopiero prace prof. Peano, a w szczególności ogłoszone przez niego w r. 1889 Arithmetices Principia nova methodo exposita. W dziele tem wykłada Peano całą analizę matematyczną przy pomocy ideografii logicznej opartej na ubogiej liczbie symbolów. System Peany skonstruowany jest według następującej zasady. Peano przyjmuje pewną liczbę pojęć, które nazywa pierwotnemi i o tych pojęciach wygłasza pewną liczbę „pierwotnych" twierdzeń. Twierdzenia te zawierają w sobie zasady przy pomocy których można z nich otrzymać twierdzenia nowe, odnoszące się do pojęć pierwotnych. Zbiór tych twierdzeń tworzy system Peany.

Nic dziwnego, że dzieło Peany spotkało się z poważnem niedowierzaniem, trudno bo też pogodzić się z myślą, że cała matematyka

---

[1]) The laws of Thought 1854.

[2]) Begriffschrift, Halle 1879. Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884. Grundgesetze der Arithmetik, Jena 1893, 1903.

[3]) Algebra der Logik 1890, 1891, 1895.

z jej bogactwem twierdzeń i pojęć może być „ściśle i formalnie wyprowadzona zapomocą 10 zasad dedukcyi i 10 innych premis ogólno logicznej natury; i że wszystkie przedmioty, które zachodzą w matematyce, mogą być zdefiniowane przy pomocy przedmiotów zachodzących w 20 powyższych premisach“ [1]). Mimo to wszyscy musieli się zgodzić, że wątpliwości co do systemu Peany mogą być jużto natury filozoficznej, już to ogólno logicznej, natomiast kwestya płodności nowego aparatu nie podlegała dyskusyi. Nie znaczy to, żeby aparat logiczny Peany miał być użytecznym w wynajdywaniu nowych twierdzeń, co do tego punktu zdania są podzielone; chodzi o to tylko, że klasyczne twierdzenia matematyki mogą być rzeczywiście wyprowadzone przy pomocy tego aparatu. Otóż ta właśnie płodność „nowej logiki“ mogła dać najwięcej do myślenia tym, którzy jeszcze pamiętali niefortunne wysiłki poprzedników. H. Poincaré w swoich artykułach polemicznych w Revue de Métaphysique et de Morale stara się z jednej strony umotywować płodność logiki formalnej Peany tą okolicznością, że różne sądy intuicyjne matematyki zostały pośrednio lub bezpośrednio objęte 20-ma aksyomatami, z drugiej zaś strony podnosi, że nigdy nie możemy być pewni, że aparat Peany wystarczy do wyprowadzenia wszystkich możliwych twierdzeń matematyki i wyraża przypuszczenie, że ciągłego odwoływania się do intuicyi żadną miarą uniknąć się nie da. „Każde z 9 pojęć niezdefiniowanych — pisze Poincaré — i każde z 20 twierdzeń nie mogących się dowieść, które stanowią podstawę nowej logiki, logiki w znaczeniu szerokiem, zakłada akt nowy i niezależny naszej intuicyi i, dlaczego nie przyznać, prawdziwy sąd syntetyczny a priori“.

„Co do tego punktu wszyscy zdaje się są w zgodzie, ale za to inne zdanie p. Russella wydaje mi się wątpliwem, mianowicie, że skończy się na tych odwołaniach się do intuicyi, że nie będzie potrzeba robić nowych i że będzie można skonstruować całą matematykę bez odwołania się do jakiegokolwiek nowego elementu“ [2]). Nie da się zaprzeczyć, że zawsze możemy sobie wyobrazić, że z czasem zostaną wprowadzone nowe sfery myśli, wobec których znane nam systemy okażą się za ubogie, jest jednak pewnem, że aparat Peany uzupełniony nieco przez Russella i innych nadaje się w zupełności do objęcia całokształtu nauk apriorycznych.

W tych warunkach możnaby było spoglądać na sprawę systemu logiki jak najoptymistyczniej, gdyby nie pewne poważne trudności, ja-

---

[1]) Russel: The Principles of Mathematics, Cambridge 1903 p. 4.

[2]) R. M. M. 1905 p. 803.

kie wyłoniły się najniespodziewaniej. Oto, Russell[1]) i inni w badaniach swoich doszli do paradoksów w rodzaju tradycyjnego paradoksu Epimenidesa. Pojawienie się tych paradoksów wprowadziło problemat systemu logiki w nową fazę. Należało się teraz zapytać, czy w istocie myśli ludzkiej nie tkwią jakieś zasadnicze, nie dające się usunąć sprzeczności, które ideę systemu logiki wolnego od sprzeczności muszą uczynić iluzoryczną. Myśl ta znajdowała do pewnego stopnia potwierdzenie w teoryach niektórych filozofów takich jak Meinong, Husserl, Lipps i i., którzy afirmowali, że nie możemy uniknąć operowania przedmiotami sprzecznymi. Otóż gdyby tak było, system logiki wolny od sprzeczności byłby rzeczywiście niemożliwy, każde bowiem zdanie wypowiedziane o przedmiocie sprzecznym prowadzi natychmiast do sprzeczności.

Załatwienie się z temi trudnościami stało się problematem pierwszorzędnej wagi. Z pomiędzy wszystkich prób rozwiązania wyróżniły się genialne pomysły B. Russella, które stanowią dzisiaj jedyny wskaźnik do dalszych badań, a którymi zajmiemy się szczegółowo w następnych rozdziałach. Zanim jednak do tego przystąpimy, należy zapoznać się bliżej z trudnościami, na jakie napotykała idea zrealizowania systemu logiki wolnego od sprzeczności.

Paradoksy.

3. a) Klasycznym paradoksem jest paradoks Epimenidesa: *Epimenides twierdzi, że kłamie.* Otóż, jeśli mówi prawdę, że kłamie, to kłamie rzeczywiście, jeśli jednak kłamie mówiąc, że kłamie, to to znaczy, że mówi prawdę. Wynika stąd, że Epimenides zarówno mówi prawdę, jak kłamie.

b) Drugi interesujący paradoks zawdzięczamy Nelsonowi i Grellingowi[2]). Wyobraźmy sobie człowieka, który zabija wszystkich niesamobójców, nie zabija jednak nikogo więcej. Pytanie, czy człowiek ten zabije sam siebie, czy nie.

Tak, bo gdybyśmy przypuścili, że nie zabije sam siebie, to byłby niesamobójcą, a takich wszystkich musi on z definicyi zabijać.

Nie, bo jeśli przypuścimy że zabije sam siebie, to byłby samobójcą, a takich ludzi definicya nie pozwala mu zabijać. Widzimy więc, że człowiek ten jest samobójcą i niesamobójcą równocześnie.

---

[1]) Principles.

[2]) Bemerkungen zu den Paradoxieen von Russell u. Burali Forti. (Abh. der Friesschen Schule p. 305).

c) Paradoks Russella. Ażeby zrozumieć ten paradoks trzeba oswoić się nieco z pojęciem zbioru. Jeśli rozważamy równocześnie wszystkie planety, wszystkich Polaków, wszystkie liczby całe, mówimy, że mamy przed sobą zbiór planet, zbiór Polaków, zbiór liczb całych. W takim razie możemy powiedzieć, że Wenus jest elementem zbioru planet, że Mickiewicz jest elementem zbioru Polaków oraz że liczba 5 jest elementem zbioru liczb ca- Należy zważyć, że każdy zbiór może być elementem nowego zbioru. Tak n. p. zbiór Polaków jest elementem zbioru narodów i t. p.

Mógłby teraz ktoś zapytać, czy zbiór może być swoim własnym elementem. Nie rozstrzygając tego pytania, zważmy, że w każdym razie zbiory co tylko wymienione nie mają powyższej własności. Rzeczywiście, zbiór planet nie jest planetą, zbiór Polaków nie jest Polakiem, zbiór liczb całych nie jest liczbą całą. Utwórzmy teraz zbiór K, którego elementami są wszystkie zbiory mające tę własność, że nie są swoimi elementami. Możemy powiedzieć napewno, że zbiory planet, Polaków i liczb całych są elementami zbioru K. Zapytajmy jednak, czy zbiór K jest swoim własnym elementem. Odpowiedź będzie dwojaka.

Zbiór K jest swoim elementem, jeśli bowiem przypuszczę, że tak nie jest, to zbiór ten jest zbiorem nie zawierającym siebie jako elementu, a wszystkie takie zbiory są z definicyi elementami zbioru K. Zbiór K nie jest swoim elementem, gdyby nim bowiem był, byłby zbiorem, zawierającym siebie jako element a takie zbiory nie mogą być elementami zbioru K.

d) Paradoks Berry'ego. Liczba zgłosek w polskich nazwach liczb całkowitych rośnie nieograniczenie wraz z wzrostem liczb. Muszą tedy istnieć takie liczby, których niepodobna nazwać bez użycia zgłosek n, jeśli n jest liczbą całkowitą, tak wielką jak nam się podoba. Niech będzie $n = 27$. Zapytajmy się, czy istnieje najmniejsza z liczb całych, których nazwa nie może obejmować mniej niż dwadzieścia siedm zgłosek. Otóż, niewątpliwie liczba taka istnieć musi, gdyż ilość liczb całych posiadających nazwy zawierające 27 zgłosek jest skończona. Mógłby ktoś myśleć, że liczbą tą jest n. p. 11421421. Rzeczywiście nazwa tej liczby zawiera 27 zgłosek, a każda liczba mniejsza może być nazwana przy pomocy mniej niż 27 zgłosek. Z drugiej strony jednak liczba ta jest w zupełności określona frazesem *najmniejsza z liczb całych, których nazwa nie może obejmować mniej niż dwadzieścia siedm zgłosek*, a frazes ten zawiera 25 zgłosek. Wynika stąd, że liczba 11421421 da się nazwać przy użyciu mniej niż 27 zgłosek, że więc nie posiada żądanej własności.

Nie wymieniam tutaj pozostałych paradoksów, z pomiędzy których jeden nawet (paradoks Richarda) odgrywa rolę kapitalną w niniejszej pracy. Wybrałem tutaj te paradoksy, które można zrozumieć bez osobnego przygotowania, nie chciałem bowiem przerywać właściwego toku myśli, ani też ograniczać liczby czytelników do tych, którzy znają odnośną literaturę.

4. Wymienione tutaj paradoksy sprawiały uczonym wiele kłopotu. Sam Russell wymyślił swojego czasu trzy teorye, które bezskutecznie usiłowały wyjaśnić tkwiące w nich trudności. Są to t. zw. zigzag theory, the theory of limitation of size i no-classes theory [1]. W teoryach tych Russell zwraca na to uwagę, że definicye zbiorów wtedy prowadzą do sprzeczności, jeśli są zbyt skomplikowane, lub też jeśli zakres zbiorów jest zbyt wielki, wreszcie radzi przyjmować tylko takie zbiory, żeby sądy o nich dały się zastąpić sądami o ich elementach. Wszystkie te uwagi są jednak nieużyteczne, nie dają nam bowiem żadnego kryteryum, któreby pozwalało odróżnić definicyę zbioru prowadzącą do paradoksu od definicyi poprawnej.

Równie bezskuteczną jest teorya Zermeli. Zermelo [2]) odrzuca naiwne pojęcie zbioru, a całą teoryę zbioru opiera na szeregu aksyomatów, które mają zarazem definiować pojęcie zbioru. Metoda powyższa jest, jak słusznie zauważył Poincaré [3]), niepoprawna, Zermelo nie udowodnił bowiem, że aksyomaty jego nie zawierają sprzeczności. Należy nad to dodać, że teorya Zermeli nie wyjaśnia wcale paradoksu Epimenidesa.

5. Pierwszy zasadniczy krok do wyjaśnienia paradoksów logiki zrobił Richard, a myśl jego rozwinął Poincaré [4]). Poincaré zwraca uwagę na to, że jeśli jakiś przedmiot A definiujemy przy pomocy bezpośredniej lub pośredniej pojęcia tego przedmiotu, to popełniamy błędne koło. Definicyę opartą na takiem błędnem kole nazywa Poincaré niepredykatywną. — Ażeby objaśnić powyższe twierdzenie zwróćmy się do definicyi liczby 11421421 podanej w paradoksie Berry'ego. Definicya ta była następująca: *najmniejsza z liczb całych, których nazwa nie może obejmować mniej niż 27 zgłosek.* Otóż w definicyi tej jest pośrednia mowa o wszystkich liczbach, których nazwa nie może obejmować mniej niż 27 zgłosek, ażeby więc definicya ta miała sens, mu-

[1]) On difficulties in the theory of transfinite Numbers and Order types. Proceedings of the London Mathem. Society 1906 vol IV, cyt. Poincaré R. M. M. 1906 pag. 17.

[2]) Zermelo, Grundlagen der Mengenlehre Mathemat. Annalen 65.

[3]) W publicznej dyskusyi w Getyndze w r. 1909 i w Rev. de M. et de Mor. lipiec 1909.

[4]) Les mathématiques et la logique § IX R. M. M. 1906.

szą te liczby być określone w zupełności. Otóż pomiędzy temi liczbami znajduje się liczba 11421421. Okazuje się tedy, że definicya przytoczona liczby 11421421 opiera się pośrednio na pojęciu tej liczby, definicya ta jest więc niepredykatywna, a jako taka niema sensu.

Stosując regułę Poincarégo do pojęcia zbioru możemy zauważyć co następuje. Przypuśćmy, że mamy dany zbiór Z wszystkich przedmiotów, które czynią zadość tym a tym warunkom. Przy pomocy tego zbioru możemy zdefiniować nowy przedmiot A, który będzie czynił zadość tym właśnie warunkom, a więc powinien być elementem Z. Jeśli przedmiot A nie posiada innej definicyi, musimy się zgodzić, że przedmiot A nie jest elementem zbioru Z. Wynika stąd, że zbiór Z nie zawiera wszystkich przedmiotów, które czynią zadość postawionym warunkom. Ażeby usunąć tę sprzeczność podaje Poincaré następujący przepis definiowania zbiorów. Należy mówić: Z jest to zbiór, który zawiera wszystkie przedmioty, czyniące zadość tym a tym warunkom, z wyjątkiem przedmiotów tych, które są zdefiniowane przy pomocy zbioru Z. Reguła ta jest niewątpliwie skuteczna do uniknięcia paradoksów, ma jednak tę wadę, że sama wykracza przeciw zasadzie w niej wyrażonej, na co zwrócił uwagę Zermelo [1]).

Rzeczywiście powyższa definicya zbioru Z jest niepredykatywna, bo opiera się na pojęciu zbioru Z. Nie mając bowiem zbioru Z nie możemy rozstrzygnąć, czy dany przedmiot jest zdefiniowany przy pomocy pojęcia tego zbioru, a temsamem nie możemy nic powiedzieć o tem, czy ten przedmiot do zbioru Z należy, czy nie.

Taki stan rzeczy sprawia, że reguła definiowania zbiorów podana przez Poincarégo nie może się utrzymać. Wynika stąd, że niektóre zbiory dotychczas uważane za określone w zupełności nie mogą być zdefiniowane.

Takimi są właśnie te zbiory, które o ilebyśmy przyjęli ich istnienie „musiałyby zostać rozszerzone przez nowe elementy zdefiniowane przy pomocy pojęcia tych zbiorów“ [2]), a więc zbiór wszystkich przedmiotów, zbiór wszystkich własności, zbiór wszystkich sądów i t. d. Wynika stąd, że główną przyczyną paradoksów jest nieostrożne operowanie słówkiem *wszystkie*. Ta uwaga jest punktem wyjścia teoryi typów logicznych Bertranda Russella.

6. Ażeby teraz zdać sobie sprawę z trudności filozoficznych, jakie podniesiono przeciw idei systemu logiki wolnego od sprzeczności, zwróćmy się do pewnych ogólnych rozważań o pojęciu przedmiotu.

---

[1]) Neuer Beweis für die Wohlordnung, Mathem. Annalen 65 p. 117.

[2]) Amer. Journ. XXX, Russell.

Lipps[1]) wyróżnia 4 gatunki przedmiotów:

1-o empiryczno rzeczywiste przedmioty, do których zalicza przedmioty, które za rzeczywiste uważam, a więc nietylko przedmioty dane mi bezpośrednio, ale n, p. osoby historyczne i t. p.

2-o przedmioty intuicyjne, t. j. te, które myśl tworzy na podstawie danych wyobrażeniowych jak n. p. kontinuum tonów, barw, liczb i t. p.

3-o przedmioty wyobraźni, takie jak n. p. złota góra.

4-o przedmioty urojone, czyli niemożliwe, do których zalicza $\sqrt{-a}$, gdzie $a > o$[2]) kwadratowe koło, i t. p.

Klasyfikacya ta jest nadzwyczaj charakterystyczna, zwłaszcza ze względu na grupę ostatnią, w której jak widzimy znajdują się przedmioty sprzeczne obok liczb zespolonych.

Podobne wyróżnienia znajdujemy u Meinonga. Tenże autor przytacza szereg argumentów za tem, że wszystkie wymienione przedmioty zarówno należą do nauki.

W szczególności zwraca Meinong uwagę na to, że wykluczenie z logiki przedmiotów nieistniejących jest niemożliwe. Rzeczywiście, jeśli chcę wykluczyć z logiki n. p. *kwadratowe koło*, wydaje się słusznem przyjąć sąd: *kwadratowe koło nie jest przedmiotem*. Ale w tym sądzie mówię o kwadratowem kole, nie wykluczyłem go więc z logiki[3]). Nadto wskazuje Meinong na inną trudność. Istnienie przedmiotów, jakimi operuje matematyka było kwestyonowane przez wielu uczonych, gdybyśmy więc odrzucili przedmioty nieistniejące, musielibyśmy pozbyć się kół, trójkątów i t. p. a temsamem przekreślilibyśmy matematykę[4]).

Przeciwko argumentowi, że powiedzenia takie jak „kwadratowe koło" są nonsensem wystąpił już Bolzano[5]), który odróżnił pojęcie nonsensu od tego co jest przeciwne sensowi. Odróżnienie to afirmują w zupełności Husserl i Meinong w mniemaniu, że czyni ono przyjęcie przedmiotów sprzecznych nieodzownem.

Zobaczmy teraz, jakie są bezpośrednie konsekwencye całej powyższej teoryi.

Wynika z niej naprzód, że skoro system logiki ma obejmować

---

[1]) Einheiten u. Relationen, Leipzig 1902.

[2]) Dodatku tego brak u Lippsa, ale trzeba to kłaść na karb lekceważenia ścisłości w określaniu.

[3]) Meinong: Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaftslehre, Leipzig 1907 p. 17.

[4]) l. c. 40.

[5]) Por. Husserl: Logische Untersuchungen II p, 313.

także przedmioty sprzeczne, nie może być wolny od sprzeczności. Z klasyfikacyi Lippsa wynika jednak jeszcze inna sprawa, a mianowicie, że nie możemy znaleźć kryteryów odróżniających przedmioty sprzeczne od pozostałych. Rzeczywiście kryteryów takich nie może nam dostarczyć system logiki, gdyż system ten pozwala nam udowodnić, że kwadratowe koło jest przedmiotem sprzecznym, zarówno jak i że nim nie jest. (Własność tę posiada mianowicie każde kwadratowe koło, które jest i nie jest przedmiotem sprzecznym). Nie mniej zawodzą wszelkie kryterya intuicyjne, skoro intuicya zmusza nas do traktowania pierwiastków z liczb ujemnych na równi z kwadratowemi kołami.

7. Trudności związane z powyższą teoryą mają to wspólne z paradoksami, że nie łatwo obalić je zapomocą analizy krytycznej, ale można je usunąć przez systematyczną konstrukcyę pojęć. Zobaczymy, że Russell dokonał tego w sposób niezwykle prosty. Russellowi udało się to dzięki pomysłowi, że z czterech kategoryj przedmiotów Lippsa zachował tylko pierwszą i to nie całą, a mianowicie przedmioty dane bezpośrednio, czyli to, co on obejmuje nazwą indywiduów. Kategorye pozostałe Russell odrzucił, podając zasadę, według której sądy, w których pozornie figurują przedmioty tych kategoryi, można przekształcić na sądy przedmiotów takich nie zawierające.

Jest jasne, że metoda Russella wystarcza najzupełniej do przekreślenia trudności, jakie z przedmiotów sprzecznych zdają się wynikać dla systemu logiki. Rzeczywiście od systemu logiki nie wymaga się, żeby obejmował wszystkie nasze myśli, tak jak one są dane w procesach psychicznych, chodzi o coś zupełnie innego. Chodzi o to, żeby te twierdzenia nauk apriorycznych, które są prawdziwe, wywieść z aksyomatów logiki, przy czem jednak twierdzenia te możemy formułować w sposób, jaki nam jest dogodny. Otóż rzeczywiście, metoda Russella wyklucza mnóstwo sądów jako takich z systemu, ale dostarcza sądów, które z tamtymi są równoznaczne t. z. identyczne z punktu widzenia logiki. W ten sposób metoda Russella osiąga swój cel w zupełności.

8. Widzieliśmy, z jakiemi trudnościami musi walczyć idea systemu logiki wolnego od sprzeczności i jakie drogi prowadzą do ich usunięcia. Dalszem naszem zadaniem będzie rozpatrzeć te metody szczegółowo. W tych warunkach musimy się zająć analizą teoryi typów logicznych Russella oraz konstrukcyą jego systemu, przynajmniej w ogólnym zarysie. Zadanie to wypełni nam dwa najbliższe rozdziały.

