

# Wstęp do logiki

## wykład 4

25 października 2022

# Funktory ekstensjonalne jako funkcje Boole'owskie

- ▶ Przypomnijmy:  $n$ -arny funktor  $F(p_1, \dots, p_n)$  jest ekstensjonalny wtedy i tylko wtedy gdy wartość logiczna  $F(p_1, \dots, p_n)$  zależy wyłącznie od wartości logicznych  $p_1, \dots, p_n$ .
- ▶ Ekstensjonalny funktor  $F$  definiuje funkcję  $f_F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , taką, że  $f_F(v(p_1), \dots, v(p_n)) = v(F(p_1, \dots, p_n))$ .
- ▶ I odwrotnie: każdej funkcji  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  odpowiada jednoznacznie pewien ekstensjonalny funktor  $F_f$ .
- ▶ **Funktory ekstensjonalne i funkcje Boole'owskie są tym samym.**

Ile jest wszystkich  $n$ -arnych funktorów ekstensjonalnych?

Tyle ile jest wszystkich funkcji ze zbioru  $\{0, 1\}^n$  w zbiór  $\{0, 1\}$ , czyli  $2^{2^n}$ .

# Znane spójniki jako funkcje Boole'owskie

Negacja, koniunkcja, alternatywa i implikacja odpowiadają funkcjom  $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  danym odpowiednio przez:

	$f_{\neg}$	$f_{\wedge}$	0	1	$f_{\vee}$	0	1	$f_{\rightarrow}$	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1

- ▶ Dostajemy następującą elegancką charakteryzację wartościowania (pisząc funkcje dwuargumentowe między argumentami).

## Obserwacja

*Wartościowanie  $v: \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$  to funkcja taka, że*

- ▶  $v(\neg\alpha) = \neg(v(\alpha))$
- ▶  $v(\alpha \star \beta) = v(\alpha) f_{\star} v(\beta)$ , gdzie  $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

# Równoważność (semantyczna) formuł

## Definicja

Mówimy, że formuły  $\alpha$  i  $\beta$  są równoważne i piszemy  $\alpha \equiv \beta$  wtw gdy  $\alpha \models \beta$  i  $\beta \models \alpha$ .

## Uwaga.

$\alpha \models \beta$  i  $\alpha \equiv \beta$  to *relacje między formułami*;  $\alpha \rightarrow \beta$  i  $\alpha \leftrightarrow \beta$  to *formuły*.

## Obserwacja

- ▶  $\alpha \models \beta$  wtw gdy  $\alpha \rightarrow \beta$  jest tautologią.
- ▶  $\alpha \equiv \beta$  wtw gdy  $\alpha \leftrightarrow \beta$  jest tautologią.

# Zastępowanie formuł równoważnych

## Fakt

Niech  $F(p_1, \dots, p_n)$  będzie funktorem ekstensjonalnym, a  $\alpha_i, \beta_i$  gdzie  $i \in \{1, \dots, n\}$ , niech będą formułami. Jeżeli  $\alpha_i \equiv \beta_i$  dla każdego  $i$ , to  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv F(\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

## Dowód.

- ▶ Załóżmy, że  $\alpha_i \equiv \beta_i$  dla każdego  $i$ . Wtedy  $v(\alpha_i) = v(\beta_i)$  dla dowolnego wartościowania  $v$ .
- ▶ Wartość logiczna  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  zależy wyłącznie od  $v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_n)$ .
- ▶ Zatem  $v(F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f_F(v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_n))$ , gdzie  $f_F$  jest Boole'owską funkcją odpowiadającą funktorowi  $F$ .
- ▶ Ale  $v(\alpha_i) = v(\beta_i)$  dla każdego  $i$ , więc  $f_F(v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_n)) = f_F(v(\beta_1), \dots, v(\beta_n))$ .
- ▶ Czyli  $v(F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f_F(v(\alpha_1), \dots, v(\alpha_n)) = f_F(v(\beta_1), \dots, v(\beta_n)) = v(F(\beta_1, \dots, \beta_n))$ .
- ▶ Ponieważ  $v$  było dowolnie wybrane,  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv F(\beta_1, \dots, \beta_n)$ . □

## Wniosek

*W formułach złożonych można zawsze zastępować podformuły równoważnymi im podformułami.*

# Lista podstawowych równoważności

▶  $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta),$

prawo De Morgana.

▶  $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta),$

prawo De Morgana.

▶  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta).$

▶  $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta).$

▶  $\neg\neg\alpha \equiv \alpha,$

prawo podwójnej negacji.

▶  $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma),$

łączność koniunkcji.

▶  $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma),$

łączność alternatywy.

▶  $(\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha,$

idempotencja koniunkcji.

▶  $(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha,$

idempotencja alternatywy.

▶  $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha),$

przemienność koniunkcji.

▶  $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha),$

przemienność alternatywy.

