

# Wstęp do logiki

## wykład 5

8 listopada 2022

# System aksjomatyczny

Aksjomaty:

$$A1. \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$A2. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$A3. (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$$

$$A4. (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$$

$$A5. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$$

$$A6. \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

$$A7. \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

$$A8. (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$$

$$A9. \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$A10. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$$

$$A11. \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

Reguła odrywania (RO), (modus ponens):  $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$

# System aksjomatyczny

## Uwaga

Funktor równoważności ( $\leftrightarrow$ ) traktujemy jako skrót: formułę  $\alpha \leftrightarrow \beta$  rozwijamy do  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ .

- ▶ Można wprowadzić więcej skrótów, na przykład ograniczając się do funktorów  $\{\wedge, \neg\}$ , albo nawet do  $\{\|\}$ .

## Obserwacja

- ▶ *Wszystkie aksjomaty są tautologiami.*
- ▶ *Reguła odrywania jest regułą normalną.*
- ▶ Powyższa obserwacja to “reality check”. Wiemy przynajmniej, że nasz system aksjomatyczny nie udowodni niczego, co nie jest semantycznie prawdziwe.

# Wynikanie syntaktyczne: dowody i tezy

## Definicja (wynikanie syntaktyczne)

Niech  $\Gamma$  będzie zbiorem formuł a  $\varphi$  formułą. Mówimy, że  $\varphi$  **wynika syntaktycznie** z  $\Gamma$  (albo, że  $\varphi$  jest **dowodnie** z  $\Gamma$ ) i piszemy  $\Gamma \vdash \varphi$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończony ciąg formuł  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , nazywany **dowodem**, taki, że

- ▶  $\gamma_n = \varphi$
- ▶ każda formuła  $\gamma_i$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , jest
  - ▶ elementem  $\Gamma$  (założeniem), albo
  - ▶ aksjomatem (podstawieniem schematu aksjomatu), albo
  - ▶ dla pewnych  $\gamma_j, \gamma_k$  gdzie  $j, k < i$  mamy  $\gamma_k = \gamma_j \rightarrow \gamma_i$  (czyli:  $\gamma_i$  powstaje z formuł wcześniejszych w ciągu przez zastosowanie reguły odrywania).

## Definicja (teza)

Formuła  $\varphi$  jest **tezą** wtedy i tylko wtedy gdy  $\emptyset \vdash \varphi$ .

# Dowody: przykłady

Dowód  $\emptyset \vdash p \rightarrow p$

- |    |                                                                                                                                   |                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. | $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$                                                                                 | A1, $\alpha/p, \beta/(p \rightarrow p)$           |
| 2. | $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ | A2, $\alpha/p, \beta/(p \rightarrow p), \gamma/p$ |
| 3. | $p \rightarrow (p \rightarrow p)$                                                                                                 | A1, $\alpha/p, \beta/p$                           |
| 4. | $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$                                                                 | RO 2, 1                                           |
| 5. | $p \rightarrow p$                                                                                                                 | RO 4, 3                                           |

Dowód  $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$ .

- |    |                                                                             |                              |
|----|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$                                                           | założenie                    |
| 2. | $\neg q$                                                                    | założenie                    |
| 3. | $\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$                                 | A1, $\alpha/\neg q, \beta/p$ |
| 4. | $p \rightarrow \neg q$                                                      | RO, 3, 2                     |
| 5. | $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ | A10, $\alpha/p, \beta/q$     |
| 6. | $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$                                 | RO 5, 1                      |
| 7. | $\neg p$                                                                    | RO 6, 4                      |

# Własności $\vdash$ (oraz $\models$ )

Relacja  $\vdash$  ma następujące własności:

1. Jeżeli  $\varphi \in \Gamma$ , to  $\Gamma \vdash \varphi$ . (zwrotność)
2. Jeżeli  $\Delta \subseteq \Gamma$  i  $\Delta \vdash \varphi$ , to  $\Gamma \vdash \varphi$ . (monotoniczność)
3. Jeżeli  $\Gamma \vdash \Delta$  i  $\Delta \vdash \varphi$ , to  $\Gamma \vdash \varphi$ . (przechodniość)
4.  $\Gamma \vdash \varphi$  wtw gdy  $\Gamma_0 \vdash \varphi$  dla pewnego skończonego  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ . (zwartość)

Przypomnienie z wykładu 2. Relacja  $\models$  ma następujące własności:

1. Jeżeli  $\varphi \in \Gamma$ , to  $\Gamma \models \varphi$ . (zwrotność)
2. Jeżeli  $\Delta \subseteq \Gamma$  i  $\Delta \models \varphi$ , to  $\Gamma \models \varphi$ . (monotoniczność)
3. Jeżeli  $\Gamma \models \Delta$  i  $\Delta \models \varphi$ , to  $\Gamma \models \varphi$ . (przechodniość)

Zwartość dla  $\models$  też zachodzi, ale to udowodnimy później, używając twierdzenia o pełności.

# Reguły wyprowadzalne (wtórne)

## Definicja (reguła wyprowadzalna)

Reguła o schemacie  $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}$  jest **wyprowadzalna (wtórna)** wtw gdy  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$ .

## Lemat (o dowodach skrótowych)

*Dla każdego zbioru formuł  $\Gamma$  i każdej formuły  $\varphi$  mamy, że  $\Gamma \vdash \varphi$  wtw gdy istnieje skończony ciąg formuł  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , taki, że*

- ▶  $\delta_n = \varphi$
- ▶ każda formuła  $\delta_i$ , dla  $i \in \{1, \dots, n\}$ , jest
  - ▶ elementem  $\Gamma$ , albo
  - ▶ aksjomatem lub tezą, albo
  - ▶ powstaje z formuł wcześniejszych w ciągu przez zastosowanie pewnej reguły wyprowadzalnej.

# Lemat o dowodach skrótowych

## Dowód.

( $\Rightarrow$ )  $\Gamma \vdash \varphi$  znaczy, że istnieje dowód  $\varphi$  z  $\Gamma$ . Każdy dowód spełnia warunki nałożone na ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_n$ .

( $\Leftarrow$ ) Pokażemy, że każdy ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_n$  da się rozszerzyć do dowodu  $\varphi$  z  $\Gamma$ . Niech  $k$  będzie liczbą formuł w ciągu  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , które są tezami (ale nie aksjomatami) lub powstały przez zastosowanie reguły wyprowadzalnej (ale nie reguły odrywania). Nazwijmy je formułami *niewłaściwymi*.

- ▶ Jeżeli  $k = 0$ , to  $\delta_1, \dots, \delta_n$  jest dowodem.
- ▶ Załóżmy indukcyjnie, że lemat zachodzi dla każdego  $k' \leq k$  i rozważmy ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , w którym mamy  $k + 1$  formuł niewłaściwych.
- ▶ Niech  $\delta_i$  będzie pierwszą formułą niewłaściwą w ciągu  $\delta_1, \dots, \delta_n$  i niech  $\{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m}\} \vdash \delta_i$  będzie regułą wyprowadzalną, z której  $\delta_i$  została uzyskana (jeżeli  $\delta_i$  jest tezą, to  $\emptyset \vdash \delta_i$ ).
- ▶ Ponieważ  $\delta_i$  jest pierwszą formułą niewłaściwą w ciągu, to ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$  jest dowodem. Zatem  $\Gamma \vdash \delta_i$  zachodzi dla każdej formuły  $\delta_j \in \{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m}\}$ .
- ▶ Niech  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \delta_i$  będzie dowodem  $\delta_i$  z  $\{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m}\}$ .
- ▶ Zastępując  $\delta_i$  jej dowodem, rozszerzamy ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n$  do ciągu  $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n$ , w którym występuje  $k$  formuł niewłaściwych.
- ▶ Z założenia indukcyjnego ciąg  $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \delta_i, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n$  da się rozszerzyć do dowodu. □