ROZDZIAŁ II.

Russellowska teorya typow logicznych.

1. Dzieła Russella. — 2. Znaczenie naukowe teoryi typów. — 3. Pojęcia fundamentalne. — 4. Zmienna, sąd, funkcya. — 5. Indywidua. — 6. Zmienna pozorna. — Matryce. — 8. Dalsze pojęcia fundamentalne. — 9. Funkcye rzędu 1-go. — 10. Funkcye rzędów wyższych. — 11. Względność hierarchii funkcyi. — 12. Uwaga o filozoficznem znaczeniu teoryi typów.

1. Teoryę typów logicznych wyłożył Russell po raz pierwszy w rozprawie p. t. Mathematical Logic as based on the Theory of Types[1]), jakkolwiek pierwszy jej pomysł znajduje się już w dodatku do Principles of Mathematics. Na skutek artykułu krytycznego zamieszczonego przez Poincaré'go w Revue de Métaphysique et de Morale[2]) w którym niewątpliwie znalazło wyraz wiele nieporozumień, przedstawił Russel po raz wtóry swoją teoryę, w temże piśmie, w artykule p. t. La théorie de types logiques[3]). Najdoskonalszy wykład teoryi typów, oparty na pewnych korzystnych innowacyach znajduje się w dziele fundamentalnem: Whithead and Russell: Principia Mathematica[4]). Dzieło to będzie służyło za podstawę naszych rozważań.

Studyum rozpraw Russella jest utrudnione z powodu posługiwania się symboliką logiczną, która aczkolwiek prosta stosunkowo, wymaga przecież pewnego oswojenia się z znaczkami, których jest pełno. Niewątpliwie przeprowadzanie dowodów logicznych bez pomocy symboliki byłoby zadaniem dla nadmiernej rozwlekłości niemal nieziszczalnem. To nie jest jednak naszym celem. Nam będzie przedewszystkiem chodziło o analizę pojęć i zasad fundamentalnych, a do tego zbyteczną est symbolika. Dlatego w wykładzie moim pominę ją zupełnie. Natomiast, aby nie tracić styczności z dziełem Russella, zamieszczę w przypiskach objaśnienia znaków, jakie Russell wprowadza dla tych utworów, którymi będziemy się zajmowali.

Ujemną stroną teoryi typów jest jej zależność od psychologii a nawet od filozoficznego stanowiska autora. Niewątpliwie od wstępu do systemu logiki nie wymaga się tej samej ścisłości, co od samego systemu, wstęp taki ma bowiem jedynie charakter oryentacyjny, pomimo to jednak nie da się zaprzeczyć, że jeśli coś we wstępie jest niejasne

[1]) Amer. Journ. of Mathematics t. XXX p. 222 r. 1908.
[2]) La logique de l'infini, lipiec 1909.
[3]) R. d. Mét. et de Mor. 1910.
[4]) Cambridge 1910.

to nasnąć się może wątpliwość, czy niejasność ta nie odbije się w sposób niszczący na właściwym systemie. Otóż wyjaśnienie szczegółowe pojęć poruszonych we wstępie Russella byłoby identyczne z wypracowaniem doskonałego systemu metafizyki i jest wątpliwe, czy wogóle dałoby się dokonać. Temsamem trudno marzyć o bezwzględnie ścisłem ugruntowaniu teoryi typów. Trudności te nie stoją jednak w bezpośrednim związku z naszym problemem, gdyż nam chodzi nie o teoryę typów i jej kłopoty ale o to, czy na niej można oprzeć system logiki wolny od sprzeczności. Skutkiem tego w rozdziale niniejszym będziemy mówili o zasadach teoryi typów o tyle tylko, o ile to jest konieczne do jej zastosowań w systemie logiki.

Teorya typów logicznych opiera się na pojęciu funkcyi propozycyonalnej i związanych z niem pojęciach zmiennej i sądu. Są to niewątpliwie pojęcia bardzo skomplikowane, w systemie logiki są to jednak elementy proste, z których wszystko się buduje. Tak więc Russell przyjmuje w swoim systemie pojęcie sądu i pojęcie funkcyi propozycyonalnej bez definicyi pod nazwą pojęć pierwotnych, albo fundamentalnych.

Taki stan rzeczy jest możliwy oczywiście tylko dzięki temu, że w systemie logiki operacye są raz na zawsze zdefiniowane i nie zależą od treści pojęć. Żeby jednak dojść do określenia tych operacyi niepodobna uchylić się od analizy pojęć i dlatego to teorya typów jest właściwie analizą pojęć fundamentalnych systemu Russella. Analizą tą zajmiemy się natychmiast.

4. Zmienna jest to symbol, którego znaczenie nie jest określone Różne określenia tego symbolu nazywają się jego wartościami. Tak n. p. frazes: *król polski* może figurować w zastępstwie któregokolwiek z królów polskich. W tym wypadku frazes ten jest symbolem zmiennym, a wartościami tego symbolu są poszczególni królowie polscy. Zbiór wartości zmiennej nazywa stę jej zakresem. W naszym wypadku zakres zmiennej jest to zbiór królów polskich. W dalszych rozważaniach będziemy do oznaczenia zmiennych używali liter x, y, z celem uchronienia się od dwuznaczności związanych z określeniami słownemi. Uwagi te wystarczają w zupełności do odróżnienia zmiennych od tego, co niemi nie jest. Podobne określenie nie da się sformułować dla sądów, zobaczymy bowiem, że na to, aby odróżnić to, co jest sądem, od tego, co sądem nie jest, potrzebna jest właściwie cała teorya typów. W systemie logiki mamy do czynienia jedynie z sądami, które otrzymać możemy zapomocą reguł zawartych w tym systemie, skutkiem tego kryteryum powyższe jest zbyteczne. Potrzebne jest coprawda założenie istnienia sądów pewnych niezależnie od pojęć zawartych w sy-

stemie — ale do tego wystarczy podać kilka przykładów takich sądów.

Funkcyą propozycyonalną jest wszystko to, co zawiera zmienną, i ma tę własność, że przechodzi w sąd, jeśli zmienną zastąpimy przedmiotem określonym w zupełności. Przykładem funkcyi propozycyonalnej jest utwór: x *jest człowiekiem*, gdzie x jest zmienna. Rzeczywiście, jeśli na miejscu x będę kładł imiona własne takie jak: *Sokrates*, *Alcybiades*, *Księżyc*, otrzymywać będę sądy. Fundamentalne zagadnienie teoryi typów polega na tem, aby ustalić, jaki jest zakres zmiennej w danej funkcyi propozycyonalnej. Z chwilą, kiedy to ustanowimy, będziemy mogli powiedzieć, że do każdej funkcyi propozycyonalnej należy zbiór sądów, prawdziwych lub fałszywych, jakie z niej otrzymane być mogą, przez podstawienie przedmiotów określonych na miejsce zmiennej. Sądy te nazywać będziemy wartościami funkcyi, zbiór zaś ich zbiorem wartości funkcyi. Zbiór wartości funkcyi może być uważany za zakres zmiennej przedstawiającej dowolną wartość funkcyi. To ostatnie pojęcie należy odróżnić od samej funkcyi, która jest utworem przechodzącym w dowolną z swych wartości pod pewnymi warunkami [1]).

Widzimy, że funkcye są utworami zasadniczo różnymi od sądów, zawierają bowiem w sobie coś zmiennego, podczas gdy w sądach wszystko jest określone. Podstawowym postulatem teoryi typów jest, że funkcye i sądy nie dadzą się objąć wspólnem pojęciem, t. zn. że żaden sąd z sensem wypowiedziany o funkcyi nie może być wypowiedziany o sądzie.

5. Prócz funkcyj propozycyonalnych i sądów wprowadza Russell do logiki indywidua. Te 3 kategorye wyczerpują cały materyał logiki, t. zn. można powiedzieć: indywiduum jest wszystko to, co nie jest sądem ani funkcyą. Różnica pomiędzy indywiduami a sądami i funkcyami jest równie fundamentalna, jak między sądami a funkcyami Jest to oczywiście nowe założenie teoryi typów, które Russell stara się objaśnić następującem rozważaniem natury psychologicznej. Sądy są przedmiotami określonymi w zupełności, ale niezupełnymi. Nie mogę bowiem powiedzieć, że akt sądzenia składa się z przedmiotu zwanego sądem i pewnego procesu psychologicznego, ale jednolity akt sądzenia rozbijam sztucznie na 2 części, dzięki użyciu symbolów. W przeciwieństwie do sądów uważa Russell indywidua za przedmioty zupełne. Nadto sam fakt, że indywidua są niezłożone, odróżnia je dostatecznie.

[1]) Funkcye prop. oznacza Russel i symbolam $\varphi\hat{x}$, $\psi\hat{x}$ i t. p., dowolne ich wartości są wtedy φx, ψy i t. p.

Każdy sąd o sądzie sprowadza się w ostatecznej redukcyi do sądu o indywiduach, sąd nie jest tedy nigdy właściwym przedmiotem sądu.

Nie potrzeba dodawać, że te objaśnienia nie każdego zadowolą żaden bowiem idealista nie wierzy w istnienie jakichś przedmiotów, któreby z sądami nie dzieliły losu sztuczności i niezupełności. Dla nas jednak rozważania te i wątpliwości są bez znaczenia, oświadczyliśmy bowiem gotowość przyjęcia założeń Russella dla zbadania ich konsekwencyi. Ważniejszą natomiast jest rzeczą starać się dociec, co to są za przedmioty te indywidua i czy wogóle o czemś takiem można mówić. Otóż Russell podaje w tym kierunku następujące wskazówki. Jeśli mówię *Sokrates jest człowiekiem*, to w sądzie tym jest *Sokrates* indywiduum jedynie pod warunkiem, że nazwa ta wskazuje bezpośrednio na coś danego w wrażeniu [1]). Jeżeli dla kogoś Sokrates jest n. p. filozofem, który wypił cykutę, to sprawa przedstawia się zupełnie inaczej. Mamy wówczas do czynienia z sądem o sądzie, co wyjaśnione będzie w dalszem stadyum. Rownież później dopiero uzasadniona może być myśl Russella, że w systemie logiki nie potrzeba mówić o czemkolwiek innem prócz o indywiduach, sądach i funkcyach propozycyonalnych.

Widzimy przeto, że indywidua są to elementy bezpośredniego doświadczenia; wynika stąd, że niema powodu odrzucać ich istnienia, a to tem bardziej, że od tego, czem są indywidua, nie zależy wcale system logiki, byle tylko było to coś różnego od sądów i funkcyi propozycyonalnych. W końcu zaznaczyć wypada, że zasadnicze idee teoryi typów nie zależą od tego, czy przyjmiemy, że indywidua istnieją, czy też nie.

6. Wartości funkcyi są zupełnie niezależne od funkcyi. Tak n. p. sąd: *Sokrates jest człowiekiem*, gdzie *Sokrates* oznacza indywiduum istnieje zupełnie niezależnie od funkcyi: x *jest człowiekiem* i naodwrót można badać własności tej funkcyi nie wiedząc nic o żadnem indywiduum *Sokrates*. Natomiast do każdej funkcyi należy pewien sąd określony, którym teraz z kolei się zajmiemy.

Niech będzie dana funkcya: *jeśli* x *jest człowiekiem, to* x *jest śmiertelny* — i sąd: *wszyscy ludzie są śmiertelni*. Sąd ten może być sformułowany jak następuje: *wszystkie wartości funkcyi: jeśli* x *jest człowiekiem, to* x *jest śmiertelny — są prawdziwe*, albo *funkcya: jeśli* x *jest człowiekiem, to* x *jest śmiertelny jest prawdziwa dla wszystkich wartości należących do zakresu* x, albo krócej — *jest zawsze prawdziwa*. Widzimy, że w tych nowych sformułowaniach zmienna x występuje tylko pozornie, gdyż nie mamy tam nic zmiennego. Taką

[1]) Por. także: Le réalisme analytique, Bulletin de la Societé française de Philosophie, Mars 1911 p. 53.

zmienną nazywa Russell za Peaną pozorną[1]). Pojęcie to jest niezmiernie ważne, na niem bowiem opiera Russell całą swoją hierarchię typów. Russell wychodzi z tego założenia, że jeśli mam jakikolwiek sąd, w którym pewna własność jest przypisana wszystkim przedmiotom pewnej kategoryi, to sąd ten może być sformułowany w słowach: *wszystkie wartości funkcyi: x posiada tę a tę własność, jeśli jest przedmiotem tej a tej kategoryi — są prawdziwe*. Założenie to rozciąga jednak Russell o wiele dalej. Twierdzi on mianowicie, że jeśli do każdego sądu lub funkcyi będę stosował powyższą metodę określania funkcyj, z których dany sąd lub funkcya powstały przez zamianę zmiennej x na zmienną pozorną, to ostatecznie muszę dojść do funkcyi, które nie będą mogły być poddane takiej operacyi, t. zn. nie będą zawierały zmiennej pozornej. Russell podnosi, że w przeciwnym razie musielibyśmy przyjąć nieskończony stopień skomplikowania naszej myśli. Rzeczywiście, w takich warunkach, każdy sąd i każda funkcya musiałyby zawierać nieskończenie wiele zmiennych pozornych. Otóż to przypuszczenie odrzuca Russell i na tej zasadzie dochodzi do przyjęcia istnienia funkcyi pozbawionych zmiennej pozornej. Funkcye te nazywa Russell matrycami. Otóż, pomimo wielu pro, jakie przemawiają za hipotezą Russella, zaprzeczyć się nie da, że nie wystarcza ona do upewnienia się o istnieniu matryc. Do tego konieczne jest podanie przykładu matrycy. Tą kwestyą zajmiemy się w paragrafie następnym.

7. Ażeby zrozumieć, jak może wyglądać matryca, musimy przytoczyć pewne rozważania Russella wynikające z jego stanowiska filozoficznego. Russell wierzy, że indywidua są nam dane w związkach, które nazywa kompleksami, takich jak *a z właściwością p*, *a w stosunku R do b*. Konstatowanie takich związków prowadzi nas do aktów sądzenia, które Russell nazywa elementarnymi. Sądy, z jakimi przytem mamy do czynienia, nie zawierają niewątpliwie zmiennych pozornych. Sądy niezawierające zmiennych pozornych nazywa Russell sądami elementarnymi. Możemy więc powiedzieć, że elementarne akty sądzenia prowadzą do sądów elementarnych. Zobaczmy teraz, co należy rozumieć przez prawdę lub fałsz sądu elementarnego. Jeśli do danego sądu elementarnego: *a jest w stosunku R do b* należy kompleks *a w stosunku R do b*, to sąd ten jest prawdziwy, jeśli nie, to sąd ten jest fałszywy. Widzimy, że jest to definicya prawdy podobna do starej definicyi przez zgodność z rzeczywistością, nie posiada jednak wad tamtej. Rzeczywiście, jeśli mówię, że sąd: *Sokrates jest dobry* jest prawdziwy, je-

---

[1]) Jeśli dana jest funkcya $\varphi\hat{x}$, to symbol $(x)\ \varphi x =$ *wszystkie wartości funkcyi* $\varphi\hat{x}$ *są prawdziwe*.

śli to jest zgodne z rzeczywistością, to kryteryum moje jest niejasne, nie wiadomo bowiem, o jaką rzeczywistość chodzi, skoro jednak powiadam, że sąd *to jest czerwone* jest wtedy prawdziwy, gdy widzę coś czerwonego i tę rzecz właśnie oznaczam słówkiem *to* — to tutaj niema żadnej dwuznaczności. Rzeczywiście, jeśli ktoś inny powie, że *to nie jest czerwone* — to sąd jego może nie odnosić się do tego samego ndywiduum, nie musi więc być sprzeczny z sądem poprzednim.

Widzimy, że w tych warunkach możemy przyjąć istnienie funkcyi: *x jest czerwone*, gdzie zakresem zmiennej x jest jakiekolwiek indywiduum. Funkcya ta jest przykładem matrycy. Matryce, których zmienna należy do zakresu indywiduów, nazywa Russell funkcyami elementarnemi. Funkcya *x jest czerwone* jest tedy funkcyą elementarną.

8. Zajmijmy się teraz objaśnieniem szeregu pojęć fundamentalnych należących do sądów, a mianowicie pojęć negacyi sądu, sumy logicznej kilku sądów i assercyi sądu. Negacya sądu jest to sąd, który stwierdza, że dany sąd jest fałszywy, t. zn. nie prawdziwy. Według definicyi prawdy sądu elementarnego — negacya sądu elementarnego jest prawdziwa, jeśli kompleks należący do tego sądu nie zachodzi w rzeczywistości [1]).

Suma logiczna jest to sąd, który powstaje z połączenia dwóch lub więcej sądów słówkiem *albo* [2])

Przykłady sum logicznych są następujące:

(1) *x jest czerwone albo x jest słodkie*

(2) *x jest czerwone albo x jest niebieskie*

(3) *x jest czerwone albo x jest czerwone.*

Składniki sum nie są tu funkcyami, ale dowolnemi wartościami funkcyi, każdy więc z przykładów kondensuje w sobie właściwie nieskończenie wiele różnych sum logicznych, które otrzymamy kładąc za x poszczególne indywidua. Dodajmy, że słówko *albo* użyte jest tu w znaczeniu ogólniejszem, niż się to robi w sądach t. z. rozjemczych, a mianowicie, że suma logiczna jest prawdziwa, jeśli przynajmniej jeden jej składnik jest prawdziwy, mogą zatem również obydwa jej składniki być prawdziwe.

Sumy sądów elementarnych są znowu sądami elementarnymi. Dotychczas właściwie wiemy tylko, co to jest suma sądów elementarnych, gdyż suma sądów innych jest pojęciem odmiennem, którego z danem mieszać nie powinniśmy. Zważmy teraz, że sądy: *wszystkie*

---

1) Jeśli p, q są sądy, to $\sim p$, $\sim q$ są negacye tych sądów.

2) Suma logiczna sądów p, q oznacza się symbolem $p \vee q$.

indywidua są czerwone, wszystkie indywidua czerwone są barwne nie są sądami elementarnymi. Mamy w nich podstawę do wprowadzenia sumy logicznej, której jeden składnik nie jest elementarny, lub obydwa składniki nie są elementarne. Sumy takie oczywiście nie są sądami elementarnymi.

Przechodzę do pojęcia assercyi sądu, które jak to słusznie zauważył Padoa[1]) jest właściwie zbyteczne. Chodzi o to, żeby odróżnić w systemie logiki twierdzenia należące do tego systemu, od sądów figurujących w tym systemie. Otóż Russell pierwsze poprzedza znakiem assercyi, który objaśnia różnemi aluzyami psychologicznemi. Różnica apsychologiczna jest właściwie tylko ta, że sądy poddane assercyi w systemie muszą być prawdziwe, pozostałe zaś mogą też być fałszywe[2]).

9. Zwróćmy uwagę na funkcyę: *x jest czerwone albo y jest słodkie*, gdzie x, y są dowolne indywidua. Zamieńmy jedną z tych zmiennych n. p. y na zmienną pozorną. Otrzymamy funkcyę *x jest czerwone albo wszystkie indywidua są słodkie.* Funkcya taka nazywa się funkcyą rzędu 1-go. Ogólnie, funkcye rzędu 1-go są to funkcye zawierające jako zmienną pozorną zbiór indywiduów, lub funkcye elementarne[3]).

Wartości funkcyi rzędu 1-go są albo funkcyami rzędu 1-go, albo sądami. Sądy, które nie są sądami elementarnymi, a zawierają jedynie zbiór indywiduów, jako zmiennę pozorną, nazywamy sądami rzędu 1-go. Widzimy, że sądy, które są wartościami funkcyj rzędu 1-go, są albo sądami elementarnymi albo sądami rzędu 1-go. — Nietrudno zobaczyć, że sądy rzędu 1-go nie tworzą jednolitego logicznego typu. Rzeczywiście, jeśli porównamy sąd elementarny *a jest czerwone* z sądem *wszystkie indywidua nie są czerwone* — musimy przyznać, że co innego należy rozumieć przez prawdę sądu 1-go, a co innego przez prawdę sądu 2-go. Znaczenie pojęcia prawdy sądu elementarnego ustaliliśmy poprzednio. Będziemy mówili, że sądy elementarne posiadają prawdę w stopniu 1-ym, albo prawdę elementarną. Sąd: *wszystkie indywidua nie są czerwone* — jest równoznaczny z sądem: *nie wszystkie wartości funkcyi: x jest czerwone są prawdziwe* (w stopniu 1-ym). Otóż według zasady przyjętej sąd ten nie jest elementarny, jest więc prawdziwy

---

[1]) A. Padoa: La logique déductive, Revue de Mét. et de Morale, Novembre 1911 p. 871.

[2]) Znak assercyi jest $\vdash$

[3]) Funkcye elementarne oznacza Russell symbolami $\varphi ! \hat{x}$, $f ! (\hat{x} \hat{y} \hat{z})$; inne funkcye rzędu 1-go mają kształt n. p. taki jak $(x) f ! (x \hat{y})$ i t. p., mogą jednak być oznaczane także n. p. symbolem $F ! \hat{y}$.

lub fałszywy w stopniu 2-gim. Odpowiednio do stopni prawdy możemy dzielić sądy na stopnie. Jest rzeczą jasną, że pojęcia: negacyi, sumy i assercyi mają odmienne znaczenie dla sądów różnych stopni.

