

# Wstęp do logiki

## wykład 8

29 listopada 2022

# Zmienne wolne i związane

## Definicja

Dla dowolnej formuły  $\varphi$  zbiór jej **podformuł**  $\text{Sub}(\varphi)$  jest zdefiniowany następująco.

- ▶ Jeżeli  $\varphi$  jest formułą atomową, to  $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\}$ .
- ▶ Jeżeli  $\varphi \in \{\neg\alpha, \forall x\alpha, \exists x\alpha\}$  to  $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \text{Sub}(\alpha)$ .
- ▶ Jeżeli  $\varphi \in \{\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta\}$  to  $\text{Sub}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \text{Sub}(\alpha) \cup \text{Sub}(\beta)$ .

## Definicja

- ▶ Wystąpienie zmiennej  $x$  w formule  $\varphi$  jest **związane** jeżeli znajduje się w podformule postaci  $\forall x\alpha$  lub  $\exists x\alpha$ . W przeciwnym przypadku wystąpienie  $x$  jest **wolne**.
- ▶ Zmienna  $x$  jest **wolna** w  $\varphi$  jeżeli posiada choć jedno wolne wystąpienie w  $\varphi$ .

## Zmienne wolne i związane

Niech  $\varphi$  będzie formułą  $\forall x \exists y R(x, y, z) \wedge \exists y R(x, y, z)$

- ▶ wszystkie wystąpienia zmiennej  $z$  w  $\varphi$  są wolne, zatem  $z$  jest zmienną wolną w  $\varphi$ ,
- ▶ wszystkie wystąpienia  $y$  w  $\varphi$  są związane, zatem  $y$  nie jest zmienną wolną w  $\varphi$ ,
- ▶ dwa pierwsze wystąpienia  $x$  w  $\varphi$  są związane, a trzecie jest wolne, zatem  $x$  jest zmienną wolną w  $\varphi$ .

Natomiast w formule  $\forall x (\exists y R(x, y, y) \wedge \exists y R(x, y, x))$  wszystkie wystąpienia zmiennych są związane.

# Formuły i zdania

## Definicja

**Zdanie** to taka formuła, w której nie ma żadnych wolnych wystąpień zmiennych.

- ▶ Formuła ze zmiennymi wolnymi wyraża pewną własność lub relację, na przykład w odpowiednio zinterpretowanym języku  $\mathcal{P}$  formuła  $\exists y M(x, y)$  mówi, że  $x$  jest czyjąś matką. Wybór  $y$  jako zmiennej jest nieistotny, formuła  $\exists z M(x, z)$  mówi to samo.
- ▶ Zdanie wyraża pewien stan rzeczy. Na przykład  $\forall x \exists y M(x, y)$  mówi, że każdy jest czyjąś matką. Natomiast  $\forall y \exists x M(x, y)$  mówi, że każdy ma matkę.

# Modele i interpretacje

## Definicja

Niech  $\mathcal{J}$  będzie językiem pierwszego rzędu. **Model**  $\mathcal{M} = (M, \{R^M : R \in \text{Rel}_{\mathcal{J}}\}, \{f^M : f \in \text{Fun}_{\mathcal{J}}\}, \{c^M : c \in \text{Const}_{\mathcal{J}}\})$  dla języka  $\mathcal{J}$  to następująca struktura:

- ▶  $M$  to niepusty zbiór, zwany **uniwersum** modelu.
- ▶ Dla każdego  $k$ -argumentowego symbolu  $R \in \text{Rel}_{\mathcal{J}}$ , mamy relację  $R^M \subseteq M^k$ .
- ▶ Dla każdego  $k$ -argumentowego symbolu  $f \in \text{Fun}_{\mathcal{J}}$ , mamy funkcję  $f^M : M^k \rightarrow M$ .
- ▶ Dla każdej stałej  $c \in \text{Const}_{\mathcal{J}}$ , mamy wyróżniony element  $c^M \in M$ .

Funkcja  $^M$  przyporządkowuje każdemu pozalogicznemu symbolowi  $\sigma$  z języka  $\mathcal{J}$  jego **interpretację** w modelu  $\mathcal{M}$ .

# Model i język modelu

## Definicja

Dowolną strukturę  $\mathcal{M} = (M, \{R_i : i \in I\}, \{f_j : j \in J\}, \{c_k : k \in K\})$ , gdzie

- ▶  $M$  jest niepustym zbiorem,
- ▶  $\{R_i : i \in I\}$  to pewien zbiór relacji w  $M$ ,
- ▶  $\{f_j : j \in J\}$  to pewien zbiór operacji w  $M$ ,
- ▶  $\{c_k : k \in K\}$  to pewien zbiór wyróżnionych elementów  $M$ ,

nazywamy **modelem** (lub **strukturą relacyjną**).

