Wstęp do logiki

wykład 10

13 grudnia 2022

Wynikanie semantyczne

Definicja

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą (w pewnym języku $\mathcal{J}$). Piszemy $\Gamma \models \varphi$ i mówimy, że φ wynika (semantycznie) z Γ wtw gdy dla każdego modelu $\mathcal{M}$ mamy

$$\mathcal{M} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi.$$

Uwaga!!!

$\Gamma \models \varphi$ to *nie jest to samo* co

- dla każdego modelu $\mathcal{M}$ $[\forall v\, (\mathcal{M} \models_v \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models_v \varphi)]$.

$\Gamma \models \varphi$ to *jest to samo* co

- dla każdego modelu $\mathcal{M}$ $[\forall v\, \mathcal{M} \models_v \Gamma \quad \Rightarrow \quad \forall v\, \mathcal{M} \models_v \varphi]$.

Semantyczne twierdzenie o dedukcji

Twierdzenie (o dedukcji – semantyczne)

Dla dowolnego zbioru zdań Γ, oraz zdań φ i ψ:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \varphi \to \psi.$$

Dowód.

- ($\Rightarrow$) Załóżmy, że lewa strona zachodzi i rozważmy model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \models \Gamma$. Jeżeli $\mathcal{M} \not\models \varphi$, to $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ z definicji spełniania. Jeżeli $\mathcal{M} \models \varphi$, to lewa strone daje, że $\mathcal{M} \models \psi$. Zatem $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$.
- ($\Leftarrow$) Załóżmy, że prawa strona zachodzi i rozważmy model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Prawa strona daje, że $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$. Ale $\mathcal{M} \models \varphi$, więc z definicji spełniania $\mathcal{M} \models \psi$. $\square$

Uwaga

Twierdzenie o dedukcji nie zachodzi dla formuł nie będących zdaniami. Np.

$$x = y \models x = z \quad \not\Rightarrow \quad \models (x = y) \to (x = z).$$

Teorie

Definicja

Teoria to dowolny zbiór zdań.

- Teoria T jest spełnialna wtw gdy istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $\mathcal{M} \models T$.
- Teoria T jest zupełna wtw gdy T jest spełnialna i dla każdego zdania φ mamy $T \models \varphi$ lub $T \models \neg\varphi$.

Definicja

Dla dowolnego modelu $\mathcal{M}$, teoria $\mathcal{M}$ to zbiór $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ zdefiniowany następująco: $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi : \varphi$ jest zdaniem i $\mathcal{M} \models \varphi\}$.

Twierdzenie

Dla dowolnego modelu $\mathcal{M}$ teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ jest zupełna.

Dowód.

Natychmiastowy z definicji spełniania i faktu, że φ jest zdaniem. □

Przykład teorii

Weźmy język z jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym $\cdot$ (pisanym miedzy argumentami: $x \cdot y$).

- Niech $T = \{\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\}$.
- Niech φ będzie zdaniem $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$.
- Rozważmy dwa modele $\mathcal{A} = (A; \cdot^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{B} = (B; \cdot^{\mathcal{B}})$ takie, że

$\cdot^{\mathcal{A}}$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot^{\mathcal{B}}$	a	b
a	a	b
b	a	b

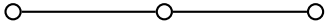
- Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{A} \models T$ oraz $\mathcal{B} \models T$.
- Ale $\mathcal{A} \models \varphi$, a $\mathcal{B} \models \neg\varphi$ (bo $a \cdot^{\mathcal{B}} b = b \neq a = b \cdot^{\mathcal{B}} a$).
- Zatem teoria T nie jest zupełna.
- Teoria T to teoria półgrup.

Inny przykład teorii

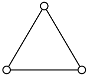
Weźmy język z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym E (pisanym miedzy argumentami: xEy).