# Lista podstawowych równoważności

▶  $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)),$

▶  $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)),$

▶  $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \equiv \alpha,$

▶  $(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \equiv \alpha,$

▶  $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha),$

▶  $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)).$

▶ Jeżeli  $\tau$  jest tautologią, to  $(\alpha \wedge \tau) \equiv \alpha.$

▶ Jeżeli  $\kappa$  jest kontrtautologią, to  $(\alpha \vee \kappa) \equiv \alpha.$

▶  $((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \equiv ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)).$

▶  $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)).$

rozdzielność koniunkcji względem alternatywy.

rozdzielność alternatywy względem koniunkcji.

prawo pochłaniania.

prawo pochłaniania.

prawo kontrapozycji.

# Dwie niezwiązane ze sobą uwagi

## Konwencja notacyjna

Ze względu na prawa łączności będziemy opuszczać nawiasy w  $n$ -członowych koniunkcjach i alternatywach. Będziemy więc pisać  $p \vee q \vee r$  zamiast formalnie poprawnych  $(p \vee q) \vee r$  lub  $p \vee (q \vee r)$ .

## Motywacja

Dlaczego wzięliśmy funktory  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  a nie więcej? Dlaczego nie wszystkie? A czy nie można wziąć mniej?

## Przykład: $\leftrightarrow$

Funktor  $\leftrightarrow$  można uważać za zdefiniowany za pomocą implikacji i koniunkcji (i tak będziemy odtąd uważać), ponieważ zachodzi równoważność  $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ .

# Alternatywa elementarna

## Definicja

Niech  $w = (w(1), \dots, w(n)) \in \{0, 1\}^n$ . **Alternatywa elementarna charakterystyczna dla ciągu  $w$**  to formuła  $\delta_w = \alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ , gdzie

$$\alpha_i = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } w(i) = 0 \\ \neg p_i & \text{jeśli } w(i) = 1 \end{cases}$$

## Fakt

*Dla dowolnego wartościowania  $v$  i dowolnego  $i \in \{1, \dots, n\}$  mamy  $v(\alpha_i) = 0$  wtw gdy  $v(p_i) = w(i)$ . A zatem*

$$v(\delta_w) = 0 \Leftrightarrow (v(p_1), \dots, v(p_n)) = w.$$

## Dowód.

$$\begin{aligned} v(\delta_w) = 0 &\Leftrightarrow v(\alpha_i) = 0 \text{ for all } i \\ &\Leftrightarrow v(p_i) = w(i) \text{ for all } i \\ &\Leftrightarrow (v(p_1), \dots, v(p_n)) = w. \end{aligned}$$



# Definiowanie funkcji przez (specjalną) formułę

## Definicja

Niech  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  będzie dowolną funkcją, która nie jest stale równa 1. Niech  $w_1, \dots, w_m$  będą wszystkimi  $n$ -elementowymi ciągami zerojedynkowymi takimi, że  $f(w_i) = 0$ . Definiujemy formułę

$$\varphi_f = \delta_{w_1} \wedge \dots \wedge \delta_{w_m}$$

## Fakt

*Dla dowolnego wartościowania  $v$  mamy  $v(\varphi_f) = f(v(p_1), \dots, v(p_n))$ .*

## Dowód.

Dwa przypadki:

- ▶  $f(v(p_1), \dots, v(p_n)) = 0$ , czyli  $(v(p_1), \dots, v(p_n)) = w_i$  dla pewnego  $i$ . Wtedy  $v(\delta_{w_i}) = 0$ , a więc  $v(\varphi_f) = 0 = f(v(p_1), \dots, v(p_n))$ .
- ▶  $f(v(p_1), \dots, v(p_n)) = 1$ , czyli  $(v(p_1), \dots, v(p_n)) \neq w_i$  dla każdego  $i$ . Wtedy  $v(\delta_{w_i}) = 1$  dla każdego  $i$ , a więc  $v(\varphi_f) = 1 = f(v(p_1), \dots, v(p_n))$ . □

# Koniunkcyjno-alternatywna postać normalna

## Definicja

Formuła  $\varphi$  będąca koniunkcją ( $n$ -członowych) alternatyw elementarnych jest w **koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej (KAPN)**.

## Twierdzenie

Niech  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .

- ▶ Jeżeli  $f$  nie jest stale równa 1, to istnieje formuła  $\varphi_f$  w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej, taka że  $v(\varphi_f) = f(v(p_1, \dots, p_n))$  dla dowolnego wartościowania  $v$ .
- ▶ Jeżeli  $f$  jest stale równa 1, to istnieje formuła  $\varphi_f$  zbudowana za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji taka że  $v(\varphi_f) = f(v(p_1, \dots, p_n))$  dla dowolnego wartościowania  $v$ .

▶ Punkt pierwszy wynika natychmiast z Faktu 3.

▶ Dla  $f$  stale równej 1 możemy wziąć

$\varphi_f = (p_1 \vee \neg p_1) \wedge \dots \wedge (p_n \vee \neg p_n)$ , ale  $p_i \vee \neg p_i$  to **nie są** alternatywy elementarne.