**Język modelu**  $\mathcal{M}$  to język pierwszego rzędu  $L(\mathcal{M})$  taki, że

- ▶  $\text{Rel}_{L(\mathcal{M})} = \{R_i^\sigma : i \in I\}$ , gdzie  $R_i^\sigma$  jest symbolem relacyjnym,
- ▶  $\text{Fun}_{L(\mathcal{M})} = \{f_j^\sigma : j \in J\}$ , gdzie  $f_j^\sigma$  jest symbolem funkcyjnym,
- ▶  $\text{Const}_{L(\mathcal{M})} = \{c_k^\sigma : k \in K\}$ , gdzie  $c_k^\sigma$  jest stałą,

a dla każdego  $i \in I, j \in J$ , arności  $R_i$  i  $R_i^\sigma$  oraz  $f_j$  i  $f_j^\sigma$  są takie same.

Zbiór  $\text{Rel}_{L(\mathcal{M})} \cup \text{Fun}_{L(\mathcal{M})} \cup \text{Const}_{L(\mathcal{M})}$  nazywamy **sygnaturą** modelu  $\mathcal{M}$ .

# Wartościowania

## Definicja (wartościowanie zmiennych)

Niech  $\mathcal{M}$  będzie modelem, którego uniwersum jest zbiór  $M$ .

**Wartościowanie zmiennych** to dowolna funkcja  $v: \text{Var} \rightarrow M$ .

## Definicja (wartościowanie termów)

Niech  $\mathcal{J}$  będzie językiem pierwszego rzędu, a  $\mathcal{M}$  niech będzie modelem dla  $\mathcal{J}$ . Dla dowolnego wartościowania zmiennych  $v: \text{Var} \rightarrow M$  definiujemy

**wartościowanie**  $v^h: \text{Term}_{\mathcal{J}} \rightarrow M$  następująco:

- ▶  $v^h(x) = v(x)$  dla każdej zmiennej  $x$ ,
- ▶  $v^h(c) = c^{\mathcal{M}}$  dla każdej stałej  $c$ ,
- ▶  $v^h(f(t_1, \dots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(v^h(t_1), \dots, v^h(t_n))$ , dla każdego  $n$ -argumentowego symbolu funkcyjnego  $f$  i dowolnych termów  $t_1, \dots, t_n$ .

# Wartościowania

## Fakt

*Funkcja  $v^h$  jest poprawnie zdefiniowana. Każde wartościowanie  $v$  rozszerza się jednoznacznie do funkcji  $v^h$ .*

## Dowód.

Musimy pokazać, że (i) dla każdego termu  $t$  istnieje dokładnie jeden element  $a \in M$  taki, że  $a = v^h(t)$ , oraz że (ii) dla dowolnych wartościowań  $v$  i  $w$  jeżeli  $v^h = w^h$ , to  $v = w$ . Punkt (ii) jest oczywisty, bo dla każdej zmiennej  $x$  mamy  $v(x) = v^h(x) = w^h(x) = w(x)$ . Punktu (i) dowodzimy indukcyjną ze względu na złożoność  $t$ .

- ▶ Jeżeli  $t = x \in \text{Var}$ , to  $v^h(x) = v(x)$ , a  $v(x)$  jest funkcją, więc istnieje dokładnie jeden elem.  $a \in M$  taki, że  $a = v(x)$ .
- ▶ Jeżeli  $t = c \in \text{Const}_{\mathcal{J}}$ , to  $v^h(c) = c^{\mathcal{M}}$ , a  $\mathcal{M}$  jest funkcją, więc istnieje dokł. jeden elem.  $b \in M$  taki, że  $b = c^{\mathcal{M}}$ .
- ▶ Załóżmy indukcyjnie, że istnieje dokł. jeden elem.  $d_i \in M$  taki, że  $d_i = v^h(t_i)$ , gdzie  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ponieważ  $f^{\mathcal{M}}$  jest funkcją, więc istnieje dokł. jeden elem.  $d \in M$  taki, że  $d = f^{\mathcal{M}}(d_1, \dots, d_n) = f^{\mathcal{M}}(v^h(t_1), \dots, v^h(t_n)) = v^h(f(t_1, \dots, t_n))$ . □

- ▶ Zarówno  $v$  jak i  $v^h$  rozszerzającą  $v$  na termy nazywa się wartościowaniem. Ponieważ  $v$  jednoznacznie wyznacza  $v^h$  jest to nieszkodliwe.

# Wartościowania

- ▶ Niech  $\text{Rel}_{\mathcal{J}} = \{R(x, y)\}$ ,  $\text{Fun}_{\mathcal{J}} = \{f(x, y)\}$ ,  $\text{Const}_{\mathcal{J}} = \{c\}$ .
- ▶ Weźmy model  $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \leq, +, 0)$  i następującą interpretację:
  - ▶  $R^{\mathcal{M}}$  to relacja  $\leq$ ,  $f^{\mathcal{M}}$  to funkcja  $+$ ,  $c^{\mathcal{M}}$  to stała 0.
- ▶ Niech  $v(x) = 3$ ,  $v(y) = 7$ .
- ▶ Wtedy  $v^h(f(f(x, y), f(x, c))) = 13$ . Dlaczego?