Ten stan rzeczy sprawia, że wyrażenie *p jest prawdziwe albo fałszywe*, nie jest funkcyą propozycyonalną. Pomimo tego możemy się posługiwać tem wyrażeniem, jeśli tylko pamiętamy, że ile razy zmienimy stopień sądu, zmieni się też stopień prawdy i fałszu. Natomiast niema mowy o zamianie w wyrażeniu tem zmiennej p na zmienną pozorną, gdyż pojęcie prawdy nie jest tu określone w zupełności. Natomiast jeśli ograniczymy się n. p. do sądów elementarnych, będziemy mogli zmienić p na zmienną pozorną. Otrzymamy wówczas sąd: *wszystkie sądy elementarne są prawdziwe albo fałszywe w stopniu 1-ym*.

Russell zwraca uwagę, że niejednolitość sądów rzędu 1-go przenosi się też na funkcye rzędu 1-go, w praktyce jednak można funkcye rzędu 1-go, podobnie jak i sądy rzędu 1-go traktować jako jeden logiczny typ, jeśli tylko nie wprowadza się ich w charakterze zmiennych pozornych.

10. Zobaczmy teraz, w jaki sposób dochodzi Russell do drugiego rzędu funkcyj. Matryce rzędu 1-go tworzą określony typ logiczny, który może być zakresem zmiennej nowych funkcyi. Matryce, których zmienne są funkcyami rzędu 1-go, a nie zawierają żadnych innych zmiennych prócz tych i indywiduów, nazywają się matrycami rzędu drugiego. Ogólnie funkcyami rzędu drugiego nazywają się matryce rzędu drugiego i te funkcye, które z nich powstają przez zamianę zmiennych na zmienne pozorne[1]). Przykładem funkcyi rzędu 2-go jest funkcya:

Wszystkie matryce rzędu 1-go, których argument jest x, mają także argument a.

Jeśli tu a jest indywiduum, a x zmienna, mamy tu funkcyę rzędu 2-go, która nie jest matrycą. Matrycę rzędu drugiego znajdujemy w funkcyi: *jeśli x jest argumentem funkcyi rzędu 1-go, to a jest też argumentem funkcyi rzędu 1-go.*

Funkcyę rzędu 2-go, w której nie zachodzi zmienna rzeczywista o zakresie indywiduów, nazywamy funkcyą predykatywną rzędu 2-go. Przykładem funkcyi predykatywnej rzędu 2-go jest funkcya następująca:

Wszystkie indywidya x mają tę własność, że jeśli x jest argumentem funkcyi rzędu 1-go, to a jest też argumentem funkcyi rzędu 1-go[2]).

---

[1]) Definicye te niezupełnie nakrywają się z definicyami Russella podanemi w Principiach I p. 54, które są niezupełnie ścisłe. Zbudowałem je według zupełnie jasnych określeń paragrafu * 12.

[2]) Matryca rzędu 2-go $f!\,(\varphi!\,\hat{x})$.

Funkcya rzędu 2-go $(\varphi)\,f!\,(\varphi!\,\hat{x},\ \hat{x})$.

Funkcya predykatywna rzędu 2-go $(x)\,f!\,(\varphi!\,\hat{x},\ x)$.

Trzeci typ logiczny uzyskujemy w sposób analogiczny z funkcyi rzędu 2-go. Ogólnie: Matryca rzędu n—tego jest to funkcya nie zawierająca zmiennych pozornych i zawierająca zmienne należące do typu $n-1$ a nie zawierająca zmiennych należących do typów wyższych niż $n-1$.

Funkcya predykatywna rzędu n—tego jest każda funkcya rzędu n—tego, która zawiera jedynie zmienne należące do rzędu $(n-1)$ [1]).

Ogólnie funkcya rzędu n—tego jest to matryca rzędu n—tego, lub funkcya która z niej powstanie przez zamianę pewnej ilości zmiennych na zmienne pozorne. Widzimy, że możemy zdefiniować kolejno tyle typów, ile nam się podoba, nie możemy jednak żadną miarą zdefiniować wszystkich typów i dlatego pojęcia wszystkich typów wprowadzać nam nie wolno. W polemice z Poincarém zaznacza Russell, że definicye typów nie zakładają pojęcia liczby całej, wiemy bowiem właściwie tylko tyle, że mamy pewne typy, i że z nich możemy otrzymać nowy typ, a potem jeszcze nowy i t. d.

Ważnem jest pamiętać, że zakres zmiennej nie definiuje bynajmniej rzędu funkcyi, w której ta zmienna figuruje. Tak n. p. możemy sobie łatwo wyobrazić funkcye, w których zmienne należą do typu indywiduów, a zmienne pozorne są rzędu n i rzędów mniejszych. Takie funkcye są oczywiście rzędu $n+1$. Stąd to pochodzi, że nie można mówić o wszystkich własnościach przedmiotu a. Rzeczywiście, własności te mogą być definiowane przez funkcye różnych rzędów, same więc rozpadną się na różne typy. Skutkiem tego możemy mówić o własnościach rzędu 1-go, 2-go i t. d. danego przedmiotu. Ten stan rzeczy stanowi podstawę do wprowadzenia zasady sprowadzalności, która będzie przedmiotem ważnych dyskusyi w rozdziałach następnych.

11. Zauważmy na koniec, że hierarchia rzędów funkcyi jest względna, t. j. że nie zależy zupełnie od tego, który typ logiczny uznamy za najniższy. — Jeśli funkcya nie zawiera żadnej zmiennej pozornej rzędu wyższego od zakresu danej zmiennej, możemy powiedzieć, że funkcya posiada rząd 1-y ze względu na tę zmienną. Widzimy, że matryce są zawsze funkcyami 1-go rzędu ze względu na zmienną. Stąd to możemy mówić n. p. *o wszystkich własnościach* danego przedmiotu, danych przez matryce. Na tej uwadze opiera Russell całą swoją teoryę klas.

---

[1]) Por. Principia I p. 56.

Na str. 172: Principia I. wprowadza Russell odmienne znaczenie pojęcia funkcyi predykatywnej, identyfikując je z pojęciem matrycy. Dla uniknięcia nieporozumień będę używał w dalszym ciągu jedynie pojęcia *matryca*.

12. Widzieliśmy, co to są sądy rzędu 1-go. Opierając się na hierarchii rzędów funkcyi, otrzymamy z łatwością wyższe rzędy sądów. Russell zwraca uwagę, że hierarchia rzędów sądów da się z logiki wyeliminować za pośrednictwem hierarchii rzędów funkcyi. Dla dalszego ciągu tej pracy jest ona bez znaczenia.

W całości wzięta teorya typów przedstawia się jako zbiór reguł ograniczających zakres zmiennych w funkcyach propozycyonalnych. Widzieliśmy, że reguły posiadają charakter czysto intuicyjny, nie dają jednak podstawy do żadnych wątpliwości w zastosowaniach. Oczywiście, w systemie logiki reguły te wprowadzone są za pośrednictwem raz na zawsze ustalonych formuł, — znaczenie ich jednak sięga poza zakres systemu logiki. Nelson udowodnił, że w różnych klasycznych problemach metafizyki tkwią trudności analogiczne do paradoksów logiki[1]). Jest to wskazówką, że wszelkie dalsze rozważania metafizyczne muszą się ściśle liczyć z teoryą typów.

ROZDZIAŁ III.

Russellowski system logiki formalnej.

1. Pojęcie systemu logiki formalnej. — 2. Definicya implikacyi. — 3. Definicya iloczynu logicznego. — 4. Definicya pojęcia równoważności dwóch sądów. — 5. Sądy szczegółowe. — 6. Definicya identyczności. — 7. Pojęcie wielu zmiennych pozornych. — 8. Definicya pojęcia *tego samego typu*. — 9. O aksyomatach wogóle. — 10. Aksyomaty 1-ej grupy. — 11. Aksyomaty 2-ej grupy. — 12. Aksyomaty 3-ej grupy. — 13. Formalny charakter aksyomatów. — 14. Stosunek aksyomatów do prawdy i fałszu sądów. — 15. Rachunki logiczne. — 16. Stosunek aksyomatów do rachunku klas. — 17. Rola klas w systemie Russella. — 18. Funkcye ekstensyonalne i intensyonalne. — 19. Funkcya pochodna. — 20. Definicya klasy. — 21. Stosunek tej definicyi do intuicyi. 22. Pojęcie stosunku. — 23. Wyjaśnienie parodoksów.

1. System Russella opiera się na szeregu pojęć fundamentalnych. Fundamentalnemi nazywają się te wszystkie pojęcia, które figurują w systemie. Dawniej wymagało się od systemu, żeby zawierał skończoną liczbę pojęć fundamentalnych. Ostatni system Russella zawiera ich nieskończenie wiele, urządzony jest jednak, jak widzieliśmy, w ten sposób, że każde jego twierdzenie opiera się na skończonej liczbie pojęć fundamentalnych, a nadto są zdefiniowane reguły, według których z danych pojęć fundamentalnych możemy otrzymać dalsze.

Na pozór wydawałoby się, że określenie powyższe pojęcia fundamentalnego nie jest ścisłe, skoro Russell wprowadza definicye nowych

[1]) Über das sogenannte Erkenntnisproblem, Göttingen 1908.

pojęć przy pomocy pojęć fundamentalnych. Należy jednak zważyć, że definicye Russella mają charakter czysto symboliczny i służą jedynie jako skróty, t. zn. że gdybyśmy za każdy symbol zdefiniowany postawili jego definicyę, nie pozostałoby w systemie nic prócz pojęć fundamentalnych. Jeśli o tem pamiętamy, możemy się zgodzić, że w systemie Russella figurują pojęcia zdefiniowane, trzeba jednak pamiętać, że każde z tych pojęć może być natychmiast usunięte. Właściwymi składnikami systemu są twierdzenia. Rozpadają się one na dwie kategorye, mianowicie na aksyomaty i na twierdzenia udowodnione. Twierdzenia systemu są sądami warunkowymi, w których hipotezy mogą być prawdziwe lub fałszywe. Twierdzenia same muszą być prawdziwe.

Na tem miejscu ograniczyłem się do tych tylko uwag o budowie systemu Russella, które on sam podaje i które są nieodzowne do zrozumienia jego związku wewnętrznego. Analityczną definicyę systemu logiki odkładam do rozdziału ostatniego.

2. Pojęcia fundamentalne rachunku funkcyi i sądów poznaliśmy w rozdziale poprzednim. Zajmiemy się teraz najważniejszemi definicyami.

Przy pomocy pojęcia sumy logicznej definiuje Russell pojęcie implikacyi dwóch sądów, które w rachunku sądów odgrywa rolę kapitalną.

Według tej definicyi powiedzieć, że *sąd p implikuje, czyli pociąga sąd q* znaczy to twierdzić, że *albo sąd p jest fałszywy, albo sąd q jest prawdziwy* [1]). Implikacya zachodząca pomiędzy dwoma sądami nazywa się materyalną.

Obok implikacyi dwóch sądów, mamy implikacyę dwóch funkcyi, tejsamej zmiennej. Weźmy n. p. funkcye: *x jest barwne*, *x jest zielone*. Jeśli teraz powiem, że *x jest barwne* pociąga *x jest zielone*, — znaczy to, że jeśli za x podstawię dowolny przedmiot a czyniący zadość tym funkcyom, otrzymam sądy, które będą czyniły zadość warunkowi implikacyi. Implikacya dwóch funkcyi nazywa się implikacyą formalną. Z tym rodzajem implikacyi mamy do czynienia w zwykłych rozumowaniach. Natomiast pojęcie implikacyi materyalnej, jakkolwiek bardziej podstawowe, jest naogół nieznane.

Aby zrozumieć sens tego pojęcia, zwróćmy się do pewnych twierdzeń związanych z stosunkiem implikacyi, które z łatwością mogą być udowodnione. Twierdzenia te są następujące:

1^0 jeśli p, q są sądy, to musi zachodzić *p pociąga q*, albo *q po-*

---

[1]) *p pociąga q* oznacza Russell symbolem $p \supset q$. Definicya tego symbolu jest tedy $p \supset q = \sim p \vee q$.

ciąga p, — innemi słowami stosunek implikacyi musi zachodzić pomiędzy wszelkimi dwoma sądami.

2° Jeśli p jest prawdziwe i q jest prawdziwe, albo też jeśli i p i q są fałszywe, to wtedy implikacya jest obustronną. Nazywamy wtedy oba sądy równoważnymi. Równoważne są każde dwa sądy prawdziwe i każde dwa sądy fałszywe.

3° Jeśli p jest prawdziwe a q fałszywe, to q pociąga p, a p nie pociąga q.

Jednem słowem implikacya materyalna jest to tego rodzaju stosunek, że wszelkie kombinacye pomiędzy sądami są dopuszczalne z wyjątkiem jednej, a mianowicie: sąd fałszywy nie może implikować sądu prawdziwego. —Wobec takich założeń musimy się zgodzić n. p. na następujące sądy: *$2 \times 2 = 5$ pociąga sąd: Sokrates jest człowiekiem*; *$2 \times 2 = 4$ pociąga sąd: Sokrates jest człowiekiem*; *$2 \times 2 = 5$ pociąga sąd: Sokrates nie jest człowiekiem*; *nie jest prawdą, że $2 \times 2 = 4$ pociąga sąd: Sokrates nie jest człowiekiem.* — Przykłady te pouczają dostatecznie, jak odmienne od pojęć zwykle używanych w logice jest pojęcie implikacyi materyalnej.

Zobaczmy teraz, że pojęcie to jest użyteczne. Powiedzieliśmy, że implikacya formalna, która występuje w zwykłych rozumowaniach definiuje się przy pomocy implikacyi materyalnej. Zobaczmy, w jaki sposób możemy kontrolować poprawność implikacyi formalnej przy pomocy pojęcia implikacyi materyalnej. — Zwróćmy się do funkcyi *x jest zielone pociąga x jest barwne.* Implikacya formalna tu zawarta odpowiada poglądowi popularnemu, według tego poglądu jest też prawdziwa. Zobaczmy, że to samo uzyskamy odwołując się do pojęcia implikacyi materyalnej. — Połóżmy za x określony przedmiot a. Jeśli *a jest zielone*, jest sądem fałszywym, to implikacya, *a jest zielone pociąga a jest barwne*, musi być prawdziwa według definicyi implikacyi materyalnej. Jeśli jednak *a jest zielone* jest sądem prawdziwym, to *a jest barwne*, jest także sądem prawdziwym, implikacya *a jest zielone pociąga a jest barwne*, jest więc prawdziwa.

Weźmy teraz implikacyę formalną, *x jest barwne pociąga x jest zielone*. Pogląd popularny uczy, że implikacya ta jest fałszywa. Zobaczymy, że tensam rezultat uzyskamy odwołując się do definicyi implikacyi materyalnej. Rzeczywiście, przypuśćmy, że a jest to przedmiot czerwony, wtedy sąd *a jest barwne* jest prawdziwy, *a jest zielone* jest fałszywy, uzyskujemy tedy sąd fałszywy *a jest barwne pociąga a jest zielone*. — Wynika stąd, że implikacya formalna, z której wyszliśmy, jest fałszywa.

Niezwykłe własności implikacyi materyalnej nie odnoszą się wcale do implikacyi formalnej, tak n. p. stosunek implikacyi formalnej nie może zachodzić między dwiema funkcyami *x jest zielone*, *x jest czerwone*, jakkolwiek stosunek implikacyi materyalnej musi zachodzić pomiędzy każdymi dwoma sądami.

Jest jasne, że pojęcie implikacyi jest wieloznaczne w tymsamym sensie jak pojęcie sumy logicznej, przy którego pomocy definiujemy implikacyę.

3. Dwa sądy połączone słówkiem *i* tworzą iloczyn logiczny. Tak n. p. sąd: *a jest zielone i b jest zielone* jest iloczynem logicznym. Iloczyn logiczny mówi więc, że równocześnie dwa sądy są prawdziwe. Znaczy to tosamo, co powiedzieć, że nie jest prawdą, że jeden z tych sądów jest fałszywy. Wynika stąd, że iloczyn logiczny da się łatwo zdefiniować przy pomocy pojęcia sumy logicznej. Rzeczywiście, sąd: *a jest zielone i b jest zielone* jest równoznaczny z sądem *nie jest prawdą, że a nie jest zielone, albo b nie jest zielone.* Ogólnie, sąd: *sąd p i sąd q są prawdziwe* jest równoznaczny z sądem *nie jest prawdą, że sąd p jest fałszywy lub, że sąd q jest fałszywy*[1]).

4. Przy pomocy iloczynu logicznego możemy łatwo zdefiniować równoważność dwóch sądów. Dwa sądy są równoważne wtedy, jeśli są równocześnie prawdziwe, lub fałszywe. Znaczy to, że w sądach równoważnych stosunek implikacyi jest wzajemny. Jeśli zatem mówimy, że sądy p i q są sobie równoważne, to wygłaszamy iloczyn logiczny: *p pociąga q i q pociąga p*[2]).

O wiele ważniejsze od pojęcia równoważności dwóch sądów jest pojęcie równoważności dwóch funkcyi.

Dwie funkcye o tymsamym zakresie zmiennej są równoważne, jeśli dla tejsamej wartości zmiennej przechodzą równocześnie w sądy prawdziwe lub fałszywe. Przykładem funkcyi równoważnych są funkcye: *x jest człowiekiem*; *x jest bezpiórym dwunogiem* — albo *x jest cesarzem Francyi*; *x jest Napoleonem I-ym lub III-cim*[3]).

5. W rachunku funkcyjnym ważną rolę odgrywa pojęcie takich sądów jak: *przynajmniej jedna wartość danej funkcyi jest prawdziwa*, czyli *niektóre wartości danej funkcyi są prawdziwe*[4]). Nietrudno zoba-

---

[1]) Iloczyn sądów p, q oznacza się symbolem $p.\,q$. Według tego cośmy powiedzieli $p.\,q = \sim(\sim p \vee \sim q)$.

[2]) W symbolach *p jest równoważne q* piszemy $p \equiv q$. Mamy tedy $p \equiv q = p \supset q.\, q \supset p$.

[3]) Orzeczeń tych używam jedynie jako skrótów zamiast orzeczeń wyróżniających odnośne jednostki.

[4]) $(Ex)\, \varphi x$.

czyć, że sądy takie zawierają zmienną pozorną. Rzeczywiście, z definicyi są one równoznaczne z sądem:

Nieprawdą jest, że wszystkie wartości danej funkcyi są fałszywe[1].

6. Definicya identyczności jest następująca:

Dwa przedmioty x, y są identyczne jeśli wszystkie ich predykaty są wspólne, t. zn. jeśli wszystkie matryce odnoszące się do nich są sobie równoważne[2].

Zauważyć należy, że w definicyi tej niema mowy o wszystkich własnościach przedmiotów x, y, bo to nie miałoby sensu, ale jedynie o wszystkich własnościach typu 1, czyli krótko predykatach. Wynika stąd, że definicya nasza nie rozstrzyga wcale, czy nie mogłaby się znaleźć jakaś własność typu wyższego, którąby można przypisać jednemu z dwóch przedmiotów identycznych, a która pomimo to nie należałaby do drugiego. Tę paradoksalną możliwość stara się Russell usunąć przez przyjęcie t. z. aksyomatu sprowadzalności, o którym będzie mowa niżej. Zobaczymy, że to wyjaśnienie Russella nie da się utrzymać.

Możnaby podnieść kwestyę zasadniczą, czy pojęcie definicyi identyczności nie zawiera błędnego koła. Każda definicya jest przecież stwierdzeniem pewnego rodzaju identyczności. Trudność tę omija Russell w ten sposób, że pojęcie definicyi przyjmuje jako pojęcie fundamentalne, niezależne od pojęcia identyczności, które później dopiero definiuje. Błędu w tem niema, ale nasuwa się wątpliwość, czy nie lepiejby było przyjąć odrazu pojęcie identyczności jako pojęcie fundamentalne, unikając w ten sposób trudności związanych z definicyą tego pojęcia, a nie mnożąc wcale pojęć fundamentalnych logiki.

7. Dotychczas mówiliśmy tylko o zamianie jednej zmiennej na zmienną pozorną, przypuszczając jednak możliwość kolejnego wykonywania takiego procesu. Otóż dla przedstawienia rezultatu takich kolejnych procesów wprowadza Russell nowe pojęcie, zamiany wielu zmiennych na zmienną pozorną. Zamiana ta jest temsamem co kolejne zamienianie zmiennych na zmienne pozorne, przy czem za regułę porządku, w jakim ta zamiana ma być dokonywana, przyjmuje Russell porządek, w jakim zmienne figurują w funkcyi. Tak n. p. sąd *wszystkie indywidua są do siebie podobne* jest równoznaczny z sądem: *wszystkie wartości funkcyi*: *wszystkie wartości funkcyi x jest podobne do y, ze względu na zmienną y są prawdziwe*, — *są prawdziwe*[3].

[1] $(Ex).\ \varphi x = \sim [(x).\ \sim \varphi x]$

[2] Symbolicznie definicya identyczności wygląda jak następuje:

$$x = y\ .=:(\varphi):\varphi\,!\,x \supset \varphi\,!\,y.$$

[3] $(xy)\ .\ \psi(xy) = (x):(y)\ .\ \psi(xy).$

Analogicznie należy interpretować sądy i funkcye, w których jest mowa o niektórych wartościach funkcyi [1]).

