Wstęp do logiki

wykład 6

15 listopada 2022

Wstęp do logiki

wykład 6

15 listopada 2022

Twierdzenie o pełności

Twierdzenie (o pełności)

Dla dowolnego zbioru formuł Γ *i dowolnej formuły* φ *mamy*

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi$$

- Twierdzenie o pełności mówi, że środki dowodowe KRZ dokładnie odpowiadają środkom semantycznym.
- W szczególności, formuła jest tautologią wtw gdy jest tezą, a reguła jest normalna wtw gdy jest wyprowadzalna.
- Dowód z prawej do lewej jest łatwy. Aksjomaty są tautologiami a reguła odrywania jest normalna; zatem z definicji $\models$ dostajemy żądaną implikację.
- Dowód w drugą stronę wymaga maszynerii.

Maksymalnie niesprzeczne zbiory formuł

Definicja

- Zbiór formuł Γ jest sprzeczny wtw gdy dla pewnej formuły φ mamy $\Gamma \vdash \{\varphi, \neg\varphi\}$.
- Zbiór formuł Γ jest niesprzeczny wtw gdy dla każdej formuły φ mamy $\Gamma \nvdash \{\varphi, \neg\varphi\}$.

Obserwacja

Zbiór formuł Γ jest sprzeczny wtw gdy $\Gamma \vdash \varphi$ dla każdej formuły φ.

Definicja

Zbiór formuł Γ jest maksymalnie niesprzeczny wtw gdy (i) zbiór Γ jest niesprzeczny, (ii) jeżeli $\varphi \notin \Gamma$ to $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczny.

Maksymalnie niesprzeczne zbiory formuł

Lemat (domknięcie na $\vdash$)

Niech Γ będzie maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł. Wtedy $\Gamma \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \varphi \in \Gamma$, dla każdej formuły φ

Dowód.

Załóżmy, że $\Gamma \vdash \varphi$ i dla dowodu niewprost, że $\varphi \notin \Gamma$. Ponieważ Γ jest maksymalnie niesprzeczny, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczny, czyli $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \{\beta, \neg\beta\}$ dla pewnej formuły β. Twierdzenie o dedukcji niewprost daje $\Gamma \vdash \neg\varphi$ a zatem $\Gamma \vdash \{\varphi, \neg\varphi\}$. To przeczy założeniu o niesprzeczności Γ. $\square$

Lemat (albo φ albo $\neg\varphi$)

Zbiór formuł Γ jest maksymalnie niesprzeczny wtw gdy dla każdej formuły φ mamy albo $\varphi \in \Gamma$ albo $\neg\varphi \in \Gamma$.

Dowód.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że Γ jest maksymalnie niesprzeczny i dla dowodu niewprost, że $\varphi \notin \Gamma$ i $\neg\varphi \notin \Gamma$ dla pewnej formuły φ. Zatem $\Gamma \cup \{\varphi\}$ oraz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ są sprzeczne, a więc przez twierdzenie o dedukcji niewprost Γ jest sprzeczny, co przeczy założeniu.
($\Leftarrow$) Weźmy dowolna formułę $\varphi \notin \Gamma$ i rozważmy $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Ponieważ $\varphi \notin \Gamma$ z założenia mamy, że $\neg\varphi \in \Gamma$. Zatem $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \{\varphi, \neg\varphi\}$, co przez twierdzenie o dedukcji niewprost daje $\Gamma \vdash \neg\varphi$. $\square$

Własności zbiorów maksymalnie niesprzecznych

Lemat (Własności zbiorów maksymalnie niesprzecznych)

Niech Γ będzie maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł. Wtedy, dla dowolnych formuł α, β mamy

1. $\neg\alpha \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \notin \Gamma$
2. $\alpha \wedge \beta \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Gamma$ *i* $\beta \in \Gamma$
3. $\alpha \vee \beta \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Gamma$ *lub* $\beta \in \Gamma$
4. $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \alpha \notin \Gamma$ *lub* $\beta \in \Gamma$

Dowód.

