Wstęp do logiki

wykład 7

22 listopada 2022

Logika pierwszego rzędu (rachunek predykatów)

- W rachunku zdań nie ma możliwości logicznej analizy struktury zdania prostego.
- Logicznie prawdziwe zdanie

  Każde zwierzę jest kotem lub nie jest kotem

  zauważmy, że to nie jest to samo, co

  Każde zwierzę jest kotem lub nieprawda, że każde zwierzę jest kotem

  a zatem jedyne możliwe tłumaczenie na język rachunku zdań to p. Coś jest nie w porządku!
- Rachunek predykatów radzi sobie z tym problemem i podobnymi mu.

Definicja

Każdy język pierwszego rzędu $\mathcal{J}$ składa się z następujących grup symboli:

- Przeliczalnie nieskończonego zbioru zmiennych indywiduowych $\mathrm{Var} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.
- Zbioru $\mathrm{Rel}_{\mathcal{J}} = \{P^i_j : i \in I,\ j \in J\}$ symboli relacyjnych (zwanych też symbolami predykatywnymi). Tu i poniżej $I, J \subseteq \mathbb{N}$. Górny indeks oznacza liczbę argumentów.
- Wyróżnionego dwuargumentowego symbolu relacyjnego $=$, nazywanego identycznością lub równością.
- Zbioru $\mathrm{Fun}_{\mathcal{J}} = \{f^i_j : i \in I,\ j \in J\}$ symboli funkcyjnych.
- Zbioru $\mathrm{Const}_{\mathcal{J}} = \{c_j : j \in J\}$ stałych indywiduowych.
- Spójników logicznych: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
- Kwantyfikatorów: $\forall$ (ogólnego, uniwersalnego, “dla każdego …”) oraz $\exists$ (szczegółowego, egzystencjalnego, “istnieje takie … że”).
- Nawiasów (,).

Praktyczne sposoby zapisu języków pierwszego rzędu

- W praktyce używamy liter z końca alfabetu $\ldots, x, y, z$ jako zmiennych indywiduowych, liter z początku alfabetu $a, b, c, \ldots$ jako stałych indywiduowych.
- Symbole relacyjne w praktyce zapisujemy jako $P(x), R(x, y), S(x, y, z)$ unikając indeksów jeśli nie są konieczne (liczba zmiennych jednoznacznie wskazuje argumentowość symbolu).
- Dwuargumentowe symbole relacyjnie niekiedy piszemy między argumentami (w szczególności zawsze piszemy $x = y$, a nie $=(x, y)$ jak wymagałaby formalna definicja).
- Symbole funkcyjne w praktyce zapisujemy jako $f(x), g(x, y), h(x, y, z)$ unikając indeksów jeśli nie są konieczne. Dwuargumentowe symbole funkcyjne niekiedy piszemy między argumentami. Standardowe symbole zwykle tak piszemy (czyli np. $x + y$, $x \cdot y$ a nie $+(x, y)$, $\cdot(x, y)$).

Języki pierwszego rzedu: przykłady

Uwaga: symbole logiczne i pozalogiczne

- Zbiory $\mathrm{Rel}_{\mathcal{J}}$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{J}}$ i $\mathrm{Const}_{\mathcal{J}}$ zależą od jezyka $\mathcal{J}$. W szczególności mogą być puste. Symbole z tych zbiorów nazywa się pozalogicznymi.
- Pozostałe symbole to symbole logiczne. Symbol identyczności jest symbolem logicznym. Symbole logiczne należą do każdego języka.

- *Język czystej identyczności.* Zbiory symboli relacyjnych, funkcyjnych i stałych są puste.
- *Język arytmetyki Peano.* Stała indywiduowa 0. Jednoargumentowy symbol funkcyjny $s(x)$ (następnik x).
- *Język stosunków pokrewieństwa.* Zbiory stałych indywiduowych i symboli funkcyjnych są puste. Zbiór symboli predykatywnych: $O(x, y)$ (x jest ojcem y), $M(x, y)$ (x jest matką y), $S(x, y)$ (x jest synem y), $C(x, y)$ (x jest córką y), $Br(x, y)$ (x jest bratem y), $Si(x, y)$ (x jest siostrą y).

Termy

Definicja

Dla danego języka $\mathcal{J}$, zbiór termów $\mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$ jest najmniejszym zbiorem takim, że

- $\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$.
- $\mathrm{Const}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$.
- Jeżeli $f_j^n \in \mathcal{J}$ oraz $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$, to $f_j^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie językiem czystej identyczności, $\mathcal{A}$ językiem arytmetyki, $\mathcal{P}$ językiem stosunków pokrewieństwa.

- $\mathrm{Tm}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Var}$.
- $\mathrm{Tm}_{\mathcal{A}} = \{s^n(t) : t \in \mathrm{Var} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N}\}$
  gdzie $s^0(t) = t$, $s^{i+1}(t) = s(s^i(t))$.
- $\mathrm{Tm}_{\mathcal{P}} = \mathrm{Var}$.