8. W końcu należy podać definicyę pojęcia *być tego samego typu.* Mówimy, że u i v są tego samego typu, jeśli albo obydwa są indywiduami, albo elementarnymi sądami, albo matrycami o tymsamym zakresie zmiennej, albo jedno jest matrycą, drugie jej negacyą, albo jedno jest matrycą, drugie sumą tej funkcyi i innej matrycy, albo obydwa powstają przez zamianę jednej zmiennej na zmienną pozorną w dwóch funkcyach tegosamego typu.

Widzimy, że definicya ta nie może być zupełna, ponieważ każdy typ wymaga osobnej definicyi.

9. Przystąpmy teraz do rozbioru układu twierdzeń podstawowych, czyli aksyomatów logiki Russella. Jest wiadome, że układów takich podano bardzo wiele, dobrze jest jednak podkreślić, że sam Russell podał ich trzy, z tych pierwszy oparty na dawnych pojęciach a dwa ostatnie już na teoryi typów. Tutaj pominiemy pierwszy z nich [2]), a zajmiemy się wyłącznie drugim, wyłożonym w Principia Mathematica, jako najdoskonalszym. Zaznaczyć przytem należy, że różnice pomiędzy dwoma ostatnimi systemami nie są zbyt wielkie.

Układ aksyomatów, którym się zająć mamy, rozpada się na 3 zasadnicze działy. Do pierwszego należą aksyomaty odnoszące się do rachunku sądów elementarnych i matryc, do drugiego aksyomaty mające na celu wprowadzenie zmiennych pozornych do logiki, do trzeciego aksyomaty służące do zastąpienia funkcyi zawierających zmienne pozorne matrycami czyli t. zw. aksyomaty sprowadzalności. Wszystkimi tymi działami zajmiemy się po kolei.

10. Do działu 1-go należy 10 aksyomatów. Aksyomaty te są następujące:

Aksyomat I. Jeśli sąd p jest prawdziwy, oraz jeśli sąd p pociąga sąd q, to sąd q jest prawdziwy [3]).

---

[1]) $(\exists x, y)\, \psi(xy) = (\exists x) : (\exists y) . \psi(xy)$.

Dla uproszczenia symboliki pisze Russell za Peaną

$$\varphi x \supset_x \psi x \text{ zamiast } (x) . \varphi x \supset \psi x$$
$$\varphi x \equiv_x \psi x \text{ zamiast } (x) . \varphi x \equiv \psi x$$
$$\varphi(xy) \supset_{xy} \psi(xy) \text{ zamiast } (xy) . \varphi(xy) \supset \psi(xy)$$

W sprawozdaniu powyższem opuściłem wiele definicyi Russella, a w szczególności te wszystkie, które służą do przeniesienia teoryi sądów elementarnych dla sądów stopnia 1-go.

[2]) v. Amer. Journal of Mathematics XXX.

[3]) Jeśli mamy assercyę $\vdash p$, oraz $\vdash p \supset q$, to możemy powiedzieć $\vdash q$. Bez użycia słów aksyomat ten, jak wiele innych, nie da się sformułować. W Principiach posiada on nr * 1·1.

Aksyomat ten posiada wielkie znaczenie, pozwala nam bowiem korzystać z stosunku implikacyi. Trzeba pamiętać, że implikacya *p pociąga q* nie uprawnia nas bynajmniej do assercyi sądu *q*. Do tego należy się upewnić, że sąd *p* jest prawdziwy. Tę właśnie okoliczność podkreśla nasz aksyomat.

Aksyomat II. Jeśli dowolna wartość funkcyi elementarnej φ jest prawdziwa, oraz jeśli pomiędzy funkcyami φ i ψ zachodzi stosunek implikacyi, to dowolna wartość funkcyi ψ jest prawdziwa [1]).

W zestawieniu z aksyomatem poprzednim przynosi ten aksyomat następującą nową zasadę: funkcye φ oraz φ *pociąga* ψ posiadają ten sam zakres zmiennej. Dlatego nazywa się zasadą identyfikacyi typów.

Russell zwraca uwagę, że obydwa powyższe aksyomaty odgrywają bardzo ważną rolę w inferencyach.

Aksyomat III. Jeśli w sumie logicznej obydwa wyrazy przedstawiają tensam sąd *p*, to suma ta pociąga sąd *p* [2]).

Zasada ta jest tak banalna, że aż może się wydawać dziwaczna, dlatego dodam, że naprzód, jak widzieliśmy, suma logiczna: *Sokrates jest człowiekiem albo Sokrates jest człowiekiem* oznacza poprostu, że przynajmniej jeden z obu sądów jest prawdziwy. Nic więc dziwnego, że sąd *Sokrates jest człowiekiem* musi wynikać z tej sumy, ponieważ sąd ten stanowi równocześnie obydwa jej składniki. Aksyomat ten nazywa Russell zasadą tautologii.

Aksyomat IV. Sąd *q* pociąga sumę logiczną dowolnego sądu *p* i tegoż sądu *q* [3]).

Rzeczywiście, jeśli sąd *q* jest prawdziwy, to suma *p* albo *q* jest prawdziwa, bo jeden z jej składników w każdym razie jest prawdziwy. Jeśli *q* jest fałszywe, to według tego cośmy mówili o implikacyi materyalnej, *q* pociąga każdy sąd.

Aksyomat ten nazywa Russel zasadą dodawania. Objaśnia go następującym przykładem: Sąd *dzisiaj jest wtorek* pociąga sąd *dzisiaj jest wtorek lub środa.*

Aksyomat V. Suma logiczna nie zależy od porządku składników. Innemi słowami *p albo q* pociąga *q albo p* [4]). Aksyomat ten nazywa się zasadą permutacyi.

Aksyomat VI. Suma logiczna sądu *p* oraz sumy *q albo r* pociąga

---

[1]) nr. * 1·11.

[2]) $p \vee p . \supset . p$, nr * 1·2.

[3]) $q . \supset . p \vee q$ nr * 1·3.

[4]) $p \vee q . \supset . q \vee p$ nr * 1·4.

sumę logiczną sądu q oraz sumy *p albo r*[1]. Jest to t. z. prawo assocyacyi.

Aksyomat VII. Sąd *q pociąga r* pociąga sąd, jaki z danego sądu otrzymam kładąc na miejsce sądów q i r sumy logiczne tych sądów oraz sądu dowolnego p[2].

Russell zwraca uwagę, że aksyomat ten jest ściśle spokrewniony z zasadą dodawania.

Aksyomat VIII. Negacya sądu elementarnego jest sądem elementarnym[3].

Aksyomat IX. Suma dwóch sądów elementarnych jest sądem elementarnym[4].

Aksyomat X. Suma dwóch matryc, których zmienna jest dowolnym sądem elementarnym, jest matrycą, której zmienna jest dowolnym sądem elementarnym[5].

Ten ostatni aksyomat nazywa się zasadą identyfikacyi zmiennych rzeczywistych[6].

11. Zwróćmy się teraz do rozpatrzenia twierdzeń podstawowych należących do działu 2-go. Twierdzenia te są następujące.

Aksyomat I. Assercya dowolnej wartości funkcyi pociąga sąd: istnieje przynajmniej jedna wartość funkcyi, która jest sądem prawdziwym[7].

Aksyomat II. Suma dwóch dowolnych wartości tejsamej funkcyi pociąga sąd: istnieje przynajmniej jedna wartość funkcyi, która jest sądem prawdziwym[8].

Russell nazywa twierdzenia te aksyomatami istnienia, służą one bowiem do udowodnienia istnienia zbiorów przedmiotów przez wskazanie pojedynczych przedmiotów, posiadających żądaną własność.

Następne dwa aksyomaty są uogólnieniem zasad inferencyi podanych dla sądów i funkcyi elementarnych.

Aksyomat III. Jeśli dany jest prawdziwy sąd p i jeśli p pociąga q, to q jest prawdziwe, bez względu na typ sądów p, q[9].

---

[1] $p \vee . (q \vee r) . \supset q . \vee . (p \vee r)$. nr * 1·5.

[2] $q \supset r : p \vee q \supset p \vee r$ nr * 1·6.

[3] nr * 1· 7.

[4] nr * 1·71.

[5] nr * 1·72.

[6] nr * 1·172. Innemi słowami, funkcya $\varphi p \vee \psi p$ posiada tensam zakres zmiennej, co funkcye φp i ψp wzięte z osobna.

[7] $\varphi x . \supset . (\exists z) . \varphi z$, nr * 9·1.

[8] $\varphi x \vee \varphi y . \supset . (\exists z) . \varphi z$, nr * 9·11.

[9] nr * 9·12.

Aksyomat IV. W assercyi zawierającej zmienną rzeczywistą, zmienna ta może być zamieniona na zmienną pozorną [1]). Znaczy to, że ile razy mamy assercyę dowolnej wartości funkcyi, możemy poddać assercyi sąd *wszystkie wartości tej funkcyi są prawdziwe* [2]).

Ostatnia grupa twierdzeń tego działu odnosi się do zakresu znaczenia funkcyi.

Aksyomaty tej grupy są następujące:

Aksyomat V. Jeśli funkcya ma sens dla argumentu a oraz jeśli x posiada tensam typ co a, to funkcya ma sens także dla argumentu x [3]).

Aksyomat VI. Jeśli do jakiegoś a należy sąd odnoszący się do niego, to istnieje funkcya, którą otrzymam, kładąc w tym sądzie x na miejsce a i naodwrót [4]).

Aksyomat VII. Dowolna wartość funkcyi: *jakiekolwiekby nie było* x, $\varphi(x, y)$ *jest prawdziwa dla dowolnego* y pociąga odnośną wartość funkcyi, jaką z danej otrzymamy zamieniając x i y [5]).

Widzimy, że aksyomaty tego działu są poprostu résumé z tego, co o własnościach funkcyi zostało powiedziane w teoryi typów logicznych.

12 W dziale trzecim podaje Russell dwa aksyomaty, a mianowicie t. z. aksyomaty sprowadzalności [6]).

Aksyomaty te są następujące:

Aksyomat I. Do każdej funkcyi jednej zmiennej należy przynajmniej jedna matryca z nią równoważna [7]).

Axiomat II. Do każdej funkcyi dwóch zmiennych należy przynajmniej jedna matryca z nią równoważna [8]).

Widzimy, że zależnie od ilości zmiennych możnaby podać nieskończenie wiele takich aksyomatów. My będziemy mówili tylko o pierwszym. Aksyomaty te uważam za fałszywe. Z tego powodu poświęcę im cały następny rozdział.

13. Rzut oka na powyższy zbiór aksyomatów pouczy, że nie ma on nic wspólnego z tradycyonalnymi aksyomatami logiki, co więcej nie

---

1) nr * 9·13.

2) Dobrze jest pamiętać, że twierdzenie to wcale nie jest równoważne twierdzeniu $\varphi y \supset (z) \varphi z$, jakby to ktoś mógł myśleć. To ostatnie twierdzenie jest poprostu fałszywe.

3) Jeśli φa jest sąd, oraz jeśli a i x są tegosamego typu, to φx również jest sądem, nr * 9·13.

4) Jeśli sąd p ma kształt φa to istnieje funkcya φx, nr * 9·14.

5) * 11·07.

6) the axiom of reducibility.

7) $\vdash : (\exists f) : \varphi x \equiv_x . f ! x$ nr * 12·1.

8) $\vdash (\exists f) : \varphi (xy) \equiv_{xy} f ! (xy)$.

przypomina nawet znanych reguł nowszej logiki formalnej. — Druga uwaga, jaka się nasunie jest ta, że aksyomaty powyższe nie są wcale proste, owszem niektóre z nich przedstawiają się w sposób dość zawiły. — Ten stan rzeczy wynika z celu, dla jakiego układ owych aksyomatów został ustawiony. Cel ten jest dwojaki. Naprzód chodziło o to, aby przy pomocy układu tego otrzymać znane twierdzenia logiki, a nie otrzymać twierdzeń fałszywych. Nadto należało liczbę aksyomatów i pojęć fundamentalnych sprowadzić do minimum. Kwestya prostoty i jasności aksyomatów stoi na drugim planie, mniemam jednak, że aksyomaty Russella nie są wcale niejasne. Tłómaczenie tych aksyomatów nie przedstawia jak widzimy trudności, jest jednak w zasadzie niepotrzebne. — Wszystkie rachunki logiczne odbywają się całkiem niezależnie od treści twierdzeń i mogłyby bez trudności być wykonywane zupełnie mechanicznie. Dopiero wtedy, gdy po przeprowadzeniu rachunków otrzymamy twierdzenie gotowe, przychodzi pora zastanowienia się nad treścią tego twierdzenia.

14. Widzieliśmy, że aksyomaty są niezależne od tego, czy sądy, do których się odnoszą, są prawdziwe, czy nie. — Jest to czynnik bardzo ważny dla wartości naszych rozumowań, — możemy być bowiem pewni, że rozumowanie nasze jest prawdziwe, jeśli tylko trzymamy się aksyomatów, nie wchodząc w to, czy premisy są prawdziwe, czy nie. Jedyny wyjątek jest wtedy, jeśli premisami są same aksyomaty. Musimy bowiem domagać się, aby aksyomaty były prawdziwe, jeśli rozumowania nasze mają być prawdziwe [1]).

15. Ażeby zoryentować się w charakterze rachunków logicznych, zapytajmy się, jakiego rodzaju konsekwencye możemy wyprowadzić z powyższych aksyomatów. Jeśli ograniczymy się do rachunku sądów, zobaczymy, że będą to: znane zasady logiki, a więc zasada syllogizmu, zasada wykluczonego środka, zasada sprzeczności, zasada tożsamości. Dodać wypada, że otrzymanie zasady sprzeczności wymaga wiele operacyi logicznych, a zasada tożsamości znajduje się na miejscu o wiele późniejszem. Przeprowadzanie tych dowodów bez symboliki byłoby, jak to już wspomniałem, zadaniem niemal niewykonalnem, ze względu na nadmierną monotonię [2]).

---

[1]) Russell, L'importance philosophique de la logistique R. M. M. 1911 p. 287.

[2]) Zapewne będzie interesującem zobaczyć, w jaki sposób wyprowadza Russell zasadę sprzeczności. Dowód podaję in extenso.

Zasada summacyi jest

$$q \supset r \supset : p \vee q . \supset . p \vee r \quad (1)$$

We wzorze tym kładę $\sim p$ na miejsce p; będzie wtedy

$$q \supset r . \supset : \sim p \vee q . \supset . \sim p \vee r$$

Zaznaczyć wypada, że dowód odnosi się do innego sformułowania zasady sprzeczności, niż to, jakie podaliśmy za Arystotelesem, opiewa ono: iloczyn logiczny dowolnego sądu i jego negacyi jest sądem fałszywym.

Nie trudno zobaczyć, że zasada Arystotelesa jest szczegółowym przypadkiem tej zasady. Przedewszystkiem jednak należy sformułować zasadę Arystotelesa w myśl zasad teoryi typów. Otóż zasada ta opiera się pośrednio na wieloznacznem pojęciu: *wszystkie własności przedmiotu*, które musi być usunięte.

Zamiast *o wszystkich własnościach* musimy mówić *o wszystkich własnościach typu 1-go (predykatach) o wszystkich własnościach typu 2-go, 3-go* i t. d. Opierając się na zasadzie sprowadzalności można sformułować zasadę sprzeczności zastępując pojęcie *wszystkich własności* przedmiotu pojęciem *wszystkich predykatów* tego przedmiotu. Skoro jednak w dalszym ciągu przekonamy się, że zasada sprowadzalności

---

Korzystając z definicyi implikacyi $p \supset q . = . \sim p \vee q$ (2) otrzymam stąd:

$$q \supset r \supset : p \supset q . \supset . p \supset r \text{ (3)}$$

czyli t. z. zasadę syllogizmu. Jeśli tutaj podstawię $p \vee p$ za q a p za r otrzymam:

$$p \vee p . \supset p \supset : p . \supset p \vee p . \supset . p \supset p$$

Otóż, przesłanka tego wniosku jest to zasada tautologii $p \vee p . \supset . p$; mogę zatem poddać assercyi wniosek:

$$p \supset p \vee p . \supset . p \supset p.$$

Przesłanka tego sądu jest zastosowaniem zasady dodawania $q . \supset p . \vee q$, jest zatem prawdziwa. Możemy przeto poddać assercyi sąd $p \supset p$, (4), który Russell nazywa zasadą identyczności, jakkolwiek jest on różny od tego, co się zwykle rozumie przez zasadę tożsamości lub identyczności. Zwróćmy się teraz do zasady permutacyi:

$$p \vee q . \supset . q \vee p$$

i podstawmy $\sim p$ za p, a $\sim q$ za q; będzie $\sim p \vee \sim q . \supset . \sim q \vee \sim p$. Z definicyi implikacyi dostaniemy zatem

$p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$ (5), co jest t. z. zasadą transpozycyi.

Z drugiej strony kładąc p za q w definicyi implikacyi dostaniemy

$$p \supset p . = . \sim p \vee p,$$

skąd wynika: $\sim p \vee p$. (6)

Zwróćmy się teraz do zasady permutacyi i połóżmy $\sim p$ za p a p za q; będzie:

$$\sim p \vee p . \supset . p \vee \sim p.$$

Tutaj przesłanka jest prawdziwa, zatem prawdziwy jest i wniosek $p \vee \sim p$ (7), czyli zasada wykluczonego środka.

Z zasady identyczności i definicyi iloczynu mamy

$$p . q \supset . \sim (\sim p \vee \sim q)$$

Z transpozycyi: $p . q \supset \sim (\sim p \vee \sim q) : \supset : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim (pq)$

Otóż kładąc $\sim p$ za q otrzymamy:

$$\sim p \vee \sim (\sim p) . \supset . \sim (p . \sim p).$$

Tutaj wniosek jest prawdziwy, gdyż założenie jest prawdziwe, jak to wynika z (7).

jest fałszywa, dobrze będzie odrazu spróbować definiować zasadę sprzeczności bez powołania się na zasadę sprowadzalności. Przedewszystkiem zauważyć należy, że wtedy otrzymamy tyle definicyi zasady sprzeczności, ile jest typów logicznych. I tak zasada najniższego typu będzie opiewała:

Jeśli dany przedmiot A jest dowolnego rzędu, to nie istnieje taki predykat, któryby temu przedmiotowi równocześnie przysługiwał i nie przysługiwał [1]).

Zasadę sprzeczności 2-go typu otrzymamy z powyższej zastępując pojęcie predykatu pojęciem funkcyi typu 2-go. W ten sposób otrzymamy kolejno coraz to wyższe typy zasady sprzeczności.

Trudności te można usunąć, jeśli odwołamy się do wieloznacznego sformułowania, bez wprowadzenia zmiennej pozornej, tak jak to robiliśmy z aksyomatami systemu Russella. Wtedy zasada sprzeczności Arystotelesa opiewałaby: *Nie jest prawdą, że przedmiot A posiada własność φ i nie posiada jej,* przyczem φ jest dowolną, albo *nie jest prawdą, że A czyni zadość funkcyi φ i nie czyni jej zadość,* gdzie φ jest dowolna.

W tej formie zasada sprzeczności Arystotelesa okazuje się szczegółowym przypadkiem tej zasady sprzeczności, jaką Russell wyprowadza z swoich aksyomatów [2]).

16. Rachunek sądów Russella nie różni się w zasadzie od dawniejszych rachunków sądów. Aksyomaty są inne, jest ich stosunkowo mniej, — inne są też pojęcia fundamentalne, ale różnice te są czysto zewnętrzne. — Gdyby tedy Russell poprzestał na rachunku sądów, nie moglibyśmy dziełu jego przypisywać większego znaczenia. Rzeczywiście, rachunek sądów wzięty sam w sobie, jakkolwiek posiada niezwykły urok systemu doskonałego, — nie odgrywa w nauce ważniejszej roli, wyprowadza bowiem z wielkim mozołem te twierdzenia które są o wiele nieraz prostsze i jaśniejsze od jego aksyomatów, lub też wprowadza twierdzenia nowe, które poza rachunkiem logicznym nie mają zastosowań. Właściwa siła rachunku sądów leży jednak w tem, że stanowi on naturalną podstawę rachunku funkcyi, ten zaś obejmuje rachunek klas, który posiada olbrzymie znaczenie w matematyce. Rzeczywiście, jeśli można jeszcze dziś dysputować, czy cały rachunek klas da się objąć rachunkiem logicznym, wydaje się niezaprzeczalną ta okoliczność, że wszystkie twierdzenia matematyki mogą być sformułowane przy pomocy pojęć teoryi klas, oraz pojęć, które przy pomocy tychże

---

[1]) $(\varphi) . \sim [\varphi ! A . \sim \varphi ! A]$

[2]) Dodać wypada, że jakkolwiek dowód Russella przeprowadzony jest dla sądów elementarnych, to jednak można przeprowadzić go bez trudności dla sądów innych typów.

mogą być zdefiniowane. — W kwestyę tę, jako stojącą poza zakresem niniejszej pracy bliżej wchodzić nie będziemy.