- Niech $T = \{\forall x\, \neg(xEx),\ \forall x, y\, (xEy \to yEx)\}$.
- Niech φ będzie zdaniem $\forall x, y, z\, (xEy \& yEz \to xEz)$.
- Rozważmy dwa modele $\mathcal{A} = (A; E^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{B} = (B; E^{\mathcal{B}})$ dane przez grafy narysowane poniżej:

$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$



- Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{A} \models T$ oraz $\mathcal{B} \models T$.
- Równie łatwo sprawdzić, że $\mathcal{A} \models \varphi$, a $\mathcal{B} \models \neg\varphi$
- Zatem teoria T nie jest zupełna.
- Teoria T to teoria grafów.

Kilka logicznie prawdziwych (schematów) formuł

- $\forall x\varphi \to \neg\exists x\neg\varphi$ (prawa De Morgana dla kwantyfikatorów)
- $\exists x\varphi \to \neg\forall x\neg\varphi$
- $\neg\forall x\neg\varphi \to \exists x\varphi$
- $\neg\exists x\neg\varphi \to \forall x\varphi$

- $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ (prawa rozdzielności)
- $\forall x(\varphi \wedge \psi) \to (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$
- $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \wedge \psi)$
- $\exists x(\varphi \vee \psi) \to (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$
- $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

- $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$

Dowody (semantyczne) i kontrmodele

Fakt

$\exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$ *jest prawdą logiczną.*

Dowód.

- Dla dowodu niewprost załóżmy, że jest przeciwnie. Zatem istnieje model $\mathcal{M}$ i wartościowanie v takie, że $\mathcal{M} \not\models_v \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$.
- Z definicji wartościowania mamy więc (i) $\mathcal{M} \models_v \exists x \forall y \varphi$ oraz (ii) $\mathcal{M} \not\models_v \forall y \exists x \varphi$.
- Z (i) dostajemy, że *istnieje* x-wariant v, powiedzmy $w(x) = a$, taki że $\mathcal{M} \models_w \forall y \varphi$. Stąd *dla każdego* y-wariantu w, powiedzmy w', mamy $\mathcal{M} \models_{w'} \varphi$.
- W skróconej notacji: $\exists a \in M \; \forall m \in M : \mathcal{M} \models \varphi(x, y)[a, m]$.
- Z (ii) dostajemy, że *istnieje* y-wariant v, powiedzmy $u(y) = b$, taki że $\mathcal{M} \not\models_u \exists x \varphi$. Zatem *dla każdego* x-wariantu u, powiedzmy u', mamy $\mathcal{M} \not\models_{u'} \varphi$.
- W skróconej notacji: $\exists b \in M \; \forall m' \in M : \mathcal{M} \not\models \varphi(x, y)[m', b]$.
- Weźmy $w'(y) = b$ i $u'(x) = a$. Zauważmy, że wtedy $w' = u'$.
- W skróconej notacji: weźmy $m = b$ i $m' = a$; wtedy $\mathcal{M} \models \varphi(x, y)[a, b]$ i $\mathcal{M} \not\models \varphi(x, y)[a, b]$.
- Zatem $\mathcal{M} \not\models_{u'} \varphi$ a zarazem $\mathcal{M} \models_{u'} \varphi$. Sprzeczność. □

Dowody (semantyczne) i kontrmodele

Fakt

$\forall y \exists x \varphi \rightarrow \exists x \forall y \varphi$ *nie jest prawdą logiczną.*

Dowód.

- Wystarczy znaleźć model, w którym dla pewnej szczególnej formuły φ mamy że $\forall y \exists x \varphi \rightarrow \exists x \forall y \varphi$ nie jest prawdziwa.
- Niech φ będzie formułą $R(x, y)$.
- Rozważmy model $\mathcal{M} = (M; R^{\mathcal{M}})$ gdzie $M = \{a, b\}$ a $R^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a)\}$.
- $\mathcal{M} \models \forall y \exists x\ R(x, y)$, ale $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y\ R(x, y)$. □

Fakt

$(\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ *nie jest prawdą logiczną.*

Dowód.

- Weźmy $P(x)$ za φ, i $R(x)$ za ψ.
- Rozważmy model $\mathcal{M} = (M; R^{\mathcal{M}})$ gdzie $M = \{a, b\}$, $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{b\}$.
- $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x)$, a zatem $\mathcal{M} \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$.
- $\mathcal{M} \not\models \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$. □