# Twierdzenia o dedukcji

## Twierdzenie (o dedukcji wprost)

Dla dowolnego zbioru formuł  $\Gamma$  i dowolnych formuł  $\alpha, \beta$  mamy, że

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

## Dowód.

( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Niech  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  będzie dowodem  $\alpha \rightarrow \beta$  z  $\Gamma$ ; Wtedy ciąg  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \alpha, \beta$  jest dowodem  $\beta$  z  $\Gamma \cup \{\alpha\}$ . W tym ciągu  $\alpha$  jest założeniem, a  $\beta$  powstaje przez zastosowanie reguły odrywania do  $\gamma_n = \alpha \rightarrow \beta$  i  $\alpha$ .

( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ . Niech  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  będzie dowodem  $\beta$  z  $\Gamma \cup \{\alpha\}$ , w którym  $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$  są formułami z  $\Gamma$  lub aksjomatami. Rozważmy ciąg formuł  $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell, \alpha \rightarrow \gamma_1, \dots, \alpha \rightarrow \gamma_n$ ; zauważmy, że  $\alpha \rightarrow \gamma_n = \alpha \rightarrow \beta$ . Twierdzimy, że ten ciąg spełnia założenia lematu o dowodach skrótowych.

▶ Jeżeli  $\gamma_i = \alpha$ , to  $\alpha \rightarrow \gamma_i$  jest tezą.

▶ Jeżeli  $\gamma_i \in \Gamma$  lub  $\gamma_i$  jest aksjomatem, to  $\alpha \rightarrow \gamma_i$  jest uzasadnione przez wyprowadzalną regułę poprzedzania  $\frac{\gamma_i}{\alpha \rightarrow \gamma_i}$

▶ Jeżeli  $\gamma_k = \gamma_j \rightarrow \gamma_i$  dla pewnych  $\gamma_k, \gamma_j$  wcześniejszych niż  $\gamma_i$ , to:

$\alpha \rightarrow \gamma_k$  i  $\alpha \rightarrow \gamma_j$  są już uzasadnione.

$\alpha \rightarrow \gamma_i$  jest uzasadnione przez wyprowadzalną poprzedzoną regułę odrywania  $\frac{\alpha \rightarrow (\gamma_j \rightarrow \gamma_i), \alpha \rightarrow \gamma_j}{\alpha \rightarrow \gamma_i}$  □

# Twierdzenia o dedukcji

## Twierdzenie (o dedukcji niewprost)

*Dla dowolnego zbioru formuł  $\Gamma$  i dowolnych formuł  $\alpha, \beta$  mamy, że*

$$\begin{aligned}\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\} &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha \\ \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\} &\Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha\end{aligned}$$

## Dowód.

Dowody obu równoważności przebiegają podobnie. Udowodnimy pierwszą z nich.

( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$ .

- ▶ Stosując dwukrotnie twierdzenie o dedukcji wprost, dostajemy, że  $\Gamma \vdash \{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\}$ .
- ▶ Mamy więc dowody  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  i  $\gamma'_1, \dots, \gamma'_m$ , gdzie  $\gamma_n = \alpha \rightarrow \beta$  a  $\gamma'_m = \alpha \rightarrow \neg\beta$ .
- ▶ Ciąg  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m, \neg\alpha$  da się rozszerzyć do dowodu ponieważ formuła  $\neg\alpha$  jest uzasadniona przez wyprowadzalną regułę 
$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta}{\neg\alpha}$$
.

( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ .

- ▶ Wtedy  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$  oraz  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$ .
- ▶ Stosując wyprowadzalną regułę 
$$\frac{\alpha, \neg\alpha}{\beta}$$
 dwukrotnie (drugi raz z podstawieniem  $\beta/\neg\beta$ ), dostajemy  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$ .

