

Wstęp do logiki

wykład 3

18 października 2022

Podstawienia wrachunku zdań

Definicja

Podstawienie to dowolna funkcja $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ spełniająca warunki:

- ▶ $\sigma(\neg\alpha) = \neg\sigma(\alpha)$
 - ▶ $\sigma(\alpha \star \beta) = \sigma(\alpha) \star \sigma(\beta)$, gdzie $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
-
- ▶ Podstawiamy dowolne formuły za zmienne, a podstawienie w formule złożonej "obliczamy" używając definicji.
 - ▶ Na przykład, jeżeli $\sigma(p) = p \wedge q$ a $\sigma(q) = p \rightarrow r$, to $\sigma(p \wedge q) = \sigma(p) \wedge \sigma(q) = (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r)$.
 - ▶ Często używamy skrótowego zapisu: $p/\alpha, q/\beta, \dots$, który znaczy: za zmienną p podstaw formułę α , za q podstaw β , itd.
 - ▶ W przykładowej formule powyżej byłoby to: $p/(p \wedge q), q/(p \rightarrow r)$, czyli dla całej formuły $(p \wedge q)[p/(p \wedge q), q/(p \rightarrow r)] = (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r)$.

Podstawienia wrachunku zdań

Definicja

Podstawienie to dowolna funkcja $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ spełniająca warunki:

- ▶ $\sigma(\neg\alpha) = \neg\sigma(\alpha)$
- ▶ $\sigma(\alpha \star \beta) = \sigma(\alpha) \star \sigma(\beta)$, gdzie $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

- ▶ Podstawiamy dowolne formuły za zmienne, a podstawienie w formule złożonej “obliczamy” używając definicji.
- ▶ Na przykład, jeżeli $\sigma(p) = p \wedge q$ a $\sigma(q) = p \rightarrow r$, to $\sigma(p \wedge q) = \sigma(p) \wedge \sigma(q) = (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r)$.
- ▶ Często używamy skrótowego zapisu: $p/\alpha, q/\beta, \dots$, który znaczy: za zmienną p podstaw formułę α , za q podstaw β , itd.
- ▶ W przykładowej formule powyżej byłoby to: $p/(p \wedge q), q/(p \rightarrow r)$, czyli dla całej formuły $(p \wedge q)[p/(p \wedge q), q/(p \rightarrow r)] = (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow r)$.

Podstawienia i wartościowania

Lemat

Niech $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ będzie podstawieniem; niech $v : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ będzie wartościowaniem. Funkcja $v' : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ dana przez $v'(\varphi) = v(\sigma(\varphi))$, dla każdej formuły φ , też jest wartościowaniem.

Dowód.

- ▶ Szkic dowodu. Indukcja ze względu na złożoność φ .
- ▶ Musimy pokazać, że v' spełnia "tabelkowe" warunki.
- ▶ Niech φ będzie postaci $\alpha \star \beta$, gdzie $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$. Mamy
$$v'(\alpha \star \beta) \stackrel{(\text{def. } v')}{=} v(\sigma(\alpha \star \beta)) \stackrel{(\sigma \text{ jest podst.})}{=} v(\sigma(\alpha) \star \sigma(\beta)) \stackrel{(\text{tabelka})}{=} v(\sigma(\alpha)) \star v(\sigma(\beta)) \stackrel{(\text{def. } v')}{=} v'(\alpha) \star v'(\beta).$$
- ▶ Dla negacji podobnie: $v'(\neg\alpha) = v(\sigma(\neg\alpha)) = v(\neg\sigma(\alpha)) = \neg v(\sigma(\alpha)) = \neg v'(\alpha)$.

□

Wniosek (Podstawienia tautologii są tautologiami)

Niech $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ będzie podstawieniem. Jeżeli formuła φ jest tautologią, to $\sigma(\varphi)$ też jest tautologią.

Podstawienia a schematy

Uwaga

W rachunku zdań wszystko co można osiągnąć za pomocą podstawień, można też osiągnąć używając *schematów* formuł.