Formuły atomowe

Definicja

Dla danego języka $\mathcal{J}$ zbiór formuł atomowych $\mathcal{J}$ to zbiór wszystkich wyrażeń następującej postaci

- $t_1 = t_2$, dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$.
- $P^n_j(t_1, \ldots, t_n)$, dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Tm}_{\mathcal{J}}$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie językiem czystej identyczności, $\mathcal{A}$ językiem arytmetyki, $\mathcal{P}$ językiem stosunków pokrewieństwa.

- Zbiór formuł atomowch $\mathcal{I}$: $\{x = y : x, y \in \mathrm{Var}\}$.
- Zbiór formuł atomowch $\mathcal{A}$: $\{s^n(t) = s^m(t') : t, t' \in \mathrm{Var} \cup \{0\},\ n, m \in \mathbb{N}\}$.
- Zbiór formuł atomowch $\mathcal{P}$:
  $\{x = y, O(x, y), M(x, y), S(x, y), C(x, y), Br(x, y), Si(x, y) : x, y \in \mathrm{Var}\}$.

Formuły

Definicja

Dla danego języka $\mathcal{J}$, zbiór formuł $\mathrm{For}_{\mathcal{J}}$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie formuły atomowe $\mathcal{J}$ i takim, że

- jeżeli $\alpha, \beta \in \mathrm{For}_{\mathcal{J}}$, to $\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathrm{For}_{\mathcal{J}}$;
- jeżeli $\alpha \in \mathrm{For}_{\mathcal{J}}$ oraz $x \in \mathrm{Var}_{\mathcal{J}}$, to $\forall x(\alpha), \exists x(\alpha) \in \mathrm{For}_{\mathcal{J}}$.

Konwencja

Można opuszczać zewnętrzne nawiasy w formułach. Dla zwiększenia czytelności można też pisać $\neg\alpha$, $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$ jeśli α jest formułą atomową.

Przykłady formuł:

- W języku $\mathcal{I}$: $\forall x(x = x)$, $\forall x \exists y \neg(x = y)$, $\exists x \neg(x = y)$.
- W języku $\mathcal{A}$: $x = s(0)$, $\forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x = s(y)))$.
- W języku $\mathcal{P}$: $\exists x(M(z, x) \vee M(x, z))$, $\forall x \exists y(M(y, x) \wedge \forall y_1 \forall y_2((M(y_1, x) \wedge M(y_2, x)) \rightarrow y_1 = y_2))$.

Z języka naturalnego na język rachunku predykatów

- *Język $\mathcal{I}$ czystej identyczności.* Zbiory symboli relacyjnych, funkcyjnych i stałych są puste.
- *Język $\mathcal{A}$ arytmetyki Peano.* Stała indywiduowa 0. Jednoargumentowy symbol funkcyjny $s(x)$ (następnik x).
- *Język $\mathcal{P}$ stosunków pokrewieństwa.* Zbiory stałych indywiduowych i symboli funkcyjnych są puste. Zbiór symboli relacyjnych: $O(x, y)$ (x jest ojcem y), $M(x, y)$ (x jest matką y), $S(x, y)$ (x jest synem y), $C(x, y)$ (x jest córką y), $Br(x, y)$ (x jest bratem y), $Si(x, y)$ (x jest siostrą y).

1. Przetłumaczmy, odpowiednio na języki $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{A}$:
   - Istnieją co najmniej dwa przedmioty.
   - Istnieją dokładnie dwa przedmioty.
   - Zero nie jest następnikiem żadnej liczby.
   - Jeżeli następniki dwóch liczb są równe to te liczby też są równe.
2. W języku $\mathcal{P}$ zdefiniujmy relacje „x jest dziadkiem y" oraz „x jest dziadkiem ze strony ojca y".
3. A teraz spróbujmy zdefiniować „x jest przodkiem y w linii męskiej". Da się?

Z języka naturalnego na język rachunku predykatów

1. Zdefiniujmy odpowiedni język, i przetłumaczmy zdania:
   - Każdy ptak lata.
   - Pewien ptak nie lata.
   - Jeżeli pewien ptak nie lata to jest strusiem.
2. Zdefiniujmy odpowiedni język, i przetłumaczmy zdania:
   - Każdy filozof głosi jakiś pogląd, którego pewien filozof nie uznaje.
   - Pewien filozof głosi jakiś pogląd, którego żaden inny filozof nie uznaje.
   - Jeżeli pewien filozof głosi jakiś pogląd, którego żaden filozof nie uznaje, to sam tego poglądu nie uznaje.

Bardzo ważna uwaga! Znaczenie formuł.

- Formuły „same z siebie” nie mają żadnego znaczenia.
- Znaczenie jest nadawane poprzez interpretację w modelu. Będziemy o tym mówić na następnym wykładzie.