Wstęp do logiki

wykład 2

11 października 2022

Relacja wynikania

- Relacja wynikania (konsekwencji). Zachodzi między zbiorem zdań X (przesłanek, założeń) a zdaniem φ (wnioskiem).
- Zapisujemy ją zwykle tak: $X \vdash \varphi$, albo tak: $X \models \varphi$.

Minimalne własności relacji wynikania

$$\varphi \in X \Rightarrow X \vdash \varphi \qquad \text{zwrotność}$$

$$X \subseteq Y,\ X \vdash \varphi \Rightarrow Y \vdash \varphi \qquad \text{monotoniczność}$$

$$X \vdash Y,\ Y \vdash \varphi \Rightarrow X \vdash \varphi \qquad \text{przechodniość}$$

Często dodaje się jeszcze zwartość:

$$X \vdash \varphi \Rightarrow Y \vdash \varphi \text{ dla pewnego skończonego } Y \subseteq X$$

- Logika (system logiczny) to para $(\Sigma, \vdash)$, gdzie S jest zbiorem wszystkich zdań, a $\vdash \subseteq \wp(\Sigma) \times \Sigma$ jest relacją wynikania.

Relacja wynikania

- Relacja wynikania (konsekwencji). Zachodzi między zbiorem zdań X (przesłanek, założeń) a zdaniem φ (wnioskiem).
- Zapisujemy ją zwykle tak: $X \vdash \varphi$, albo tak: $X \models \varphi$.

Minimalne własności relacji wynikania

$$\varphi \in X \Rightarrow X \vdash \varphi \qquad \text{zwrotność}$$

$$X \subseteq Y,\; X \vdash \varphi \Rightarrow Y \vdash \varphi \qquad \text{monotoniczność}$$

$$X \vdash Y,\; Y \vdash \varphi \Rightarrow X \vdash \varphi \qquad \text{przechodniość}$$

Często dodaje się jeszcze zwartość:

$$X \vdash \varphi \Rightarrow Y \vdash \varphi \text{ dla pewnego skończonego } Y \subseteq X$$

- Logika (system logiczny) to para $(\Sigma, \vdash)$, gdzie S jest zbiorem wszystkich zdań, a $\vdash \subseteq \wp(\Sigma) \times \Sigma$ jest relacją wynikania.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Dwie typowe relacje wynikania

- Wynikanie syntaktyczne: $X \vdash \varphi$. Dane przez reguły czyli sposoby dowodzenia.
- $X \vdash \varphi$ jeżeli φ da się udowodnić z założeń X stosując reguły.
- Wynikanie semantyczne: $X \models \varphi$. Dane przez przyporządkowanie wyrażeniom "znaczeń" i "prawdziwości".
- $X \models \varphi$ jeżeli prawdziwość wszystkich zdań z X wymusza prawdziwość zdania φ.
- Każdy typowy system logiczny jest wyposażony w te dwie relacje wynikania.

Porównanie $\vdash$ i $\models$

- $\vdash \subseteq \models$ — wszystko co da się udowodnić jest prawdziwe.
- $\models \subseteq \vdash$ — wszystko co jest prawdziwe da się udowodnić.
- $\vdash = \models$ — środki dowodowe systemu dokładnie odpowiadają jego semantycznym środkom wyrazu. Pełność systemu.

Spełnianie

Definicja

Wartościowanie v spełnia formułę φ wtedy i tylko wtedy gdy $v(\varphi) = 1$.
Wartościowanie v spełnia zbiór formuł Φ wtedy i tylko wtedy gdy v spełnia φ dla każdej formuły $\varphi \in \Phi$.

Definicja

Formuła φ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wartościowanie spełniające φ. Zbiór formuł Φ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wartościowanie spełniające każdą formułę $\varphi \in \Phi$.

Obserwacja

Dla dowolnych zbiorów formuł Φ, Ψ i dowolnego wartościowania v mamy:

- *Jeżeli $\Phi \subseteq \Psi$ i v spełnia Ψ, to v spełnia Φ.*
- *v spełnia $\emptyset$.*

Spełnianie

Definicja

Wartościowanie v spełnia formułę φ wtedy i tylko wtedy gdy $v(\varphi) = 1$.
Wartościowanie v spełnia zbiór formuł Φ wtedy i tylko wtedy gdy v spełnia φ dla każdej formuły $\varphi \in \Phi$.