- ▶ Schemat formuły to (nieformalnie) *formuła zapisana w metajęzyku, w której zmiennymi są greckie litery $\alpha, \beta, \gamma, \dots$*

Konwencja

- ▶ Dla wygody notacyjnej będziemy raczej unikać zapisu podstawieniowego, używając w zamian schematów formuł.
- ▶ Czyli zamiast: *Dla każdego podstawienia formuły $p \rightarrow q$* będziemy raczej pisać: *Dla każdej formuły $\alpha \rightarrow \beta$* .

Reguły wnioskowania

Definicja

Reguła to dowolny zbiór par (Φ, α) gdzie Φ jest skończonym zbiorem formuł a α formułą. Zbiór Φ nazywamy zbiorem **przesłanek**, a formułę α nazywamy **wnioskiem**.

Definicja

Reguła R jest **elementarna** wtedy i tylko wtedy gdy istnieje para (Φ, α) taka, że każda para $(\Psi, \beta) \in R$ jest postaci $(\sigma(\Phi), \sigma(\alpha))$ dla pewnego podstawienia σ .

Obserwacja

Każdą regułę elementarną można zapisać jako schemat postaci

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są schematami przesłanek a β jest schematem wniosku.

Reguły wnioskowania

Definicja

Reguła to dowolny zbiór par (Φ, α) gdzie Φ jest skończonym zbiorem formuł a α formułą. Zbiór Φ nazywamy zbiorem **przesłanek**, a formułę α nazywamy **wnioskiem**.

Definicja

Reguła R jest **elementarna** wtedy i tylko wtedy gdy istnieje para (Φ, α) taka, że każda para $(\Psi, \beta) \in R$ jest postaci $(\sigma(\Phi), \sigma(\alpha))$ dla pewnego podstawienia σ .

Obserwacja

Każdą regułę elementarną można zapisać jako schemat postaci

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są schematami przesłanek a β jest schematem wniosku.

Reguły normalne

Definicja

Reguła elementarna postaci $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$ jest **normalna** wtedy i tylko wtedy gdy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$.

Tradycyjna terminologia:

- ▶ Jeżeli rozumowanie przebiega zgodnie ze schematem reguły normalnej, to jest *formalnie* poprawne.
- ▶ Jeżeli rozumowanie jest formalnie poprawne i jego przesłanki są prawdziwe, to jest *materialnie* poprawne.

Sprawdzanie normalności reguł

Stosujemy te same metody, których używamy do sprawdzania tautologiczności formuł.

Reguły normalne

Definicja

Reguła elementarna postaci $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$ jest **normalna** wtedy i tylko wtedy gdy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$.

Tradycyjna terminologia:

- ▶ Jeżeli rozumowanie przebiega zgodnie ze schematem reguły normalnej, to jest *formalnie* poprawne.
- ▶ Jeżeli rozumowanie jest formalnie poprawne i jego przesłanki są prawdziwe, to jest *materialnie* poprawne.

Sprawdzanie normalności reguł

Stosujemy te same metody, których używamy do sprawdzania tautologiczności formuł.

Twierdzenie o dedukcji dla \models

Twierdzenie (o dedukcji dla \models)

Dla dowolnego zbioru formuł Γ i dowolnych formuł α, β mamy, że

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta \Leftrightarrow \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$$

Dowód.

(\Rightarrow) Załóżmy, że $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$. Niech v będzie wartościowaniem takim, że $v(\Gamma) = 1$. Jeżeli $v(\alpha) = 0$, to $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$. Jeżeli $v(\alpha) = 1$, to $v(\Gamma \cup \{\alpha\}) = 1$, a więc z założenia $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ dostajemy, że $v(\beta) = 1$, czyli $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ również w tym przypadku. Zatem każde wartościowanie spełniające Γ spełnia $\alpha \rightarrow \beta$.

(\Leftarrow) Załóżmy, że $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$. Niech v będzie wartościowaniem takim, że $v(\Gamma) = 1 = v(\alpha)$. Z założenia $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ dostajemy, że $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, a więc $v(\beta) = 1$. Zatem każde wartościowanie spełniające $\Gamma \cup \{\alpha\}$ spełnia β . □

Wniosek

Reguła $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$ jest normalna wtedy i tylko wtedy gdy formuła $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots)$ jest tautologią.

Dowód.

Musimy pokazać, że $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ wtw gdy $\emptyset \models \alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots)$. Wystarczy zastosować twierdzenie o dedukcji n razy. □