Z domknięcia na $\vdash$ mamy, że $\Gamma \vdash \varphi$ wtw gdy $\varphi \in \Gamma$, wiec wystarczy pokazać $\Gamma \vdash \varphi$ dla odpowiednich φ.

1. ($\Rightarrow$) Z niesprzeczności Γ.
   ($\Leftarrow$) Z lematu "albo φ albo $\neg\varphi$".
2. ($\Rightarrow$) Z założenia $\alpha \wedge \beta \in \Gamma$, używajac aksjomatów $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ i $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$ mamy, że $\Gamma \vdash \alpha$ i $\Gamma \vdash \beta$.
   ($\Leftarrow$) Z założenia $\Gamma \vdash \alpha$ i $\Gamma \vdash \beta$, używając tezy $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ (ćwiczenie: udowodnić tę tezę) dostajemy, że $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$.
3. ($\Rightarrow$) Z założenia mamy $\alpha \vee \beta \in \Gamma$. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\alpha \notin \Gamma$ i $\beta \notin \Gamma$. Z już udowodnionego punktu (1) dostajemy $\neg\alpha \in \Gamma$ i $\neg\beta \in \Gamma$. Używając tezy $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta))$ (ćwiczenie: udowodnić tę tezę) dostajemy dalej, że $\Gamma \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ a więc Γ jest zbiorem sprzecznym, co przeczy założeniu.
   ($\Leftarrow$) Załóżmy bez straty ogólności, że $\Gamma \vdash \alpha$. Aksjomat $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ daje natychmiast, że $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$.
4. Ćwiczenie.

$\square$

Zbiory maksymalnie niesprzeczne a wartościowania

Obserwacja

Niech Γ *będzie zbiorem maksymalnie niesprzecznym. Niech funkcja* $w\colon \Sigma \to \{0,1\}$ *będzie dana przez* $w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \textit{jeżeli } \varphi \in \Gamma, \\ 0 & \textit{jeżeli } \varphi \notin \Gamma. \end{cases}$

Wtedy w *jest wartościowaniem.*

Dowód.

Mamy, że $w(\varphi) = 1$ wtw gdy $\varphi \in \Gamma$. Zatem:

- $w(\neg\alpha) = 1 \Leftrightarrow \neg\alpha \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \notin \Gamma \Leftrightarrow w(\alpha) = 0$
- $w(\alpha \wedge \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$ i $\beta \in \Gamma \Leftrightarrow w(\alpha) = 1$ i $w(\beta) = 1$
- $w(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha \vee \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \in \Gamma$ lub $\beta \in \Gamma \Leftrightarrow w(\alpha) = 1$ lub $w(\beta) = 1$
- $w(\alpha \to \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha \to \beta \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \notin \Gamma$ lub $\beta \in \Gamma \Leftrightarrow w(\alpha) = 0$ lub $w(\beta) = 1$

$\square$

Lemat Lindenbauma

Lemat

Każdy niesprzeczny zbiór formuł Γ można rozszerzyć do zbioru maksymalnie niesprzecznego.

Dowód.

- Niech $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots$ będzie ciągiem wszystkich formuł.
- Indukcyjnie budujemy ciąg niesprzecznych rozszerzeń Γ jak następuje.
- $\Gamma_0 = \Gamma$ (niesprzeczny z założenia). Założenie indukcyjne: $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_i$ są niesprzeczne.
- Kładziemy $\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} & \text{jeżeli } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ jest niesprzeczny,} \\ \Gamma_i & \text{jeżeli } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ jest sprzeczny.} \end{cases}$
- Tak zbudowany Γ_{i+1} jest niesprzeczny.
- Mamy więc nieskończony ciąg niesprzecznych rozszerzeń $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_{i-1} \subseteq \ldots$
- Niech $\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$. Ponieważ relacja $\vdash$ jest zwarta, zbiór Δ jest niesprzeczny.
- Twierdzimy, że Δ jest maksymalnie niesprzeczny.
- Weźmy dowolna formułę ψ taką, że $\psi \notin \Delta$ (taka formuła istnieje, bo Δ jest niesprzeczny). Pokażemy, że $\Delta \cup \{\psi\}$ jest sprzeczny.
- Zauważmy, że $\psi = \varphi_i$ dla pewnego i.
- Rozważmy $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\}$. Jeżeli ten zbiór jest niesprzeczny, to $\varphi_i \in \Gamma_{i+1}$ a więc $\psi \in \Delta$.
- Ale $\psi \notin \Delta$, a więc $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\}$ jest sprzeczny.
- Zatem $\Delta \cup \{\varphi_i\} = \Delta \cup \{\psi\}$ jest sprzeczny. $\square$