Definicja

Formuła φ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wartościowanie spełniające φ. Zbiór formuł Φ jest spełnialny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wartościowanie spełniające każdą formułę $\varphi \in \Phi$.

Obserwacja

Dla dowolnych zbiorów formuł Φ, Ψ i dowolnego wartościowania v mamy:

- *Jeżeli $\Phi \subseteq \Psi$ i v spełnia Ψ, to v spełnia Φ.*
- *v spełnia $\varnothing$.*

Relacja wynikania semantycznego

Definicja

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą. Mówimy, że φ wynika (semantycznie) z Γ (piszemy $\Gamma \models \varphi$) wtedy i tylko wtedy gdy każde wartościowanie v spełniające Γ spełnia φ.

Konwencja

Jeżeli $\Phi = \{\varphi_i : i \in I\}$, to $\Gamma \models \Phi$ oznacza, że $\Gamma \models \varphi_i$ dla każdego $i \in I$.

Ćwiczenie

Proszę pokazać, że relacja $\models$ jest zwrotna, monotoniczna i przechodnia.

Obserwacja

Relacja $\models$ jest też zwarta - ale to już nie tak łatwo pokazać. Pokażemy to później, mając twierdzenie o pełności.

Relacja wynikania semantycznego

Definicja

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą. Mówimy, że φ wynika (semantycznie) z Γ (piszemy $\Gamma \models \varphi$) wtedy i tylko wtedy gdy każde wartościowanie v spełniające Γ spełnia φ.

Konwencja

Jeżeli $\Phi = \{\varphi_i : i \in I\}$, to $\Gamma \models \Phi$ oznacza, że $\Gamma \models \varphi_i$ dla każdego $i \in I$.

Ćwiczenie

Proszę pokazać, że relacja $\models$ jest zwrotna, monotoniczna i przechodnia.

Obserwacja

Relacja $\models$ jest też zwarta - ale to już nie tak łatwo pokazać. Pokażemy to później, mając twierdzenie o pełności.

Relacja wynikania semantycznego

Definicja

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą. Mówimy, że φ wynika (semantycznie) z Γ (piszemy $\Gamma \models \varphi$) wtedy i tylko wtedy gdy każde wartościowanie v spełniające Γ spełnia φ.

Konwencja

Jeżeli $\Phi = \{\varphi_i : i \in I\}$, to $\Gamma \models \Phi$ oznacza, że $\Gamma \models \varphi_i$ dla każdego $i \in I$.

Ćwiczenie

Proszę pokazać, że relacja $\models$ jest zwrotna, monotoniczna i przechodnia.

Obserwacja

Relacja $\models$ jest też zwarta - ale to już nie tak łatwo pokazać. Pokażemy to później, mając twierdzenie o pełności.

Tautologie

Definicja

Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy $\varnothing \models \varphi$.

- φ jest tautologią wtw gdy $v(\varphi) = 1$ dla każdego wartościowania v.

Sprawdzanie tautologiczności

Dwie metody badania tautologiczności formuły φ:

1. Metoda wprost
   - Zestawiamy tabelkę wartości dla wszystkich podformuł φ i wszystkich wartościowań.
2. Metoda niewprost
   - Zakładamy, że φ nie jest tautologią i staramy się znaleźć wartościowanie obalające.

Przykłady...

Tautologie

Definicja

Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy $\varnothing \models \varphi$.

- φ jest tautologią wtw gdy $v(\varphi) = 1$ dla każdego wartościowania v.

Sprawdzanie tautologiczności

Dwie metody badania tautologiczności formuły φ:

1. Metoda wprost
   - Zestawiamy tabelkę wartości dla wszystkich podformuł φ i wszystkich wartościowań.
2. Metoda niewprost
   - Zakładamy, że φ nie jest tautologią i staramy się znaleźć wartościowanie obalające.

Przykłady...

Tautologie

Definicja

Formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy $\varnothing \models \varphi$.

- φ jest tautologią wtw gdy $v(\varphi) = 1$ dla każdego wartościowania v.

Sprawdzanie tautologiczności

Dwie metody badania tautologiczności formuły φ:

1. Metoda wprost
   - Zestawiamy tabelkę wartości dla wszystkich podformuł φ i wszystkich wartościowań.
2. Metoda niewprost
   - Zakładamy, że φ nie jest tautologią i staramy się znaleźć wartościowanie obalające.

Przykłady...