# Koniunkcyjno-alternatywna postać normalna

## Wniosek

- ▶ *Każdy ekstensjonalny funktor  $F$  da się zdefiniować za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji.*
- ▶ *Każda formuła  $\alpha$  jest równoważna pewnej formule  $\varphi_\alpha$  zbudowanej za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji.*
- ▶ *Każda formuła  $\alpha$ , która nie jest tautologią jest równoważna pewnej formule  $\varphi_\alpha$  w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej.*

Znajdowanie KAPN w praktyce, kilka przykładów (zrobić na tablicy):

Formuła	KAPN
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$
$\alpha \vee \beta$	$\alpha \vee \beta$
$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$
$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	$(\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

## Znajdowanie KAPN w praktyce

Dla niektórych formuł łatwo jest znaleźć KAPN stosując standardowe prawa logiczne. Na przykład:

$$\begin{aligned}((p \wedge \neg q) \rightarrow (r \rightarrow q)) &\equiv (\neg(p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow q)) \\ &\equiv (\neg(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee q)) \\ &\equiv ((\neg p \vee \neg \neg q) \vee (\neg r \vee q)) \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee q)) \\ &\equiv ((\neg p \vee q) \vee (q \vee \neg r)) \\ &\equiv (\neg p \vee (q \vee (q \vee \neg r))) \\ &\equiv (\neg p \vee ((q \vee q) \vee \neg r)) \\ &\equiv (\neg p \vee (q \vee \neg r)) \\ \text{konwencja notacyjjna} &= (\neg p \vee q \vee \neg r)\end{aligned}$$

Ale nie zawsze jest tak łatwo. Spróbujemy przekształcić  $p \wedge q$ .

# Alternatywno-koniunkcyjna postać normalna (AKPN)

- ▶ Analogiczna (dualnie) do KAPN.
- ▶ Tworzymy **koniunkcje elementarne** dla  $n$ -elementowych ciągów zerojedynkowych  $w$ , kładąc  $\gamma_w = \kappa_1 \wedge \dots \wedge \kappa_n$ , gdzie
$$\kappa_i = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } w(i) = 1 \\ \neg p_i & \text{jeśli } w(i) = 0 \end{cases}.$$
- ▶ Dla formuły  $f$ , która nie jest stale równa 0 bierzemy alternatywę  $\psi_f = \kappa_{w_1} \vee \dots \vee \kappa_{w_n}$  dla wszystkich  $w_i$  takich, że  $f(w_i) = 1$ .
- ▶ Wtedy dla dowolnego wartościowania  $v$  mamy  $v(\psi_f) = f(v(p_1, \dots, p_n))$ .
- ▶ Dla  $f$  stale równej 0 bierzemy  $\psi_f = (p_1 \wedge \neg p_1) \vee \dots \vee (p_n \wedge \neg p_n)$ .
- ▶ Przykłady...

# Wzajemna definiowalność funktorów

Przypomnijmy następujące równoważności:

- ▶  $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ ,     $(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \rightarrow \beta)$
- ▶  $(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ ,     $(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$

## Wniosek

*Każdy funktor można zdefiniować za pomocą: (i) koniunkcji i negacji, (ii) alternatywy i negacji, (iii) implikacji i negacji.*

- ▶ Zatem można ograniczyć zbiór podstawowych funktorów do (i), (ii) lub (iii) bez straty ogólności.
- ▶ Praktyczne sposoby wzajemnego definiowania – na ćwiczeniach.

# Funkcyjna pełność

## Definicja

Zbiór funktorów  $S$  jest **funkcyjnie pełny** wtw gdy wszystkie funkcjory można zdefiniować za pomocą funktorów ze zbioru  $S$ .

## Wniosek

Zbiory  $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$  i  $\{\neg, \rightarrow\}$  są funkcyjnie pełne.

## Fakt

Zbiory  $\{\neg\}$  i  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  nie są funkcyjnie pełne.

## Szkic dowodu.

Za pomocą negacji można zdefiniować tylko dwa funkcjory jednoargumentowe: negację i asercję. Funktorami ze zbioru  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  nie można zdefiniować negacji. Bo niech  $F(p)$  będzie jakimkolwiek złożeniem funktorów z  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ; wtedy dla  $v(p) = 1$  zawsze mamy  $v(F(p)) = 1$ . □

# Funkcyjna pełność

## Fakt

Niech  $\downarrow$  będzie funktorem binegacji:  $(p \downarrow q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ . Zbiór  $\{\downarrow\}$  jest funkcyjnie pełny.

## Dowód.

Wystarczy pokazać, że da się zdefiniować negację i koniunkcję. Mamy  $\neg p \equiv (p \downarrow p)$  oraz  $(p \wedge q) \equiv ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$ .  $\square$

## Fakt

Niech  $|$  będzie funktorem “co najwyżej jedno z dwojga”:  
 $(p | q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ . Zbiór  $\{| \}$  jest funkcyjnie pełny.

## Dowód.

Wystarczy pokazać, że da się zdefiniować negację i alternatywę. Mamy  $\neg p \equiv (p | p)$  oraz  $(p \vee q) \equiv ((p | p) | (q | q))$ .  $\square$

## Ćwiczenie

Proszę zdefiniować alternatywę za pomocą  $\downarrow$  i koniunkcję za pomocą  $|$ .