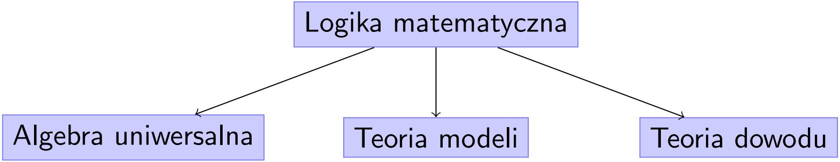
Wstęp do logiki

wykład 1

4 października 2022

Historia

- Tradycyjnie: logika to nauka o poprawności rozumowań. Rozumowania są wyrażane w zdaniach oznajmujących. Czyli nie w pytaniach, rozkazach, poleceniach i ... różnych innych tam takich.
- Arystoteles – sylogistyka. Stoicy – logika zdań.
- Do końca XIX w. tylko sylogistyka.
- Od końca XIX w. rozkwit logiki matematycznej/symbolicznej: De Morgan, Boole, Schröder, Peirce.
- XX w. Russell & Whitehead, Chwistek, Leśniewski, Szkoła Lwowsko-Warszawska, Tarski, Gödel, Turing, Church, Kleene, Lambek, Mostowski, Grzegorczyk, ...



Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Różne pojęcia okołologiczne

- Język przedmiotowy (o jakiejś dziedzinie przedmiotowej) – metajęzyk (język o języku).
  - $2 \times 2 = 5$ – zdanie z języka przedmiotowego (arytmetyki).
  - "$2 \times 2 = 5$" jest zdaniem arytmetyki – zdanie z metajęzyka.
- Zdanie w sensie logiki to takie zdanie, które może być prawdziwe bądź fałszywe.
  - Rozkazy, pytania, wyrazy emocji, ... nie są zdaniami w sense logiki.
  - Nie będziemy wchodzić w filozoficzne rozważania dotyczące rozróżnień na zdania, sądy, treści i inne tam takie.
- Dwie wartości logiczne; prawda i fałsz. Symbolicznie, 1 – prawda, 0 – fałsz.
- Funktor to (z grubsza) każdy fragment zdania w sensie logiki, który nie jest sam zdaniem, ani nie jest nazwą.
- Funktor to takie wyrażenie, które tworzy wyrażenia z innych wyrażeń.

Funktory

- Na przykład, "siedzi" jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument "Jan" tworzy zdanie "Jan siedzi".
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: "i", "lub", "jeżeli ... to", "nieprawda, że". Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): "ponieważ", "zanim", "możliwe, że", "konieczne, że". Logiki nieklasyczne.

Funktory

- Na przykład, "siedzi" jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument "Jan" tworzy zdanie "Jan siedzi".
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: "i", "lub", "jeżeli ... to", "nieprawda, że". Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): "ponieważ", "zanim", "możliwe, że", "konieczne, że". Logiki nieklasyczne.

Funktory

- Na przykład, “siedzi” jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument “Jan” tworzy zdanie “Jan siedzi”.
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: “i”, “lub”, “jeżeli ... to”, “nieprawda, że”. Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): “ponieważ”, “zanim”, “możliwe, że”, “konieczne, że”. Logiki nieklasyczne.

Funktory

- Na przykład, “siedzi” jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument “Jan” tworzy zdanie “Jan siedzi”.
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: “i”, “lub”, “jeżeli ... to”, “nieprawda, że”. Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): “ponieważ”, “zanim”, “możliwe, że”, “konieczne, że”. Logiki nieklasyczne.

Funktory

- Na przykład, “siedzi” jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument “Jan” tworzy zdanie “Jan siedzi”.
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: “i”, “lub”, “jeżeli ... to”, “nieprawda, że”. Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): “ponieważ”, “zanim”, “możliwe, że”, “konieczne, że”. Logiki nieklasyczne.

Funktory

- Na przykład, “siedzi” jest funktorem tworzącym zdanie z nazwy, bo przyjmując argument “Jan” tworzy zdanie “Jan siedzi”.
- Funktory mogą być nazwotwórcze, zdaniotwórcze i funktorotwórcze i mogą przyjmować argumenty nazwowe, zdaniowe i funktorowe.
- Przykłady ...
- Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych to spójniki.
- Spójnik jest ekstensjonalny jeżeli wartość logiczna (tzn. prawdziwość bądź fałszywość) zdania złożonego za pomocą tego spójnika zależy wyłącznie od wartości zdań składowych.
- Spójniki ekstensjonalne: “i”, “lub”, “jeżeli ... to”, “nieprawda, że”. Logika klasyczna.
- Spójniki nie-ekstensjonalne (czyli intensjonalne): “ponieważ”, “zanim”, “możliwe, że”, “konieczne, że”. Logiki nieklasyczne.