17. W dotychczas wyłożonej teoryi nie mieszczą się wcale sądy kształtu takiego, jak n. p. *zwycięzca z pod Jeny był cesarzem Francyi.* Podmiotem tego sądu jest *zwycięzca z pod Jeny*, przedmiot, który ani nie jest indywiduum, ani sądem, ani funkcyą propozycyonalną. — Russell wskazuje na to, że *zwycięzca z pod Jeny* nie może być przedmiotem, ale jest to symbol niezupełny, który sam przez się nic nie oznacza, a to z następujących względów. Gdyby *zwycięzca z pod Jeny* był imieniem własnem jakiegoś indywiduum, to jeśli Napoleon będzie innem imieniem własnem, sąd *Napoleon jest zwycięzcą z pod Jeny* byłby zwykłą tożsamością *a jest a*, co jest oczywiście fałszywe. Gdyby *zwycięzca z pod Jeny* oznaczał jakikolwiek inny przedmiot, sąd: *Napoleon jest zwycięzcą z pod Jeny* byłby fałszywy, co oczywiście również nie zachodzi. W tych warunkach musimy przyznać, że sąd dowolny wypowiedziany o *zwycięzcy z pod Jeny* musi dać się przetransformować na sąd odnoszący się do innych przedmiotów. Russell wskazuje na to, że sąd *zwycięzca z pod Jeny był cesarzem Francyi* zawiera w sobie sądy następujące: 1° *Odniesiono zwycięstwo pod Jeną.* 2° *Na nazwę zwycięzcy zasługuje jeden tylko człowiek.* 3° *Ten człowiek był cesarzem Francyi.* Otóż te 3 sądy razem wzięte dają również sąd następujący:

Istnieje takie indywiduum c, że dla każdego x funkcya: x jest zwycięzcą z pod Jeny — jest równoważna funkcyi: x jest identyczne z c, oraz indywiduum c było cesarzem Francyi [1]).

Widzimy, że ten nowy sąd odnosi się jedynie do zbioru indywiduów. Jest widocznem, że metoda powyższa jest ogólna, że więc każde zdanie odnoszące się do przedmiotu nie będącego ani indywiduum, ani sądem, ani funkcyą, można przetransformować na zdanie odnoszące się jedynie do indywiduów, sądów lub funkcyi. Jeśli zdanie dane opiewa *przedmiot, który ma własności takie a takie, jest taki a taki,* to zdanie przetransformowane będzie opiewało:

Istnieje takie c, że funkcya: x ma własności takie a takie, — jest dla wszystkich x równoważna funkcyi: x jest identyczne z c, oraz c jest takie a takie.

W tym ostatnim sądzie *c* może być indywiduum, sądem lub funkcyą określonego typu.

---

[1]) Jeśli $\varphi x = x$ jest zwycięzcą z pod Jeny, to przedmiot niezupełny zwycięzca z pod Jeny oznacza się symbolem: $(\iota x)\,\varphi x$. Każdy sąd $f\,[(\iota x)\,\varphi x]$ o tym symbolu zastępuje Russell sądem:

$$(\exists c) : \varphi x \,.\, \equiv_x .\, x = c : fc$$

Tasama metoda transformacyi odnosi się do sądów o klasach, do których teraz przystępujemy.

17. Z podstawowemi pojęciami teoryi klas zapoznaliśmy się już poprzednio, mówiliśmy bowiem o zbiorach, — a nazwy zbiór i klasa są poprostu synonimami[1]. Była też mowa o tem, że Russell nie uważa klas za przedmioty i redukuje w zasadzie cały rachunek klas do rachunku funkcyi. Russell podnosi słusznie, że uważanie klas za przedmioty pociąga starą objekcyę, że niepodobna przyjąć, że coś jest zarazem wielością i jednością[2]. Rzeczywiście, trudno przyjąć, że n. p. klasa wszystkich Polaków, jest przedmiotem istniejącym oddzielnie poza wszystkimi Polakami.

Przypatrzmy się teraz, w jaki sposób Russell sprowadza pojęcie klasy do pojęcia funkcyi propozycyonalnej. Idea tej redukcyi polega na tem, że nie chodzi wcale o wskazanie, jakiego rodzaju przedmiotem jest klasa, ale o wytłómaczenie, jakie znaczenie posiada sąd o klasie. Otóż jeśli mamy redukować pojęcie klasy do pojęcia funkcyi, nasuwa się z góry przypuszczenie, że sąd o klasie będzie sądem o funkcyi, a funkcya, której zmienna jest klasą, — funkcyą, której zmienna jest funkcyą.

18. Ażeby roztrzygnąć pytanie, jakiego to rodzaju funkcye funkcyi mogą być zastąpione funkcyami klas, zwraca Russell uwagę na dwie grupy funkcyi, których zmienna jest funkcyą, a mianowicie na funkcye, które nazywa ekstensyonalnemi i funkcye pozostałe, które nazywa intensyonalnemi. Zwróćmy uwagę na sąd: *wszyscy ludzie są śmiertelni*, albo innemi słowami: *jest zawsze prawdą, że jeśli x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny*. Jeśli w sądzie tym funkcyę *x jest człowiekiem*, zastąpimy symbolem zmiennym φx, przedstawiającym jakąkolwiek funkcyę tego samego typu, otrzymamy funkcyę funkcyi: *jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny*. Kładąc tutaj na miejscu φx różne funkcye, objęte zakresem tego symbolu, będziemy otrzymywali sądy prawdziwe lub fałszywe. Zauważyć przytem wypada, że sąd prawdziwy otrzymamy kładąc na miejscu φx jakąkolwiek funkcyę równoważną funkcyi *x jest człowiekiem n. p.* fukcyę: *x jest bezpiórym dwunogiem*, — nie otrzymamy zaś sądu prawdziwego w razie przeciwnym. — Wynika stąd, że prawda lub fałsz sądu otrzymanego nie zależy wcale od kształtu poszczególnej funkcyi, ale jedynie od tego, czy jest ona równoważną pewnej funkcyi, czy nie. — Jeśli teraz zważymy, że dwie funkcye są

[1] Można, jak to czyni Russell, używać wyrazu *zbiór* w znaczeniu intuicyjnem, rezerwując wyraz *klasa*, dla pojęcia ściśle sprecyzowanego.

[2] Principia p. 75.

równoważne, jeśli te same wartości argumentu obracają je równocześnie w sądy prawdziwe, lub fałszywe, albo, innemi słowami, wtedy, gdy zbiór przedmiotów obracających funkcyę w sąd prawdziwy jest dla obu funkcyi tensam, dojdziemy łatwo do przekonania, że w sądzie, jaki otrzymujemy, chodzi nie o funkcyę podstawioną, lecz o zbiór przedmiotów czyniących zadość tej funkcyi.

Nie wszystkie jednak sądy posiadają tę własność. Russell podnosi, że n. p. sąd: *Ja mniemam, że jest zawsze prawdą, że jeśli x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny*, — jest sądem zupełnie odmiennej kategoryi. Rzeczywiście, jeśli utworzymy funkcyę: *Ja mniemam, że jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny*, — zobaczymy że na miejscu φx nie możemy kłaść funkcyi równoważnych funkcyi: *x jest człowiekiem*, jeśli chcemy otrzymywać sądy równocześnie prawdziwe lub fałszywe z sądem danym. Tak n. p. sąd: *Ja mniemam, że wszystkie bezpióre dwunogi są śmiertelne*, może być prawdziwy, jakkolwiek sąd: *ja mniemam, że wszyscy ludzie są śmiertelni* będzie fałszywy i naodwrót.

Wynika stąd, że funkcya: *jest zawsze prawdą, że jeśli φx to x jest śmiertelny*, posiada zupełnie odmienny charakter od funkcyi: *ja mniemam, że jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny*. Pierwsza z tych funkcyi jest funkcyą ekstensyonalną, druga intensyonalną. Funkcye ekstensyonalne mają tedy tę własność, że na miejscu zmiennej możemy w nich kłaść dowolne funkcye z sobą równoważne, otrzymując stale sądy równocześnie prawdziwe, lub fałszywe. Funkcye funkcyi pozostałe nazywają się intensyonalnemi.

Widzimy, że w przeciwieństwie do funkcyi ekstensyonalnych, funkcye intensyonalne nie dają żadnej podstawy do wprowadzenia pojęcia klasy. — Russellowi udało się jednak wykazać, że do każdej funkcyi zarówno ekstensyonalnej jak i intensyonalnej należy pewna funkcya pochodna, która jest w każdym razie ekstensyonalna.

19. Ażeby teraz objaśnić pojęcie funkcyi pochodnej, skontruujemy ją naprzód dla tych funkcyi, któremi zajmowaliśmy się w paragrafie poprzednim. — Dla pierwszej z nich (ekstensyonalnej) funkcya pochodna opiewa: *Istnieje przynajmniej jedna matryca równoważna funkcyi φx, która obraca w sąd prawdziwy funkcyę: jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny*. Dla drugiej buduje się funkcyę pochodną zupełnie taksamo.

Jeśli teraz przypatrzymy się naszej funkcyi pochodnej, przekonamy się, że zmienna φx zachodzi w niej dwa razy, ale tylko na pierwszem miejscu, jako zmienna rzeczywista, na drugiem zaś jako zmienna pozorna. — Wartością tej funkcyi jest n. p. sąd:

Istnieje przynajmniej jedna matryca równoważna funkcyi: x jest *człowiekiem, — która obraca w sąd prawdziwy funkcyę: jest zawsze prawdą, że jeśli ψx, to x jest śmiertelny.*

Podkreślam, że w tym ostatnim przykładzie mamy nie funkcyę, ale sąd, gdyż wszystkie zmienne są tu zmiennemi pozornemi.

Widzimy, że o ile funkcyę: *x jest człowiekiem*, można uważać za równoważną przynajmniej jednej matrycy, nasza funkcya pochodna jest równoważna danej funkcyi.

Mogłoby się wydawać, że zmienna ψx musi być ograniczona do matryc, skoro sąd o tej zmiennej może być wypowiedziany zarazem o matrycy. Niewątpliwie tak jest, o ile sąd nie opiera się na pojęciach wieloznacznych, takich jak implikacya, prawda i t. p., których sens przystosowuje się do typu przedmiotów, o które chodzi. Ten przypadek zachodzi właśnie w naszym przykładzie. Jeśli zmienna ψx ma być zamieniona na zmienną pozorną, to oczywiście musi być ograniczona do jednego typu, tak więc n. p. w funkcyach pochodnych, gdzie ψx występuje raz jako zmienna rzeczywista, drugi raz jako zmienna pozorna, — symbol ten przedstawia w pierwszym razie funkcyę dowolnego typu, w drugim razie odnosi się jedynie do matryc. W przykładzie omówionym funkcya dana jest ekstensyonalna.

Jeśli funkcya dana jest intensyonalna, funkcya pochodna nie jest jej w żadnym razie równoważna. Tak n. p. funkcya: *Istnieje przynajmniej jedna matryca równoważna funkcyi φx, która obraca w sąd prawdziwy funkcyę: ja mniemam, że jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny,* — nie jest równoważna funkcyi: *Ja mniemam, że jeśli φx, to x jest śmiertelny,* — jakkolwiek jest pochodną tej funkcyi [1]).

20. Przy pomocy pojęcia funkcyi pochodnej możemy z łatwością zdefiniować, co Russell rozumie przez sąd o klasie. Przez definicyę, sądem o klasie przedmiotów obracających funkcyę daną φx w sąd prawdziwy, — nazywamy wartość jakiejkolwiek funkcyi pochodnej, w której na miejscu zmiennej rzeczywistej położono daną funkcyę φx. Tak więc sąd:

Istnieje matryca równoważna funkcyi: x jest człowiekiem, — która funkcyę: jest zawsze prawdą, że jeśli φx, to x jest śmiertelny, — obraca w sąd prawdziwy,

jest sądem o klasie:

---

[1]) Niech będzie dana funkcya $f(\varphi \hat{x})$, która zmienia się zależnie od typu $\varphi \hat{x}$ tak, że zawsze ma sens. Funkcya pochodna tej funkcyi

$$f(\hat{x}(\varphi x)) = (\exists \psi!) . \psi ! z \equiv_z \varphi z . f(\psi ! z)$$

Jest zawsze prawdą, że jeśli x należy do klasy określonej przez x jest człowiekiem, to x jest śmiertelny.

Widzimy, że jakkolwiek metoda Russella jest sztuczna i może z początku zwłaszcza wydawać się trudną do zrozumienia, — osiąga ona cel swój w zupełności. Russell stara się zbudować sądy, któreby należały w równym stopniu do każdej funkcyi, a były niezależne od tego, do której z kilku funkcyi równoważnych się odnoszą. Sądy takie posiadają niewątpliwie wszystkie zasadnicze cechy sądów o klasach, dlatego więc nazywa je Rusell sądami o klasach. — To, że sądy te nie mogą być sformułowane bez użycia wielu słów, lub symboli, nie może odgrywać roli decydującej.

Widzimy, że koniecznym warunkiem istnienia funkcyi pochodnych w każdym przypadku jest założenie, że istnieje przynajmniej jedna matryca równoważna danej funkcyi. — Wynika stąd, że cała teorya klas Russella jest ściśle oparta na aksyomacie sprowadzalności. Russell zwraca uwagę, że aksyomat ten jest mniej ogólny od aksyomatu istnienia klas, da się bowiem z niego wyprowadzić. Rzeczywiście, jeśli założymy, że do każdej funkcyi zmiennej x należy określona klasa α, będziemy mieli matrycę równoważną danej funkcyi pod postacią funkcyi x jest elementem klasy α.

Z chwilą kiedy raz nadamy znaczenie sądom o klasach, możemy mówić o klasach tak jak o przedmiotach.

21. Russell wykazuje, że jego definicya zachowuje wszystkie zasadnicze własności klas. I tak (1) każda funkcya definiuje klasę — (dzięki aksyomatowi sprowadzalności). (2) Sąd, że dwie klasy są identyczne jest równoważny sądowi, że funkcye definiujące te klasy są sobie równoważne Rzeczywiście, sąd *klasa ludzi jest identyczna z klasą bezpiórych dwunogów* znaczy według przyjętych umów: *Istnieją przynajmniej 2 matryce, pomiędzy sobą identyczne, z których jedna jest równoważna funkcyi: x jest człowiekiem, a druga funkcyi: x jest bezpiórym dwunogiem*[1]. (3) Istnieją klasy klas, przyczem klasa nie może być swym własnym elementem.

Aby objaśnić ten ostatni punkt, zauważmy naprzód, że sąd *a jest elementem klasy wszystkich ludzi* znaczy: *istnieje matryca równoważna funkcyi: x jest człowiekiem, którą a obraca w sąd prawdziwy.* Otóż, jeśli przyjmiemy aksyomat sprowadzalności, zobaczymy z łatwością, że sąd ten jest równoważny sądowi *a jest elementem funkcyi: x jest człowiekiem,*

---

[1]) $\hat{z}(\varphi z) = \hat{z}(\psi z) :. = .: (\exists \chi, \Theta) : \varphi x \equiv_x \chi ! x : \psi x \equiv_x \Theta ! x : \chi ! \hat{z} = \Theta ! \hat{z}$

[2]) $\alpha \varepsilon \hat{z}(\varphi z) = (\exists \psi) \varphi x \equiv_x \psi ! x . \alpha \varepsilon \psi ! \hat{x}$ przyczem

$$\alpha \varepsilon \psi ! \hat{x} = \psi ! \alpha$$

albo, co na jedno wychodzi, sądowi: *a jest człowiekiem.* Widzimy, że jeśli przyjmiemy powyższą definicyę, możemy z łatwością nadać znaczenie sądowi: *klasa Polaków jest elementem klasy klas ludzi.* Sąd ten oznacza: *istnieje matryca której zmienna jest klasą, równoważna funkcyi: a jest klasą ludzi i której elementem jest klasa Polaków.* Podobnie możemy, rzecz jasna, zdefiniować jakikolwiek inny sąd o klasie klas.

Przypatrzmy się, jak wyglądałby sąd *klasa K jest swoim elementem.* — Jeśli przypuścimy, że K jest n. p. klasą ludzi, sąd ten oznacza: *istnieje matryca równoważna funkcyi: x jest człowiekiem,* — *która jest swoim własnym elementem.* Ale powiedzenie takie jest według teoryi typów pozbawione sensu, widzimy więc, że klasy klas nie mogą być swoimi elementami. — Wynika stąd, że klasy zawierające jeden tylko element, nie są z tym elementem identyczne, jak to wynikało z dawnych teoryi klas.

W końcu rozważań o klasach dodać wypada, że sąd: *klasa α jest zawarta w klasie β*, albo krócej: *klasa α jest podklasą β* oznacza: *funkcya x jest elementem klasy α — implikuje: x jest elementem klasy β* [1].

22. Zupełnie analogiczną teoryę rozwija Russell o stosunkach. Stosunki wypływają z funkcyi większej ilości zmiennych. Tak n. p. funkcya *x jest mniejsze od y* ustanawia stosunek pomiędzy parami przedmiotów, czyniących jej zadość. Stosunek ten według Russella jest to klasa par (x, y), dla których funkcya *x jest mniejsze od y* jest prawdziwa [2]. Jeśli tedy mówię *a pozostaje w stosunku R do b*, albo krócej $a\,R\,b$, to właściwie afirmuję dla wartości a na x i b na y, tę funkcyę propozycyonalną dwóch zmiennych, do której należy R [2].

Dla względów praktycznych wprowadza Russell pojęcie *przedmiotu $R`y$, który ma stosunek R do y.* Jest to, jak zawsze u Russella, symbol niezupełny, to znaczy, że nie możemy zdefiniować oddzielnie tego przedmiotu, a jedynie dowolny sąd $f\,(R`y)$ o tym przedmiocie. Otóż wypowiedzieć sąd $f\,(R`y)$, znaczy to twierdzić, że istnieje jeden i tylko jeden przedmiot a taki, że a posiada stosunek R do y, oraz wypowiedzieć sąd $f(a)$. Jeśli więc mówię: *ojciec Napoleona był adwokatem,* to twierdzę: *istnieje jeden i tylko jeden przedmiot a, który spełnia funkcyę: x jest ojcem Napoleona,* — *oraz przedmiot ten a był adwokatem* [3]).

Każdy stosunek R prowadzi do stosunku $\breve{R}$, który Russell na-

---

1) $\alpha \subset \beta : = : x \,\varepsilon\, \alpha \supset_x x \,\varepsilon\, \beta.$

2) $f(R) = f(\hat{x}\hat{y} \,.\, \varphi\,!\,(xy)).$

3) W symbolach:

$$f(R`y) = : (\exists b) : xRy \,.\, \equiv_x x = b : f\,b$$

zywa odwrotnym. Jeśli x ma stosunek R do y, to y ma stosunek $\breve{R}$ do x. Jeśli xRy oznacza *x jest ojcem y* to $x\breve{R}y$ oznacza *x jest dzieckiem y*.

Klasę przedmiotów, które mają stosunek R do danego przedmiotu y, nazywa Russell referentami y, klasę przedmiotów, do których x ma stosunek R, relatami x [1]). Jeśli xRy opiewa: *x jest nauczycielem y*, to klasę referentów Sokratesa tworzą jego nauczyciele a klasę relatów jego uczniowie. Obszarem stosunku R nazywa Russell klasę przedmiotów x, które czynią zadość stosunkowi xRy, gdzie y dowolne; klasę przedmiotów y takich, że xRy, gdzie x dowolne, nazywa Russell obszarem odwrotnym [2]).

Do zrozumienia dalszego ciągu jest potrzebne jeszcze pojęcie klasy wszystkich przedmiotów kształtu $R^{\prime}y$, które należą do danej klasy β [3]).

Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania odpowiedniości wielo-jednoznacznej, na której trzeba się oprzeć, aby wykazać sprzeczność w systemie Russella. Opowiedniość między klasami przedmiotów x i y jest wielo-jednoznaczna, jeśli każdemu x odpowiada jedno i tylko jedno y. Tak, pomiędzy klasą ludzi i dat urodzenia zachodzi stosunek wielo-jednoznaczny, bo każdemu człowiekowi odpowiada jedna i tylko jedna data urodzenia [4]). Naodwrót, klasa dat urodzenia pozostaje w stosunku jedno-wieloznacznym do klasy ludzi [5]). Połączenie obu tych stosunków daje stosunek jedno-jednoznaczny [6]). Klasy pozostające w stosunku jedno-jednoznacznym nazywamy podobnemi. Mają one tę własność, że każdemu elementowi jednej klasy odpowiada jeden i tylko jeden element drugiej klasy i naodwrót, każdemu elementowi drugiej klasy odpowiada jeden i tylko jeden element 1-ej klasy. Przykładem dwóch klas podobnych są klasy: ludzi dojrzałych i głów ludzi dojrzałych, liczb całkowitych i liczb parzystych etc.

---

1) $\overrightarrow{R}{}^{\prime}y = \hat{x}(xRy)$ klasa referentów y
$\overleftarrow{R}{}^{\prime}x = \hat{y}(xRy)$ klasa relatów x
Jest jasne, że $\overrightarrow{R}$ i $\overleftarrow{R}$ są to stosunki.

2) $D = \hat{\alpha}\hat{R}[\alpha = \hat{x}\{(\exists y)\, xRy\}]$ obszar
$C\!\!I = \hat{\beta}\hat{R}[\beta = \hat{y}\{(\exists x)\, xRy\}]$ obszar odwrotny.

3) Klasę tę oznacza Russell symbolem $R^{\prime\prime}\beta$.