Wnioski z lematu Lindenbauma

Wniosek

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą. Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje maksymalnie niesprzeczny zbiór Δ taki, że $\Gamma \subseteq \Delta$ i $\varphi \notin \Delta$.

Dowód.

Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \varphi$. Zatem $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczny. Niech Δ będzie maksymalnie niesprzecznym rozszerzeniem $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Mamy, że $\neg\varphi \in \Delta$, a więc $\varphi \notin \Delta$. $\square$

Wniosek

Niech Γ będzie zbiorem formuł, a φ formułą. Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje wartościowanie w takie, że $w(\Gamma) = 1$ i $w(\varphi) = 0$.

Dowód.

Niech Δ będzie maksymalnie niesprzecznym rozszerzeniem Γ takim, że $\varphi \notin \Delta$. Z obserwacji o zbiorach maksymalnie niesprzecznych i wartościowaniach mamy, że $w \colon \Sigma \longrightarrow \{0,1\}$ dana przez $w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \varphi \in \Delta, \\ 0 & \text{jeżeli } \varphi \notin \Delta. \end{cases}$ jest wartościowaniem. Mamy $\Gamma \subseteq \Delta$ a więc $w(\Gamma) = 1$. Mamy $\varphi \notin \Delta$ a więc $w(\varphi) = 0$. $\square$

Dowód twierdzenia o pełności

Twierdzenie (o pełności)

Dla dowolnego zbioru formuł Γ i dowolnej formuły φ mamy

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi$$

Dowód.

($\Leftarrow$) Załóżmy $\Gamma \vdash \varphi$ i niech v będzie wartościowaniem spełniającym Γ.

- Niech $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ będzie dowodem φ z Γ. Pokażemy, że dla każdej formuły γ_i mamy $v(\gamma_i) = 1$.
- Jeżeli $\gamma_i \in \Gamma$, to $v(\gamma_i) = 1$ bo $v(\Gamma) = 1$. Jeżeli γ_i jest aksjomatem, to $v(\gamma_i) = 1$ bo γ_i jest tautologią.
- Jeżeli γ_i jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do formuł $\gamma_k = \gamma_j \to \gamma_i$ i γ_j takich, że $k, j < i$, to mamy $v(\gamma_j \to \gamma_i) = 1 = v(\gamma_j)$. Reguła odrywania jest regułą normalną, a więc $v(\gamma_i) = 1$.

($\Rightarrow$) Pokażemy, że $\Gamma \nvdash \varphi$ implikuje $\Gamma \not\models \varphi$.

- Skoro $\Gamma \nvdash \varphi$, to zbiór $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczny. Niech $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
- Z wniosku z lematu Lindenbauma wynika, że istnieje maksymalnie niesprzeczny zbiór Δ taki, że $\Gamma \subseteq \Delta$ i $\varphi \notin \Delta$.
- Niech Σ będzie zbiorem wszystkich formuł i niech $w\colon \Sigma \to \{0, 1\}$ będzie funkcją daną przez $w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \varphi \in \Delta, \\ 0 & \text{jeżeli } \varphi \notin \Delta. \end{cases}$ Z lematu o własnościach zbiorów maksymalnie niesprzecznych wynika, że w jest wartościowaniem.
- Z definicji w mamy, że $w(\Gamma) = 1$ a $w(\varphi) = 0$.
- Zatem $\Gamma \not\models \varphi$.