Język klasycznego rachunku zdań

Definicja

Język klasycznego rachunku zdań składa się z trzech grup symboli:

- Przeliczalnie nieskończonego zbioru zmiennych zdaniowych: $p_0, p_1, p_2, \ldots$
- Spójników logicznych: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ (równoważność).
- Nawiasów (,).

Definicja

Wyrażenie to dowolny skończony ciąg symboli języka.

Formuły

Definicja (Formuła)

- Każda zmienna zdaniowa jest formułą.
- Jeżeli α i β są formułami, to $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, są formułami.
- Nic innego nie jest formułą.

- Zbiór wszystkich formuł oznaczamy Σ.
- Konwencja: w formułach opuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.
- Czyli np. piszemy $p \rightarrow (p \wedge q)$ zamiast $(p \rightarrow (p \wedge q))$

Formalizacja

"Tłumaczenie" zdań języka naturalnego na język formalny.
Np. "Jan śpi i Paweł śpi" zapiszemy jako $p \wedge q$.

Przykłady...

Formuły

Definicja (Formuła)

- Każda zmienna zdaniowa jest formułą.
- Jeżeli α i β są formułami, to $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, są formułami.
- Nic innego nie jest formułą.

- Zbiór wszystkich formuł oznaczamy Σ.
- Konwencja: w formułach opuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.
- Czyli np. piszemy $p \rightarrow (p \wedge q)$ zamiast $(p \rightarrow (p \wedge q))$

Formalizacja

"Tłumaczenie" zdań języka naturalnego na język formalny.
Np. "Jan śpi i Paweł śpi" zapiszemy jako $p \wedge q$.

Przykłady...

Formuły

Definicja (Formuła)

- Każda zmienna zdaniowa jest formułą.
- Jeżeli α i β są formułami, to $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, są formułami.
- Nic innego nie jest formułą.

- Zbiór wszystkich formuł oznaczamy Σ.
- Konwencja: w formułach opuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.
- Czyli np. piszemy $p \rightarrow (p \wedge q)$ zamiast $(p \rightarrow (p \wedge q))$

Formalizacja

"Tłumaczenie" zdań języka naturalnego na język formalny.
Np. "Jan śpi i Paweł śpi" zapiszemy jako $p \wedge q$.

Przykłady...

Wartościowania

Definicja (Wartościowanie)

Wartościowanie to funkcja $v\colon \Sigma \to \{0,1\}$, spełniająca następujące warunki, dla dowolnych formuł α, β:

- $v(\neg\alpha) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 0$
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 1$ and $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \to \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = v(\beta)$

Warunki te wygodnie jest przedstawić w tabelce:

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wartościowania

Definicja (Wartościowanie)

Wartościowanie to funkcja $v \colon \Sigma \to \{0,1\}$, spełniająca następujące warunki, dla dowolnych formuł α, β:

- $v(\neg\alpha) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 0$
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 1$ and $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \vee \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 1$ lub $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \to \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = 0$ lub $v(\beta) = 1$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ wtw gdy $v(\alpha) = v(\beta)$

Warunki te wygodnie jest przedstawić w tabelce:

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wartościowania: dwie obserwacje

Definicja

- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych oznaczamy Var.
- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w formule φ oznaczamy $\mathrm{Var}(\varphi)$.

Obserwacja

Dla dowolnej funkcji $f : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ istnieje dokładnie jedno wartościowanie v_f takie, że $v_f(p) = f(p)$ dla każdej zmiennej $p \in \mathrm{Var}$.

Obserwacja

Dla dowolnego wartościowania v i dowolnej formuły φ wartość $v(\varphi)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości $v(p)$ dla wszystkich $p \in \mathrm{Var}(\varphi)$.

Wartościowania: dwie obserwacje

Definicja

- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych oznaczamy Var.
- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w formule φ oznaczamy $\mathrm{Var}(\varphi)$.

Obserwacja

Dla dowolnej funkcji $f : \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ *istnieje dokładnie jedno wartościowanie* v_f *takie, że* $v_f(p) = f(p)$ *dla każdej zmiennej* $p \in \mathrm{Var}$.

Obserwacja

Dla dowolnego wartościowania v *i dowolnej formuły* φ *wartość* $v(\varphi)$ *jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości* $v(p)$ *dla wszystkich* $p \in \mathrm{Var}(\varphi)$.

Wartościowania: dwie obserwacje

Definicja

- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych oznaczamy Var.
- Zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych występujących w formule φ oznaczamy $\mathrm{Var}(\varphi)$.

Obserwacja

Dla dowolnej funkcji $f : \mathrm{Var} \to \{0,1\}$ istnieje dokładnie jedno wartościowanie v_f takie, że $v_f(p) = f(p)$ dla każdej zmiennej $p \in \mathrm{Var}$.

Obserwacja

Dla dowolnego wartościowania v i dowolnej formuły φ wartość $v(\varphi)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości $v(p)$ dla wszystkich $p \in \mathrm{Var}(\varphi)$.