4) Stosunek wielo jednoznaczny oznacza Russell symbolem $Cls \rightarrow 1$, którego definicya: $*$ 71·02 $Cls \rightarrow 1 = \hat{R}(\overleftarrow{R}{}^{\prime\prime} D^{\prime}R \subset 1)$ może być napisana:

$$Cls \rightarrow 1 = \hat{R}\ [\hat{x}\{(\exists y) \,.\, y \,\varepsilon\, D^{\prime}R : x = \hat{z}(yRz)\} \subset 1]$$

gdzie $\alpha \subset 1$ oznacza, że klasa α zawiera 1 i tylko 1 element.

5) $R \,\varepsilon\, 1 \rightarrow Cls \,.\supset.\, \hat{y}[E!\, R^{\prime}y] = C\!\!I^{\prime}R$.

6) $1 \rightarrow 1 = (1 \rightarrow Cls) \cap (Cls \rightarrow 1)$, gdzie $\cap$ jest znakiem iloczynu dwóch klas, czyli klasy elementów wspólnych obydwu danym klasom.

Na pojęciu podobieństwa oparł Cantor a za nim Frege i Russell definicyę liczby kardynalnej: Liczba kardynalna jest to klasa wszystkich klas tegosamego typu, które łączy stosunek podobieństwa. Tak więc liczba 1 jest to klasa wszystkich klas zawierających jedno indywiduum n. p. — Widzimy, że liczby kardynalne rozpadają się również na typy [1]).

23. Zwróćmy się teraz do wyjaśnienia paradoksów wymienionych w rozdziale poprzednim, przy pomocy teoryi Russella.

Zwróćmy się naprzód do paradoksu Meinonga: *Kwadratowe koło nie istnieje.*

Według teoryi Russella sąd ten nie odnosi się wcale do żadnego przedmiotu *kwadratowe koło*, ale po przetransformowaniu opiewa: *Nie jest prawdą, że istnieje takie c, że funkcya: x jest kwadratowem kołem — jest równoważna dla wszystkich x funkcyi: x jest identyczne z c.*

W sądzie tym niema wcale mowy o *kwadratowem kole*, ale o elementach tego typu logicznego, który jest zakresem zmiennej x.

W tych warunkach paradoks Meinonga upada, a temsamem upewniamy się, że z teoryi Russella zostały usunięte t. z. przedmioty sprzeczne.

Przechodzimy do pozostałych paradoksów.

1. Paradoks Epimenidesa:

Epimenides mówi, że kłamie. Jeśli Epimenides mówi prawdę, to kłamie twierdząc, że kłamie, — jeśli jednak kłamie rzeczywiście, to mówi prawdę, że kłamie.

Aby paradoks ten wyjaśnić, Russell zwraca uwagę, że sąd: *Epimenides mówi, że kłamie*, jest równoznaczny z sądem: *Istnieje sąd, który Epimenides wypowiada i sąd ten jest fałszywy* [2]). Innemi słowami, Epimenides wypowiada sąd: *Istnieje taka wartość argumentu funkcyi: Epimenides wypowiada sąd p i p jest fałszywy, — która funkcyę tę obraca w sąd prawdziwy.* — W tem sformułowaniu odrazu zobaczyć można, że paradoks wypływa z wieloznaczności powiedzeń: *prawdziwy*, *fałszywy*.

Rzeczywiście, jeśli przypuścimy, że sąd Epimenidesa jest prawdziwy, to sąd ten podstawiony na miejsce argumentu p w funkcyi, *Epimenides wypowiada sąd p i p jest fałszywy*, obróci ją w sąd fałszywy. Tęsamą własność posiadać będzie z konieczności każdy inny sąd, nie będzie bowiem sądem wypowiadanym przez Epimenidesa. — Okaże

---

[1]) $*101 \cdot 1 \vdash . Nc`\alpha = . \hat{\beta}(\beta \,\mathrm{sm}\, \alpha) = \hat{\beta}(\alpha \,\mathrm{sm}\, \beta)$ ; $Nc`\alpha$ = liczba kardynalna klasy α, sm = similis.

[2]) Pr. Mat 65.

się tedy, że nie istnieje taki sąd, któryby funkcyę *Epimenides wypowiada p i p jest fałszywy* obrócił w sąd prawdziwy, jeśli go podstawimy na miejsce p, — a temsamem, że sąd wypowiadany przez Epimenidesa jest fałszywy.

Naodwrót, jeśli założymy, że sąd wypowiadany przez Epimenidesa jest fałszywy, otrzymamy podstawiając go na miejscu argumentu p funkcyi *Epimenides wypowiada p i p jest fałszywy*, sąd prawdziwy, a z tego wynika odrazu, że sąd wypowiadany przez Epimenidesa jest prawdziwy.

Inaczej przedstawi się sprawa, jeśli sprecyzujemy typ sądów, o których mowa i stopień prawdy i fałszu tych sądów. — Funkcya propozycyonalna, o której była mowa, będzie musiała być zastąpiona przez funkcyę: *Epimenides wypowiada sąd p i p jest fałszywy w stopniu n.* — W tym wypadku, na miejscu argumentu p możemy kłaść tylko sądy typu n, nie możemy więc położyć sądu, który wypowiada Epimenides, gdyż w sądzie tym jest pośrednio mowa o wszystkich sądach typu n. Rzeczywiście, jeśli się mówi: *istnieje sąd, który ma te a te własności*, to znaczy, że niektóre sądy danego typu mają te a te własności, czyli że nie jest prawdą, jakoby wszystkie sądy danego typu nie miały tej własności, okazuje się tedy, że sąd, który wypowiada Epimenides, posiada typ wyższy niż n.

2. W paradoksie Grellinga i Nelsona należy rozróżnić różne typy ludzi. Jeśli wszystkich ludzi typu 1-go podzielimy na samobójców i niesamobójców, to człowiek który zabija wszystkich niesamobójców będzie człowiekiem typu 2-go.

3. Paradoks Russella opiera się na pojęciu klas, które nie zawierają siebie jako elementu. Otóż, klasy inne nie istnieją, jak widzieliśmy poprzednio. Klasa wszystkich klas, które nie zawierają siebie jako elementu, byłaby klasą wszystkich klas; ale pojęcie to jest pozbawione sensu, nie możemy bowiem według teoryi typów mówić o wszystkich matrycach.

4. W paradoksie Berry'ego jest mowa o definicyach liczb różnych rzędów. Definicya liczby 11421421 przez podanie cyfr posiada rząd niższy, niż definicya określająca ją jako liczbę najmniejszą z pomiędzy wszystkich liczb, które dadzą się zdefiniować przy pomocy conajmniej 27 zgłosek.

Istnienie tej definicyi nie obala więc prawdziwości twierdzenia, że istnieje liczba najmniejsza z pomiędzy tych, których definicye zawierają co najmniej 27 zgłosek, pod warunkiem, że mówimy o definicyach oznaczonego rzędu, czego wymaga teorya typów.

ROZDZIAŁ IV.

Sprzeczność systemu Russella. Możliwość systemu wolnego od sprzeczności.

1. Postulaty Poincaré'go. — 2. Postulat definicyi przy użyciu skończonej liczby słów. 3. Analityczna definicya pojęcia układu liter. — 4. Nowe sformułowanie 1-go postulatu Poincaré'go. — 5. Wykazanie sprzeczności w systemie Russella. — 6. Fałszywość zasady sprowadzalności. — 7. Konsekwencye odrzucenia zasady sprowadzalności dla teoryi klas; nowa definicya klas. — 8. Definicya identyczności. — 9. Przypadki, w których można wykazać słuszność zasady sprowadzalności. — 10. Niezależność zasady indukcyi zupełnej od zasady sprowadzalności w przypadku łańcuchów prostych. — 11. Konkluzye ogólne o możliwości systemu logiki wolnej od sprzeczności. — 12. Uwagi matafizyczne i historyczne.

1. W artykule p. t. La logique de l'infini [1]) postawił Poincaré następujące postulaty, jakim czynić zadość powinien każdy systemat logiki:

1⁰ Nie rozważać innych przedmiotów, prócz tych, które można zdefiniować zapomocą skończonej ilości słów.

2⁰ Nie tracić nigdy z oczu tej okoliczności, że każdy sąd odnoszący się do nieskończoności musi być przetłumaczeniem, wypowiedzeniem skróconem sądów odnoszących się do skończoności.

3⁰ Unikać klasyfikacyi i definicyi niepredykatywnych[2]).

Postulaty te posiadają znaczenie podstawowe, dlatego też zajmę się nimi bliżej.

Zwróćmy się naprzód do postulatu 3 go. — Dla czytelnika, który już zapoznał się z pojęciem funkcyi predykatywnych, a równocześnie przekonał się, że są one równouprawnione z funkcyami pozostałemi, postulat ten musi się wydać absurdem. Trzeba jednak pamiętać, że Poincaré co innego rozumie przez klasyfikacyę i definicyę niepredykatywną, — niżby powinien, gdyby się trzymał określeń Russella. Poincaré używa tu niewątpliwie wyrazu: *definicya niepredykatywna* w tym samym senie, w jakim posługiwał się nim przed ogłoszeniem teoryi typów, a więc tak, jak to już było omówione w tej pracy. Streszczając rzecz krótko, możemy powiedzieć, że chodzi jedynie o to, żeby unikać wprowadzania funkcyi dwuznacznych, których argumenty nie byłyby dokładnie określone co do typu. Z tego punktu widzenia postulat ten jest poprostu powtórzeniem głównych założeń teoryi typów.

Postulat drugi jest wyrazem psychologistycznego stanowiska autora. Dla nas jest o tyle interesujący, że godząc w aktualną nieskoń-

[1]) R. M. M. 1909.
[2]) l. c. p. 482.

czoność wogóle, obala temsamem Cantorowski szereg liczb pozaskończonych, który niezależnie od tego postulatu odrzucić będziemy zmuszeni.

Podstawowe znaczenie dla dalszych naszych rozważań ma jedynie postulat pierwszy. — Zobaczymy, że postulat ten pozostaje w jaskrawej sprzeczności z teoryą Russella, że więc, o ile zechcemy go przyjąć, będziemy zmuszeni teoryę tę odrzucić.

Ponieważ jednak postulat Poincarégo wydaje się niezwykle prawdopodobnym, a odrzucenie go doprowadzićby musiało do mistycznego poniekąd poglądu na istnienie utworów idealnych, okaże się raczej koniecznem odrzucić teoryę Russella[1]). — Nie wynika stąd jednak bynajmniej, żebyśmy mieli zaprzeczyć tym wszystkim twierdzeniom, które poznaliśmy w poprzednich rozdziałach. Przekonamy się z łatwością, że pogodzenie teoryi Russella z postulatem Poincaré'go nie jest wykluczone, jakkolwiek musiałoby się oprzeć na zasadniczych modyfikacyach niektórych pojęć. Zobaczymy, mianowicie, że wystarczy odrzucić aksyomat sprowadzalności i to wszystko, co jest na nim oparte.

3. Pierwszy postulat Poincarégo można sformułować przy pomocy pojęcia układu liter, o którem już wspomniałem. Aby zdefiniować zupełnie ściśle, co rozumiem przez układ liter, zwrócę się do pojęcia łańcucha prostego, które wprowadza Zermelo[2]).

Przez łańcuch prosty rozumie Zermelo klasę posiadającą następujące własności:

1° Klasa ta posiada jeden wybrany element e_0, który może się nazywać „elementem pierwszym", oraz może posiadać jeden wybrany element e_ω, który może się nazywać „elementem ostatnim". Jest jasne, że może zachodzić stosunek $e_0 = e_\omega$.

2° Podklasa M' łańcucha prostego M nie zawierająca pierwszego elementu e_0 jest podobna do łańcucha M, jeśli z niego usuniemy ostatni element e_ω, o ile ten istnieje.

Element e'_i klasy M' który przy ustawieniu jedno-jednoznacznej odpowiedniości odpowiada elementowi e_i klasy M, nazywa się obrazem tego elementu. Widzimy, że w łańcuchu prostym, każdy element z wyjątkiem pierwszego jest obrazem i do każdego elementu z wyjątkiem ostatniego należy obraz.

3° Łańcuch prosty nie może zawierać części oddzielonych t. j.

---

[1]) Zauważyć wypada, że Russell okazuje się zwolennikiem tego postulatu. (Principia I p. 64). Muszę wyznać, że trudno mi pojąć, dlaczego Russell nie zwrócił uwagi na konsekwencye, jakie z tego postulatu wypływają dla jego systemu.

[2]) Acta math. 32.

takich podklas, żeby każda z nich zawierała wszystkie obrazy swoich elementów.

Przykładem łańcucha prostego zawierającego ostatni element jest n. p. klasa: Kastor i Polluks, w której e_o = Kastor, e_ω = Polluks. Łańcuch prosty zawierający ostatni element nazywamy „skończonym".

Niech teraz będzie R jakikolwiek stosunek niezwrotny, t. j. taki, że jeśli aRb, to nie może zachodzić bRa. — Jeśli w klasie a pomiędzy każdymi dwoma elementami zachodzi taki stosunek, to klasę nazywamy uporządkowaną. — Tak n. p. klasa: Kastor i Polluks jest uporządkowana, o ile położymy e_o = Kastor, e_ω = Polluks, bo wtedy $e_\omega R e_o$ i nie zachodzi $e_o R e_\omega$, jeśli R = „jest obrazem".

Jeśli klasa jest uporządkowana, będziemy mówili, że element a czyniący zadość stosunkowi aRb jest „elementem poprzedzającym" b. Element poprzedzający wszystkie inne nazywać będziemy elementem 1-ym, element nie poprzedzający żadnego elementu pozostałego elementem ostatnim. — Jeśli każda podklasa danej klasy ma element pierwszy, to klasa jest „dobrze uporządkowana". Jeśli każda podklasa danej klasy posiada pierwszy i ostatni element, to klasa jest, podwójnie dobrze uporządkowana.

Opierając się na tych pojęciach możemy zdefiniować pojęcie odcinka danego łańcucha prostego. Przez odcinek $E(a)$ łańcucha prostego M, należący do elementu a, rozumie Zermelo podklasę klasy M podwójnie dobrze uporządkowaną, w której 1° pierwszy element e_o łańcucha M jest pierwszym elementem, 2° ostatni element e_ω łańcucha M jest ostatnim elementem i która posiada 3° tę własność, że każdy jej element e'_i jest w łańcuchu prostym obrazem elementu jej e_i, który ma tę własność, że nie istnieje taki element e_k, któryby poprzedzał e'_i, a był poprzedzany przez e_i. Istnienie takiego elementu e_i jest zapewnione podwójnie dobrem uporządkowaniem klasy $E(a)$.

Jest oczywistem, że każda klasa $E(a)$ jest łańcuchem prostym. — Poniżej udowodnimy, że do każdego elementu a łańcucha prostego należy odcinek $E(a)$, definicye nasze nie zależą jednak od tego twierdzenia.

Wprowadźmy teraz umowę następującą: W układzie liter n. p. [Polo], litera o następująca po p jest innym przedmiotem niż litera o znajdująca się na końcu. Pierwszy z tych przedmiotów oznaczymy symbolem o_2 drugi symbolem o_4. Umowa taka jest nieodzowna, jeśli mamy uwolnić się od pojęć związanych z przestrzenią. — Ogólnie powiemy: Jeśli przyjmiemy określony zbiór liter i znaków pisarskich i jeśli L oznacza którąkolwiek z tych liter a n którąkolwiek z liczb całkowitych, to symbol L_n będziemy uważali za osobny przedmiot[1]), który możemy nazwać: literą ze znaczkiem. — Opierając się na tej umowie możemy układ liter zdefiniować jako: łańcuch prosty, skończony, w którym 1⁰ wszystkie elementy są literami ze znaczkami, 2⁰ każdy element L_n definiuje odcinek $E(L_n)$. 3⁰ Liczba kardynalna odcinka $E(L_n)$ jest n.

Znaczy to, że w tymsamym układzie liter nie mogą znajdować się dwie różne litery z tymsamym znaczkiem i że litera znajdująca się na n-tem miejscu ma jako znaczek liczbę n. Tak n. p. układ liter [Polo] jest to łańcuch prosty złożony z przedmiotów: l_3, o_2, o_4, P_1. Jeśli odstęp między układami liter oznaczymy symbolem $\sqcup$, układ liter [Sokrates jest.człowiekiem] przedstawi się jako łańcuch prosty elementów: $a_5\, c_{15}\, e_7\, e_{11}\, e_{21}\, e_{24}\, i_{20}\, i_{23}\, j_{10}\, k_3\, k_{22}\, \text{ł}_{17}\, m_{25}\, o_2\, o_{18}\, r_4\, s_1\, s_8\, s_{12}\, t_6\, t_{13}\, w_{19}\, z_{16}\, \sqcup_9\, \sqcup_{14}$.

4. Rozważania te, może nieco pedantyczne, potrzebne są do tego, aby odeprzeć ewentualny zarzut, że pojęcie układu liter jest niejasne i że dlatego niema powodu się z niem liczyć.

Zważmy teraz, że nazwy i definicye przedmiotów, które nie są indywiduami[2]), sprowadzają się do funkcyi propozycyonalnych. Mogę bowiem twierdzić, że przedmiot jest zdefiniowany, jeśli istnieje przynajmniej jedna funkcya propozycyonalna mająca tę własność, że obraca się w sąd prawdziwy, jeśli w niej na miejsce x podstawimy ów przedmiot, a w każdym innym wypadku obraca się w sąd fałszywy. Funkcyę taką możemy nazwać funkcyą definiującą.

W tych warunkach, postulat Poincarégo możemy sformułować, jak następuje:

Do każdej funkcyi propozycyonalnej należy przynajmniej jeden układ liter, który przedstawia tę funkcyę propozycyonalną.

W tem sformułowaniu postulat Poincarégo staje się bardzo przejrzystym, nie podobna sobie bowiem wyobrazić funkcyi propozycyonalnej nie wyrażonej skończoną liczbą symbolów.

Dodać wypada, że Schönflies[3]) podniósł szereg zarzutów przeciw postulatowi Poincarégo, które jednak wszystkie polegają na błędach, jak to wykazał sam Poincaré[4]).

5. Możemy teraz przystąpić do wykazania sprzeczności w systemie Russella. Sprzeczność ta streszcza się w następujących dwóch twierdzeniach.

---

[1]) Przedmiot ten jest to klasa, której elementami są litera L i liczba n. Litery uważamy za indywidua.

[2]) Nie można twierdzić, że wszystkie indywidua mają imiona własne.

[3]) Über eine vermeintliche Antinomie der Mengenlehre, Acta Mathematica 32. 1909.

[4]) Réflexions sur les deux notes précédentes ibid.

(1) Klasa układów liter zawiera podklasę, która pozostaje w stosunku wielo-jednoznacznym do klasy klas układów liter, przyczem wszystkie klasy klas układów liter wchodzą w grę — bez wyjątku.

(2) Jeśli zachodzi stosunek wielo-jednoznaczny pomiędzy podklasą klasy A a klasą klas klasy A, to istnieje taka podklasa ϖ w klasie A, która w owym stosunku nie wchodzi w grę.

Twierdzenie 1 jest bezpośrednią konsekwencyą postulatu Poincarégo i zasady sprowadzalności. Rzeczywiście według zasady sprowadzalności do każdej klasy klas układów liter należy przynajmniej jedna matryca, którą sprawdzają elementy tej klasy i tylko one. Według postulatu Poincaré'go do każdej z funkcyi wymienionych należy przynajmniej jeden układ liter, który ją przedstawia. Do każdej klasy klas układów liter należy tedy przynajmniej jeden układ liter, który przedstawia matrycę posiadającą tę własność, że elementy danej klasy klas i tylko one obracają tę funkcyę w sąd prawdziwy. Jest z drugiej strony jasne, że do każdego układu liter powyższej kategoryi należy jedna i tylko jedna klasa klas układów liter. Stosunek jest więc wielo-jednoznaczny i wszystkie klasy klas układów liter wchodzą w grę.

Twierdzenie 2 udowodnił Russell w swoich Principiach.

Dowód ten streszcza się w następującem rozumowaniu. Przypuśćmy, że każdemu elementowi x klasy D będącej podklasą klasy α odpowiada jako obraz jeden i tylko jeden element klasy klas zawartych w α. Niech teraz ϖ będzie podklasą klasy α zawierającą wszystkie te i tylko te elementy, które czynią zadość następującym warunkom: 1° należą do D, 2° nie należą do klas, które są ich obrazami w powyższem podporządkowaniu. Jest rzeczą jasną, że ϖ nie zawiera żadnego elementu tylko w tym wypadku, gdy każdy element D należy do swego obrazu w podporządkowaniu. W tym wypadku jednak dowód twierdzenia jest trywialny, bo n. p. suma obrazów nie jest wcale obrazem i t. d.

W wypadku, gdy klasa ϖ istnieje, łatwo wykazać, że nie może ona być obrazem żadnego z elementów klasy D; — każdy bowiem element klasy ϖ ma tę własność, że nie należy do swego obrazu, ϖ nie może więc być jego obrazem, — a z drugiej strony żaden z elementów D, który nie należy do ϖ nie może nie należeć do swego obrazu, nie może więc klasa ϖ być jego obrazem [1]).

[1]) Podaję tu główne punkty dowodu Russella: Tom II p. 32.

$\vdash R \varepsilon Cl \rightarrow 1 . D{}^{\text{c}}R \subset \alpha . \mathrm{G}{}^{\text{c}}R \subset Cl{}^{\text{c}}\alpha . \supset . \exists ! Cl{}^{\text{c}}\alpha - D{}^{\text{c}}R.$

Dowód: hipoteza i $\varpi = \hat{x}(x \varepsilon D{}^{\text{c}}R . x \sim \varepsilon \breve{R}{}^{\text{c}}x) . \supset :.$

6. Widzimy, że całą sprzecznść pociąga istnienie klasy $\tilde{\omega}$. Otóż zważmy, że funkcya definiująca klasę $\tilde{\omega}$ nie jest wcale matrycą, zawiera bowiem implicite frazes: *jeśli x należy do D, to istnieje jeden jego obraz*, a temsamem zawiera klasy typu klas zawartych w α jako zmienną pozorną. Na to więc, żeby istniała klasa $\tilde{\omega}$ potrzeba innej funkcyi definiującej, a mianowicie funkcyi definiującej, któraby była matrycą. Istnienie takiej funkcyi zapewnia nam zasada sprowadzalności. Odrzucając istnienie takiej funkcyi, musimy temsamem odrzucić zasadę sprowadzalności.

Jeśli tedy paradoks nasz nie ma pozostać, musimy nieodzownie uznać zasadę sprowadzalności za fałszywą.

7. Usunięcie zasady sprowadzalności pociąga dla systemu Russella poważne konsekwencye. Widzimy przedewszystkiem, że jego definicya klasy okazuje się niewystarczająca. Rzeczywiście, bez aksyomatu sprowadzalności możemy przyjąć istnienie klasy tylko pod warunkiem, że podamy matrycę równoważną danej funkcyi definiującej, co nieraz jest niemożliwe. — Zapytajmy się jednak, czy istnienie matrycy jest koniecznym warunkiem otrzymania klasy. Sam Russell przyznaje[1]), że mówił dlatego tylko o matrycach, że chciał ograniczyć się do założeń najprostszych. W gruncie rzeczy chodziło jedynie o zaznaczenie tego faktu, że pojęcie klasy związane jest ściśle z równoważnością dwóch funkcyi. Otóż, jeśli założenie istnienia matrycy, równoważnej danej funkcyi jest niedopuszczalne, to niewątpliwie możemy zawsze założyć, że istnieje funkcya tegosamego typu co dana funkcya i jej równoważna. — Założenie takie nie pociąga obniżenia rzędu funkcyi, nie może więc żadną miarą doprowadzić do paradoksu Richarda, a tem mniej do innych znanych paradoksów. Niewątpliwie, założenie takie jest o wiele skromniejsze, a temsamem prawdopodobniejsze od założenia Russella, przyznaję jednak, że ta jego zaleta nie może być uważana za decydującą.

Spróbujmy więc założyć, że do każdej funkcyi należy funkcya tegosamego typu z nią równoważna.

Przy tem założeniu nie trudno jest podać definicyę klasy zupeł-

---

$$\begin{aligned} x \,\varepsilon\, D\text{‘}R \,.\supset_x : x \,\varepsilon\, \tilde{\omega} \,.\equiv.\, x \sim\varepsilon\, \breve{R}\text{‘}x : \\ \supset_x : \sim (x \,\varepsilon\, \tilde{\omega} \,.\equiv x \,\varepsilon\, \breve{R}\text{‘}x) \\ \supset_x : \tilde{\omega} \neq \breve{R}\text{‘}x \\ \supset .: \tilde{\omega} \sim\varepsilon\, \text{Cl}\text{‘}R \,(1) \end{aligned}$$

hipoteza i (1). $\supset . \tilde{\omega} \subset D\text{‘}R . \supset . \tilde{\omega} \subset \alpha$ (2).

Z tych twierdzeń i definicyi identyczności wynika twierdzenie żądane. Russell nie uwzględnia wypadku, gdy $\tilde{\omega}$ nie zawiera żadnego elementu.

[1]) R. M. M. p. 296.

nie analogiczną do definicyi Russella. Trzeba tylko zawsze mówić o funkcyi tegosamego typu co dana, zamiast o matrycy. Tak n. p. w nowych warunkach sąd: *jest zawsze prawdą, że jeśli x należy do klasy wszystkich ludzi, to x jest śmiertelny*, będzie opiewał:

Istnieje funkcya równoważna funkcyi: x jest człowiekiem — i posiadająca tensam typ, która funkcyę: jest zawsze prawdą, że jeśli ψx, to x jest śmiertelny, obraca w sąd prawdziwy [1]).

Nie da się zaprzeczyć, że powyższa definicya klas zaciera jedną z najbardziej typowych ich własności. Według niej dwie funkcye równoważne różnych typów określają dwie różne klasy, a temsamem przedmioty tegosamego typu mogą należeć do klas różnych typów. — Tak n. p. klasa 3-ech największych poetów polskich musi być uważana za przedmiot różnego typu od klasy: Mickiewicz, Słowacki, Krasiński. W miejsce identyczności dwóch klas musimy wprowadzić pojęcie równoważności dwóch klas, a w ten sposób rachunek klas nie dostarczy nam niemal żadnego uproszczenia w porównaniu z rachunkiem funkcyi. Jest to konsekwencya zarówno przykra jak nieunikniona, która świadczy dobitnie, jak bardzo mylić może odwoływanie się do intuicyi w stosunku do pojęć tak złożonych jak klasa.

Dalszą konsekwencyą powyższej definicyi klasy jest ta, że każda klasa ma podklasy różnych typów, że więc nie możemy mówić o *wszystkich podklasach danej klasy*, podobnie jak nie możemy mówić o *wszystkich własnościach* przedmiotu. Wniosek ten obala oczywiście definitywnie teoryę klas Cantora, która dzisiaj posiada wielu zwolenników, nie mniej jednak wydaje się nieunikniony.

8. Zwróćmy się teraz do problematu definicyi identyczności, do którego Russell przywiązaje szczególniejszą wagę. Zwróciłem już poprzednio uwagę, że trudności połączone z tą definicyą możnaby usunąć przez przyjęcie fundamentalności tego pojęcia. Mniemam jednak, że możnaby zdefiniować identyczność zupełnie poprawnie nie przyjmując zasady sprowadzalności, jeśli się przyjmie pewien nowy aksyomat o wiele mniej ogólny, który nie pociąga znanych parodoksów.

Widzieliśmy, że dwa przedmioty są identyczne, jeśli posiadają wszystkie tesame predykaty. Definicya ta nie rozstrzyga nic o własnościach typów wyższych, po odrzuceniu zasady sprowadzalności, musi być tedy stanowczo uważana za niewystarczającą. Ażeby mogła być

[1]) Założenie powyższe pociąga konieczność wprowadzenia nowego symbolu. Niech będzie $\varphi x T \psi x$ sąd: *φx posiada tensam typ co ψx.* Wtedy nasza definicya będzie.

$$f[\hat{z}(\varphi z)] = (\exists \psi) . \psi z T \varphi z . \psi z \equiv \varphi z . f(\psi \hat{x})$$

Tutaj musimy pamiętać, że zmienna $\varphi \hat{z}$ musi mieć określony typ.

przyjętą, musimy mieć jakiś aksyomat, któryby zapewniał nas, że dwa przedmioty identyczne posiadają tesame własności, także typów wyższych.

Aksyomat ten mógłby być następujący: Jeśli dwa przedmioty posiadają równocześnie dowolną własność typu określonego, to posiadają równocześnie dowolną własność typu bezpośrednio wyższego. Widzimy, że aksyomat ten zawiera bardzo skromne założenie i nie pozwala na żadne uogólnienia, nie możemy bowiem wygłaszać sądów o wszystkich typach, a tem mniej stosować do nich rozumowania indukcyjnego, w praktyce jednak jest zupełnie wystarczający.

9. Powyższe rozważania pouczają dostatecznie, z jakiemi trudnościami będzie miała do czynienia logika po odrzuceniu zasady sprowadzalności. W jakim zakresie trudności te dadzą się pokonać i co zostanie z systemu Russella trudno z góry szczegółowo powiedzieć. Jest jednak pewnem, że odrzucenie zasady sprowadzalności nie obala systemu Russella w zasadzie. Tak np. rachunek sądów, oraz rachunek funkcyi pozostaje bez najmniejszej zmiany.

Modyfikacye zaczynają się dopiero tam, gdzie chodzi o wyprowadzenie teoryi klas a w dalszym ciągu całej matematyki. Zwróciłem już uwagę na to, że o zachowaniu teoryi klas Cantorowskiej nie może być mowy. Temsamem odpadnie wielka część twierdzeń objętych systemem Russella. Natomiast zdaje się rzeczą pewną, że ogół twierdzeń matematyki klasycznej nie jest zależny od zasady sprowadzalności. Twierdzenie to wygłaszam oczywiście tylko nawiasowo, ponieważ udowodnienie go wymagałoby rekonstrukcyi całego systemu Russella. Ograniczę się tutaj tylko do pewnej uwagi. Sytuacya, w jakiej się znajdujemy przyjąwszy teoryę typów, a odrzuciwazy zasadę sprowadzalności, znajduje się zupełnie w sferze poglądów Richard'a i Poincaré'go, o których była już mowa poprzednio. Dlatego nie od rzeczy będzie omówić nieco obszerniej metody, jakich Poincaré używał do usunięcia trudności, z jakiemi spotkać się musimy. Poincaré zajmuje się dowodem twierdzenia fundamentalnego algebry, podanym przez Cauchy'ego. Dowód ten streszcza Poincaré w słowach: „Chcę udowodnić, że równanie algebraiczne $F=0$ ma zawsze pierwiastek; w tym celu zwracam uwagę, że $|F|$ jest zawsze dodatnie i posiada przeto granicę niższą lub minimum, że funkcya ciągła osiąga zawsze swoje minimum, a w końcu wykazuję, że $|F|$ nie może mieć innego minimum prócz 0; wnoszę stąd, że istnieje punkt, dla którego $|F|=0$" [1]).

Otóż, Poincaré zwraca uwagę, że pojęcie liczby e, która jest najmniejszą z pomiędzy wartości funkcyi $|F|$ jest zdefiniowane przy po-

---

[1]) Acta math. 32. p. 199.

mocy pojęcia zbioru wartości funkcyi $|F|$. W tych warunkach liczba e powinna być uważana za przedmiot wyższego rzędu niż wszystkie te wartości $|F|$, przy pomocy których ją zdefiniowaliśmy, a temsamem nie mogłaby być uważana za wartość funkcyi $|F|$.

Trudność tę usuwa Poincaré w sposób następujący. Zamiast mówić o wszystkich wartościach funkcyi $|F|$ mówi o jej wartościach w punktach wymiernych (t. j. takich, których współrzędne są wymierne). Przy pomocy zbioru tych wartości definiuje liczbę e. Następnie udowadnia, że e jest wartością funkcyi $|F|$ w punkcie niewymiernym (lub wymiernym) i że $e = O$[1]).

Powyższe przedstawienie różni się od tego, jakiem posługuje się Poincaré, chodziło mi bowiem o nawiązanie do języka teoryi typów, jest jednak zgodne z jego myślą przewodnią. Przypatrzmy się teraz, na czem polega jego doniosłość. Chwila zastanowienia pouczy, że druga definicya liczby e, o ile przypuścimy, że ma sens, posiada rząd niższy niż pierwsza, opiera się bowiem na pojęciu wszystkich wartości w punktach wymiernych, podczas gdy tamta opiera się na pojęciu wszystkich wartości wogóle. Wykazując, że w jednym i w drugim wypadku mamy do czynienia z tąsamą liczbą, pokazał Poincaré, że do funkcyi definiującej liczbę e stosuje się zasada sprowadzalności i to jest zasadniczy punkt jego wywodu.

Wynika stąd, że w pewnych wypadkach możemy korzystać z zasady sprowadzalności, dzięki temu, że możemy udowodnić jej stosowalność do tych wypadków, nigdy jednak dlatego, jakoby ona miała być ogólnie prawdziwą.

Zasadzie tej daje wyraz Poincaré w następujących słowach: „Jeśli rozważamy zbiór E, n. p. liczb rzeczywistych dodatnich, możemy udowodnić, że ten zbiór posiada granicę dolną e; ta granica niższa jest zdefiniowana po zbiorze E i niema petitio principii ponieważ e nie należy naogół do zbioru E. W pewnych przypadkach szczegółowych, może się zdarzyć, że e należy do E. W tych wypadkach niema też petitio principii, bo e nie należy do E na podstawie swej definicyi, ale na podstawie dowodu późniejszego niezależnego zarówno od definicyi zbioru E, jak liczby e".

W regule tej jest mowa o zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich Zauważyć wypada, że z punktu widzenia teoryi typów pojęcie takiego zbioru jest niedopuszczalne. Rzeczywiście widzieliśmy, że funkcye definiujące liczby rzeczywiste mogą mieć różne typy. Według tego muszą i te liczby rozpaść się na typy.

---

[1]) Acta math. 32, p. 199.

Możemy więc mówić o liczbach rzeczywistych typu 1-go, liczbach rzeczywistych typu 2-go, możemy wreszcie mówić o liczbie rzeczywistej typu dowolnego, ale żadną miarą nie możemy mówić o wszystkich liczbach rzeczywistych, spotkamy się bowiem natychmiast z paradoksem Richarda. Jeśli Poincaré pomimo te mówi o zbiorze liczb rzeczywistych, to płynie to z nieco odmiennych pojęć o zbiorze niż te, na których opiera się Russell. Zbiór nieskończony nie jest dla Poincarégo niczem aktualnem; oznacza tylko nieustanną możność tworzenia nowych elementów. W tem znaczeniu możemy rzeczywiście mówić o zbiorze liczb rzeczywistych, musimy jednak wówczas pamiętać, że jest to coś zupełnie odmiennego od klas takich, jakieśmy zdefiniowali poprzednio.

10. Na zakończenie tego szkicu rekonstrukcyi należy powiedzieć słów parę o t. z. indukcyi zupełnej. Indukcya zupełna jest to zasada, według której własność, która należy do 0 oraz do liczby $n+1$ pod warunkiem, że należy do n, należy do wszystkich liczb całkowitych Zasadę tę próbowano udowodnić wielokrotnie, wszystkie jednak znane dowody należy uznać za fałszywe, o ile odrzucimy zasadę sprowadzalności. Bez tej zasady udowodnienie zasady indukcyi wydaje się rzeczą niemożliwą. Natomiast mniemam, że bez trudności można udowodnić zasadę następującą, którą nazwijmy zasadą indukcyi podwójnej.

Zasada ta opiewa: Jeśli pewną własność posiada 0, jeśli z tego że tę własność posiada n wynika, że posiada ją $n+1$ oraz $n-1$, o ile $n \neq o$, to własność tę posiadają wszystkie liczby kardynalne skończone.

Zasadę tę udowodnić można opierając się na metodzie Zermeli[1]), o ile się przyjmie, że klasy skończone należą do wspomnianych już wyżej łańcuchów prostych skończonych. Zauważmy naprzód, że wszystkie definicye, które sformułowaliśmy dla łańcuchów prostych, można zachować także po odrzuceniu zasady sprowadzalności, jeśli tylko wyraz klasa, zastąpi się np. wyrazem klasa predykatywna, t. j. zdefiniowana przez matrycę.

Przystąpmy teraz do udowodnienia pewnych twierdzeń pomocniczych:

Tw. I. Niech będzie M łańcuch prosty i niech M_1 będzie podklasą tego łańcucha zawierającą 1° pierwszy element e_0, 2° obrazy wszystkich swych elementów, 3° wszystkie elementy klasy M, których obrazy należą do M_1. Klasa M_1 jest identyczna z klasą M.

Dowód tego twierdzenia streszcza się w uwadze, że gdyby M_1

---

[1]) Acta math. 32.

nie było identyczne z M, klasa ta zawierałaby dwie podklasy, które stanowiłyby jej części oddzielone.

Tw. II. Niech będzie dana klasa skończona M. Istnieje taki stosunek R określonego typu, według którego klasa ta może być podwójnie dobrze uporządkowana.

Naodwrót, jeśli M może być podwójnie dobrze uporządkowana, to jest skończona.

Twierdzenie to można udowodnić, opierając się na metodzie Zermeli i na twierdzeniu I. Przypuśćmy, że M jest łańcuchem prostym, którego pierwszy element jest e a ostatni u. Udowodnimy, że do każdego elementu a klasy M należy odcinek predykatywny $E(a)$, który, jak to z definicyi odcinka wynika, jest klasą podwójnie dobrze uporządkowaną.

Twierdzenie to jest słuszne, jeśli $a=e$. Jeśli jest słuszne dla a, to jest też słuszne dla jego obrazu a'. Rzeczywiście jeśli do $E(a)$ dołączymy a' jako element ostatni, otrzymamy $E(a')$.

Twierdzenie jest słuszne również dla elementu a'', którego obrazem jest a, jeśli bowiem z $E(a)$ odrzucimy a, klasa pozostała będzie $E(a'')$. Widzimy, że nasze twierdzenie czyni zadość warunkom twierdzenia I, jest więc na jego zasadzie prawdziwe dla każdego elementu M, a tem samem dla jego ostatniego elementu u. Element u definiuje tedy odcinek $E(u)$, który zawiera wszystkie elementy klasy M i jest podwójnie dobrze uporządkowany. Klasa M jest więc podwójnie dobrze uporządkowana.

Naodwrót łatwo udowodnić, że jeśli M jest podwójnie dobrze uporządkowana, to jest łańcuchem prostym [1]).

Dowód tego twierdzenia jest prawie identyczny z dowodem Zermeli. Zakładamy warunki naszego twierdzenia i bierzemy na uwagę dowolną klasę podwójnie dobrze uporządkowaną M. Twierdzenie jest z założenia słuszne dla jej odcinka $E(e)$. Jeśli twierdzenie jest słuszne dla dowolnego odcinka $E(a)$, to jest słuszne z założenia dla odcinków $E(a'')$ i $E(a')$, gdzie a' jest obrazem elementu a, który to element jest znowu obrazem elementu a''. Widzimy, że na podstawie twierdzenia I twierdzenie nasze jest słuszne dla odcinka $E(u)$, gdzie u jest ostatnim elementem w M, a odcinek ten jest identyczny z klasą M.

11. Zapytajmy się teraz, w jakim stosunku stoją nasze rezultaty do postawionego na czele pytania, czy możliwy jest system logiki wolny od sprzeczności. Przekonaliśmy się, że system taki dotychczas

[1]) v. Zermelo l. c. p. 188.

nie istnieje, gdyż najdoskonalszy z wszystkich systemów, system Russella, implikuje sprzeczność. Czyż jednak z tego wynika, że rzeczywiście systemu takiego zbudować nie można? Rzecz jasna, że nie. Przeciwnie, można natychmiast wskazać system aksyomatów, które definiują system logiki posiadający żądaną własność.

Systemem takim jest system aksyomatów Russella z wyjątkiem zasady sprowadzalności.

Rozważania paragrafów 7—10 wskazują, że system ten prowadzi do udowodnienia wielu twierdzeń prawdziwych. Nie wystarczają one co prawda, do określenia dokładnego granic płodności tego systemu. Ażeby na to pytanie odpowiedzieć, potrzebaby pracy o wiele dalej idącej. Potrzebaby ni mniej ni więcej tylko zrekonstruować całe Principia Russella, opuszczając zasadę sprowadzalności. Zadania tego — nie miałem odwagi podjąć się już teraz. Muszę więc ograniczyć się do stwierdzenia, że zadanie to nie jest w każdym razie iluzoryczne, to znaczy, że chociażby może wiele twierdzeń prawdziwych odpadło, zostałby w każdym razie system posiadający naukową wartość.

Mógłby ktoś podnieść, że niema pewności apriorycznej, że ten nowy system nie doprowadziłby do sprzeczności, gdybyśmy rozwinęli dalsze jego konsekwencye. Twierdzenie to byłoby najzupełniej słuszne, jak to już zapowiedziałem na wstępie. Ścieramy się tu jednak z trudnościami natury metafizycznej, które mogą być rozstrzygane jedynie w drodze intuicyjnej. W każdym razie należy zauważyć, że teorya typów bez zasady sprowadzalności ogranicza myśl naszą w stopniu tak wielkim, że oczekiwanie sprzeczności w tych warunkach wydaje mi się rzeczą najzupełniej bezcelową.

Zupełnie analogiczne argumenty przytacza Russell na rzecz swego systemu wyłożonego w Principiach. Pomimo to, jak widzieliśmy, system ten bez większej trudności odsłania tkwiącą w nim sprzeczność.

Czy to nie powinno zachwiać zaufania do każdego wogóle systemu?

Czy te ciągłe łudzenia się uczonych, że sprzeczność już wyrugowana, nie dowodzą najlepiej, że jest to ideał nie dający się osiągnąć? Sądzę, że nie. Jeśli system Russella zawiera sprzeczność, to stało się to jedynie skutkiem wprowadzenia zasady sprowadzalności. Rzeczywiście, aksyomat ten pozwala zastępować funkcye dowolnie wielkich rzędów matrycami i nie ma w istocie na celu nic innego jak uwolnienie nas od ograniczeń stworzonych przez teoryę typów, przynajmniej w jednym kierunku, nic więc dziwnego, że nastręcza sposobność do powrócenia do dawnego stanu rzeczy. I rzeczywiście sam Russell zwraca na to uwagę, że można przypuścić, że zasada sprowadzalności pociągnie za sobą wszystkie znane parodoksy [1]). Przypuszczenie to usuwa Russell dosyć ogólnikowo, nie rozważając dokładniej paradoksu Richarda i tem chyba należy sobie tłomaczyć, że nie dostrzegł wymienionej sprzeczności.

Argument Russella jest następujący. W paradoksach albo mamy do czynienia z wypowiedzeniami, do których nie odnosi się aksyomat sprowadzalności, t. j. takiemi, które zależą nietylko od prawdy i fałszu wartości funkcyi, jak n. p. *ja kłamię*, lub też zachodzą w nich wyrażenia, które są bez znaczenia nawet po wprowadzeniu aksyomatu sprowadzalności [2]). Otóż, to ostatnie zdanie okazało się fałszywem, widzieliśmy bowiem, że wyrażeniu *definicya* można nadać znaczenie w ten sposób, że będzie ono w zupełności zależne od zasady sprowadzalności.

12. Trudności tkwiące w idei systemu doskonałego logiki dodają otuchy przeciwnikom zasady sprzeczności, którzy radziby stąd wnosić, że hipoteza jakoby sprzeczność była nieuchronnie związana z każdą logiką, jest sądem prawdziwym. Wspomniałem, że hipoteza ta należy do metafizyki, wysuwa się bowiem poza zakres tych twierdzeń, które przy pomocy jakiegokolwiek systemu mogą być udowodnione, tem samem leży poza zakresem niniejszej pracy. Pomimo to, trudno mi powstrzymać się od wyznania wiary, że hipoteza ta jest fałszywa. Wydaje mi się, że argument historyczny przemawia raczej na jej niekorzyść. Jeśli bowiem zważymy, jaka przepaść dzieli teoryę typów od tej sfery myśli, w jakiej był zamknięty Heraklit z Efezu, niepodobna nie dostrzedz, że powstawanie paradoksów w logice było ściśle związane z pomieszaniem elementów wrażeniowych z elementami logicznymi i że wielkie dzieło wyodrębniania czystej myśli szło ściśle w parze z systematyczną eliminacyą sprzeczności z logiki. Mam tu na myśli oczywiście rozwój rzeczywisty, z którym nic wspólnego nie mają dzieła ideologów takich jak Meinong i Husserl. Uczeni ci, jakkolwiek przejęci ideałem czystej logiki, przyczyniają się swemi dywagacyami jedynie do zdepopularyzowania sprawy. Dowodem tego prace psychologistów, którzy nie chcąc, czy nie mogąc poznać faktycznej czystej logiki, ograniczają się do zwycięstw iluzorycznych nad niefortunnymi jej obrońcami [3]).

---

[1]) A. J. XXX p. 242.

[2]) Ibid.

[3]) Porówn. n. p. Jerusalem: Der kritische Idealismus u. seine Logik. Wien und Leipzig 1905.

ROZDZIAŁ V.

Pseudoproblemat logiki bez zasady sprzeczności.

1. Systemy układów liter. — 2. Systemy zdań. — 3. Pojęcie sensu. — 4. System logiki wolny od sprzeczności wraz z balastem zdań pozbawionych sensu. — 5. Résumé i sformułowanie pytań dodatkowych. — 6. Sprawa przedmiotów matematyki.

1. Zwróćmy się teraz do pytania, czy obok systemu idealnego logiki, wolnego od sprzeczności, nie dałoby się utworzyć innego systemu logiki implikującego sprzeczność. Ażeby wyrobić sobie zdanie o tem pytaniu, będzie korzystne uciec się do pewnych pojęć pomocniczych. Widzieliśmy, co należy rozumieć przez układ liter. Przystąpmy teraz do definicyi pojęcia: systemu układów liter.

Zwróćmy się do układu liter:

α = [wolno na miejscu litery położyć inną literę w układzie liter].

Układ ten ma znaczenie dwojakie, naprzód jako układ liter, nadto jednak jako utwór, który przedstawia sąd posiadający określoną treść. Treść tego sądu polega na tem, że definiuje on następującą klasę układów liter, którą oznaczymy literą A.

1^0 Klasa A zawiera układ α.

2^0 Jeśli układ β powstał w ten sposób z układu α lub innego układu x należącego do A, że na tym układzie wykonaliśmy operacye dozwolone treścią sądu, jaki przedstawia α lub ewentualnie inny układ należący do A, to układ β należy do A.

Klasę A nazywać będziemy systemem układów liter należącym do aksyomatu α.

Jest widocznem, że do klasy A należą jeszcze następujące układy liter:

[*Abcde fg hijklłm nopqrs tuwxyza bcde fghijk l łmnopqrs tuwxy*]
[Wolno na miejscu układu położyć dwie litery i powstaje układ] i t. d.

Jeśli zwrócimy uwagę na treść drugiego układu, zobaczymy, że do klasy A należą także takie układy jak [*on*], [*ab*] i t. p.

Pokazuje się, że system A ma wszelkie cechy systemu twórczego, prowadzi bowiem niekiedy do sądów prawdziwych i trudno z góry przewidzieć, jakie jeszcze rezultaty można z niego otrzymać. Z drugiej strony widzimy, że aby otrzymać system układów liter, wystarczy wybrać skończoną ilość układów liter i nazwać je aksyomatami. Przytem jednak nie jest wykluczone, że dany system nie będzie zawierał żadnych innych układów liter prócz aksyomatów.

Pojęcie systemu układów liter wydaje mi się dlatego bardzo ważne, że obejmuje jako *species* pojęcie systemu logiki. Rzeczywiście, aksyomaty systemu logiki możemy uważać za układy liter, a wtedy wszystkie twierdzenia systemu będą się przedstawiały jako układy liter, które z aksyomatów otrzymujemy według zasad systemu układów liter.

2. Gdyby ktoś od systemu logiki wymagał jedynie twórczości, t. j. zdolności wyprowadzania nowych sądów i niezależności od intuicyi, to, jak z uwag poprzedniego paragrafu wynika, nie mógłby uchylić się przed konsekwencyą uznania systemów układów liter za systemy logiki. W szczególności system układów liter zdefiniowany w paragrafie poprzednim byłby systemem logiki. Nikt co prawda dotychczas nie stanął na tem stanowisku, teoretycznie jednak jest to rzecz oczywiście bez znaczenia, można bowiem zawsze przypuścić, że dla kogoś takie właśnie pojęcie systemu logiki będzie jedynie racyonalnem. Nie wdając się w dyskusyę tego punktu zauważę jedynie, że można uczynić następujące odróżnienie. Jeśli mam dany układ liter, to mogę się zapytać, czy litery jego składają się w wyrazy znajdujące się w słowniku (z uwzględnieniem form fleksyjnych), czy też nie. Jest rzeczą jasną, że odróżnienie takie jest pełne znaczenia. Pociąga ono podział systemów układów liter na takie, które zawierają jedynie wyrazy znajdujące się w słowniku (z uwzględnieniem form fleksyjnych) lub też symbole (litery lub układy liter) występujące w ich zastępstwie, oraz systemy pozostałe. Pierwsze możemy nazwać krótko systemami układów wyrazów, drugie systemami mieszanymi. Zostawmy systemy mieszane na boku i zajmijmy się jedynie systemami układów wyrazów. Weźmy dwa następujące układy wyrazów: [Sokrates jest człowiekiem] i [człowiek]. Jest jasne, że systemy, które zawierają jedynie układy typu 1-go, a więc zdania mają zupełnie odmienny charakter od systemów, które zawierają również układy typu 2-go. Tutaj odróżnienie jest jednak trudniejsze, nie jest bowiem tak łatwo podać definicyę zdania. Nie jest to jednak rzeczą niemożliwą. Tak n. p. możemy powiedzieć, że wszystkie układy liter, które zawierają na pierwszem miejscu rzeczownik w nominatywie sing., a na drugiem miejscu czasownik w trzeciej osobie sing., są zdaniami. W ten sposób zdefiniowaliśmy pewną grupę zdań. Grupę tę można z łatwością rozszerzyć, trzymając się oczywiście jedynie reguł gramatycznych. Faktyczne skonstruowanie definicyi zdania wydaje mi się jednak rzeczą zbyteczną dla naszych dalszych rozważań, choć samo w sobie byłoby interesujące. Zauważę tylko, że do stworzenia takiej definicyi byłby przydatny jakikolwiek system ideografii. Przypuśćmy więc, że posiadamy dokładną definicyę zdania, opartą na pojęciach zaczerpniętych oczywiście jedynie z gramatyki. Na podstawie tej definicyi

możemy systemy układów wyrazów podzielić na systemy zdań, oraz systemy pozostałe. W dalszym ciągu zajmiemy się jedynie systemami zdań. —

3. Podobnie, jak poprzednio, musimy stwierdzić, że możnaby się upierać przy tem, że każdy system zdań jest systemem logiki, z drugiej strony jednak należy zaznaczyć, że pomiędzy różnemi zdaniami zachodzą różnice zasadnicze, które mogą stanowić podstawę do klasyfikacyi systemów zdań. Taką klasyfikacyę wprowadza n. p. teorya typów, która oddziela zdania przedstawiające sądy od zdań pozostałych. Odróżnienie to może być oczywiście dokonywane na różne sposoby, czego dowodem jest choćby ten fakt, że teorya typów takie zdania, które zawsze uważano za przedstawiające sądy, odrzuca jako nieposiadające tej własności. Poprowadzenie jakiejkolwiek linii demarkacyjnej tego rodzaju może być uważane za definicyę sensu. W ten sposób dochodzimy do jasnego określenia roli, jaką pojęcie sensu odgrywa w systemach logiki. Pojęcie to odrazu przedstawia nam się jako subjektywne, wiadomo bowiem, że jednemu może wydawać się jasnem, co dla drugiego jest pozbawione sensu, teraz widzimy, że dowolność ta sprowadza się do dowolności w wyborze systemu logiki. Jest rzeczą jasną, że zasada sprzeczności odgrywa z tego punktu widzenia rolę zupełnie przypadkową. Jest to oczywiście jedno z możliwych kryteryów, ale bynajmniej nie jedyne, a nawet trzeba przyznać, że *a priori* nie wyróżnia się ono z pomiędzy innych. Tak n. p. mógłby ktoś zupełnie bezkarnie twierdzić, że tylko sądy, w których przynajmniej raz zachodzi słówko *jest*, posiadają sens. Dla takiego człowieka warunki zdefiniowania systemu logiki byłyby zupełnie odmienne, niż n. p. dla zwolennika teoryi typów. Gdyby udało mu się taki system zbudować, moglibyśmy powiedzieć, że stworzył on nową logikę. W dalszym ciągu będzie korzystne przypuszczać istnienie takiego systemu. Dla skrócenia system ten będziemy nazywali systemem *I*.

4. Po tych uwagach wstępnych możemy teraz przystąpić do zbadania sprawy logiki wolnej od zasady sprzeczności. Jest rzeczą jasną, że z punktu widzenia naszych umów systemów takich jest bardzo wiele, takim systemem jest n. p. nasz system *I*. Nie o takie systemy chodzi jednak przeciwnikom zasady sprzeczności. Uczeni ci zdają się afirmować wszystkie inne wymagania, jakie stawia logice n. p. teorya typów, z wyjątkiem tych, które wynikają z zasady sprzeczności. Ograniczymy się do takich systemów. Za taki system możemy uważać system Russella, oparty na zasadzie sprowadzalności, która, jak widzieliśmy, wyprowadza nas poza granice ustawione przez zasadę sprzeczności. Zapytajmy się, co sądzić o tym systemie. Dzieła Russella dowodzą, że system

ten jest płodny tak bardzo, jak tylko o tem można marzyć i to w znaczeniu ścisłem, dostarcza bowiem ogółu twierdzeń uznanych niezależnie od tego systemu za prawdziwe *a priori*. Obok tych twierdzeń dostarcza jednak system Russella pewnych twierdzeń sprzecznych z pozostałemi. Widzimy, że jeśli ktoś nie uznaje twierdzeń sprzecznych, nie może takiemu systemowi zarzucać nic więcej prócz zbytniego zakresu, t. zn. że w systemie tym znajdują się prócz zdań przedstawiających sądy, zdania, które tej własności nie posiadają. Czyż jednak ten człowiek powie, że system Russella przedstawia nową logikę, nie opartą na zasadzie sprzeczności? Otóż twierdzę, że jeśli w pewnym sensie możnaby to powiedzieć o systemie *I*, to o systemie Russella żadną miarą powiedzieć tego nie można.

Przyczyna tego jest następująca:

Jeśli dany system zawiera prócz sądów zdania pozbawione sensu, to nie możemy oczywiście afirmować twierdzeń tego systemu na ślepo, możemy jednak zawsze przyjąć dodatkowe kryteryum, które nam pozwoli twierdzenia te dzielić na dwie klasy. Jeśli kryteryum to dołączymy jako nowy aksyomat do aksyomatów danego systemu, otrzymamy system nowy, który będzie jego częścią. Jeśli ten nowy system uznamy za obowiązujący, to system pierwszy okaże się nie odmiennym systemem logiki ale systemem logiki obciążonym pewnym balastem, który należy nieustannie z niego eliminować. Takim właśnie systemem zawierającym niepotrzebny balast wydaje mi się system Russella z zasadą sprowadzalności.

5. Na tem kończy się właściwe zadanie niniejszej pracy. Zwróćmy się teraz ponownie do dokonanych rozważań i zapytajmy się, czego z nich mogliśmy się nauczyć. Otóż zasób twierdzeń, jakie zdobyliśmy okazuje się niewielki, a same twierdzenia brzmią zapewne niezbyt imponująco, mamy jednak tę pociechę, że przynajmniej uchronią nas od błędów.

Rezultaty nasze streszczają się w tezach następujących:

1° Niema trudności *a priori*, przyjąć, że da się zbudować system logiki wolny od sprzeczności.

2° To, czy dany system zdań uważać można za system logiki, zależy od intuicyi poszczególnych jednostek.

3° Jeśli system zdań zawiera w sobie jako podklasę system logiki wolny od sprzeczności, możemy zawsze interpretować ten system zdań jako system logiki wolny od sprzeczności, zanieczyszczony balastem zdań pozbawionych sensu.

Widzimy, że w tezach tych uwidocznione są dwa momenty: 1° niezależność prawdy systemu logiki od jego wydatności, 2° wyjątkowa rola zasady sprzeczności w stosunku do systemów logiki. Otóż ten drugi punkt może nasunąć pewne wątpliwości. Można się pytać, czy wogóle jest sens dążyć do systemu logiki wolnego od sprzeczności, albo korzystać z licencyi objętej tezą trzecią. Pytania te nie mogą być oczywiście rozstrzygnięte w formie dowodu, należą bowiem w zupełności do sfery intuicyi, jak to wynika z tezy 2., sądzę jednak, że można na nie dać odpowiedzi, posiadające cechy wielu twierdzeń uznanych za oczywiste. Tą sprawą chciałbym się zająć w paragrafie ostatnim.

6. Zważmy naprzód, że skoro zgodzimy się na to, że żaden system zdań, prowadzący do sprzeczności, nie jest systemem logiki, przyznamy zasadzie sprzeczności wyjątkowe stanowisko. Zasada ta nie będzie już wówczas wyłącznie jednem z twierdzeń udowodnionych w systemie, jak to widzieliśmy poprzednio, ale stanie się czemś o wiele ważniejszem, a mianowicie kryteryum wyróżniającem to, co jest systemem logiki, od tego, co nim nie jest.

Nie będzie to, rzecz jasna, kryteryum w znaczeniu pozytywnem, nie będziemy bowiem uważali za system logiki każdego systemu zdań, który nie zawiera sprzeczności, niemniej jednak będzie to kryteryum bardzo ważne.

Otóż pytania paragrafu poprzedniego można teraz sformułować jak następuje: Jakie mamy powody do uważania zasady sprzeczności za kryteryum systemu logiki? Postawienie tego kryteryum zdaje się, rzeczywiście, nasuwać pewne trudności. Pomijam oczywiście fakt, że niektórzy ludzie mogą rezultaty odnoszące się do przedmiotów sprzecznych uważać za zdobycze naukowe, które przez wprowadzenie zasady sprzeczności raz na zawsze odpadają. Psychologia takich ludzi jest dla mnie zagadką i dlatego nie mogę się zapuszczać w dociekania nad sensem ich twierdzeń. Muszę jednak przyznać, że jeden ich argument ma pozory słuszności. Widzieliśmy mianowicie, że Lipps zaliczył liczby urojone do przedmiotów niemożliwych wraz z kwadratowemi kołami. Otóż, gdyby klasyfikacya taka była uzasadniona, znaczenie zasady sprzeczności jako kryteryum systemów logiki byłoby żadne, gdyż dopuszczałaby ona przedmioty równie iluzoryczne, jak kwadratowe koła. W tych warunkach możnaby zwolennikom tej zasady powiedzieć: albo odrzuć liczby zespolone wraz z kwadratowemi kołami, a wtedy musisz odrzucić zasadę sprzeczności, albo, jeśli wiesz, że w ten sposób okaleczyłbyś naukę, dlaczego stajesz w drodze i dlaczego nie chcesz przyjąć także przedmiotów sprzecznych? — jeśli nie wstrzymuje cię nic innego jak zamiłowanie do zasady sprzeczności, to chyba jest to argument zbyt słaby. Wszystko, co na to można odpowiedzieć, streszcza się w następujących słowach: Liczby zespolone może uważać za przedmioty niemożliwe jedynie człowiek, który milcząco zakłada, że pojęcie liczby pokrywa się z pojęciem liczby rzeczywistej. Otóż, założenie takie jest zupełnie dowolne i niema poważnych argumentów na jego korzyść. Analogicznie możnaby twierdzić, że także ułamki są przedmiotami niemożliwymi, a na tejsamej zasadzie możnaby uznać za przedmioty niemożliwe rownież liczby całkowite, ujemne. I rzeczywiście, z pewnością znajdą się ludzie, którzy nie potrafią wyjść poza pojęcie liczby całkowitej dodatniej a tem mniej będą zdolni do zrozumienia dalszych uogólnień pojęcia liczby. Z drugiej strony fakt, że możemy ustanowić jedno-jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy liczbami zespolonemi, a punktami płaszczyzny, stanowi dostateczną podstawę do intuicyjnego przeświadczenia się o możliwości liczb zespolonych. Historya matematyki poucza dostatecznie, że intuicya rozwija się śladem rezultatów czystej myśli. Wiadomo, że geometrya Bolyai'a i Łobaczewskiego okazała się równie dostępna dla intuicyi, jak geometrya Euklidesa, z chwilą, kiedy strona logiczna została dostatecznie opracowana. Przeciwnicy zasady sprzeczności mogliby stąd wyciągnąć wniosek, że z czasem dojdziemy do intuicyjnego zrozumienia przedmiotów sprzecznych. Wniosku tego nie wyprowadzają oni jednak, gdyż sami nazywają przedmioty sprzeczne niemożliwymi.

W rezultacie widzimy, że istnieją poważne, czysto intuicyjne powody, dla których zasada sprzeczności posiada wyjątkową rolę w naukach aprioryczych, czyli krótko mówiąc w matematyce, jeśli wyrazu tego użyjemy tak, jak go używa Russell. Powody te nie wystarczają i wystarczyć nie mogą do udowodnienia, że jest tak a nie inaczej, a przez to właśnie jest zasada sprzeczności tem ważniejszą. Gdybyśmy posiadali intuicyjne bezwzględne kryterya odróżniające nonsens od sensu, zasada sprzeczności służyłaby tylko do prostego opisania danych intuicyjnych. W rzeczywistości zasada ta stanowi kryteryum przychodzące w pomoc intuicyi tam, gdzie dla nadmiernego skomplikowania zagadnienia zachodzi tego potrzeba.

Kryteryum to pozwala wykluczyć z matematyki wszelką dwuznaczność, a dopuszcza jedynie utwory, które po pewnej wprawie także intuicyjnie mogą być zrozumiane. Dodać należy, że definitywne postawienie zasady sprzeczności jako kryteryum istnienia w matematyce zawdzięczamy Poincaré'mu, który powiedział: w matematyce wyraz istnieć może mieć tylko jedno znaczenie, znaczy on być wolnym od sprzeczności [1]). Jest rzeczą nieomal zbyteczną dodawać, że wyraz *istnieć* jest tu użyty w sensie ogólniejszym, niż u Lippsa, gdyż n. p. liczby

[1]) R. M. M. 1905 p. 815.

zespolone, które, jak widzieliśmy, nie *istnieją*, a nawet są niemożliwe według Lippsa, — *istnieją* na równi z innymi przedmiotami matematyki według Poincaré'go, a przedmioty sprzeczne nie *istnieją* zarówno u Poincaré'go, jak u Lippsa i innych zwolenników sprzeczności.

Zasada sprzeczności jest więc kryteryum nieodzownem dla matematyków. Nie należy stąd wnosić, że przyjmuje się ją dla praktycznego celu wyprowadzenia tylu a tylu twierdzeń, tosamo możnaby osięgnąć i bez niej. Znaczenie jej polega na tem, że ona jedynie prowadzi do rezultatów zgodnych w wszystkich punktach z intuicyą. Dlatego też pozostanie na zawsze: πασῶν βεβαιοτάτη τῶν ἀρχῶν.