Jeszcze jakiś przykład...

## Notacja/terminologia/konwencja

Mówiąc o wartościowaniach będziemy zawsze określać je tylko dla zmiennych. To wystarczy – wartości dla termów można wyliczyć znając wartości dla zmiennych.

# Spełnianie

## Definicja (Spełnianie formuł atomowych)

Niech  $\mathcal{J}$  będzie językiem pierwszego rzędu,  $\mathcal{M}$  modelem dla  $\mathcal{J}$ , a  $v: \text{Tm}_{\mathcal{J}} \rightarrow M$  niech będzie wartościowaniem. Dla dowolnej formuły atomowej  $\varphi$  definiujemy relację **spełniania**

$$\mathcal{M} \models_v \varphi$$

następująco:

- ▶  $\mathcal{M} \models_v t_1 = t_2$  wtw gdy  $v(t_1) = v(t_2)$ , dla termów  $t_1, t_2$ .
- ▶  $\mathcal{M} \models_v R(t_1, \dots, t_n)$  wtw gdy  $R^{\mathcal{M}}(v(t_1), \dots, v(t_2))$ , dla  $n$ -argumentowego symbolu relacyjnego  $R$  i termów  $t_1, \dots, t_n$ .

# Spełnianie

## Definicja (Spełnianie formuł złożonych)

- ▶  $\mathcal{M} \models_v \neg\alpha$  wtw gdy  $\mathcal{M} \not\models_v \alpha$
- ▶  $\mathcal{M} \models_v \alpha \wedge \beta$  wtw gdy  $\mathcal{M} \models_v \alpha$  i  $\mathcal{M} \models_v \beta$
- ▶  $\mathcal{M} \models_v \alpha \vee \beta$  wtw gdy  $\mathcal{M} \models_v \alpha$  lub  $\mathcal{M} \models_v \beta$
- ▶  $\mathcal{M} \models_v \alpha \rightarrow \beta$  wtw gdy  $\mathcal{M} \not\models_v \alpha$  lub  $\mathcal{M} \models_v \beta$
- ▶  $\mathcal{M} \models_v \forall x \alpha$  wtw gdy  $\mathcal{M} \models_{v'} \alpha$  dla każdego wartościowania  $v'$ , które różni się od  $v$  *co najwyżej* na zmiennej  $x$ .
- ▶  $\mathcal{M} \models_v \exists x \alpha$  wtw gdy istnieje wartościowanie  $v'$ , które różni się od  $v$  *co najwyżej* na zmiennej  $x$  takie, że  $\mathcal{M} \models_{v'} \alpha$ .

Jeżeli  $\mathcal{M} \models_v \varphi$  zachodzi, to mówimy, że  $\varphi$  jest **spełniona** w  $\mathcal{M}$  przez  $v$ , albo, że  $v$  **spełnia**  $\varphi$  w  $\mathcal{M}$ .

Przykłady...

# Spełnianie

## Obserwacja (spełnianie zależy tylko od zmiennych wolnych)

Dla dowolnej formuły  $\varphi$ , modelu  $\mathcal{M}$  i wartościowań  $v, v': \text{Var} \rightarrow M$ , jeżeli  $v(x) = v'(x)$  dla każdej zmiennej  $x$  wolnej w  $\varphi$ , to

$$\mathcal{M} \models_v \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{v'} \varphi$$

## Szkic dowodu.

- ▶ Indukcją ze względu na złożoność termu pokazujemy, że dla każdego termu  $t$ , jeżeli  $v(x) = v'(x)$  dla każdej zmiennej  $x$  występującej w  $t$ , to  $v(t) = v'(t)$ .
- ▶ Indukcją ze względu na złożoność formuły pokazujemy, że żądana równoważność zachodzi.
- ▶ Krok indukcyjny dla  $\exists$ : załóżmy, że  $\mathcal{M} \models_v \exists x \alpha$ ,
- ▶ wtedy  $\mathcal{M} \models_{v_1} \exists x \alpha$ , w pewnym wartościowaniu  $v_1$  różniącym się od  $v$  co najwyżej na  $x$ ,
- ▶ niech  $v'_1$  różni się od  $v'$  co najwyżej na  $x$  i niech  $v'_1(x) = v'(x)$ ,
- ▶ wtedy  $\mathcal{M} \models_{v_1} \alpha$  wtw gdy  $\mathcal{M} \models_{v'_1} \alpha$ , z założenia indukcyjnego,
- ▶ zatem  $\mathcal{M} \models_{v'} \exists x \alpha$ .
- ▶ W drugą stronę analogicznie.



# Prawdziwość

## Definicja

Niech  $\mathcal{J}$  będzie językiem pierwszego rzędu, a  $\mathcal{M}$  modelem dla  $\mathcal{J}$ .

- ▶ Formuła  $\varphi$  jest **prawdziwa** w  $\mathcal{M}$  (co zapisujemy symbolicznie  $\mathcal{M} \models \varphi$ ) wtw gdy  $\mathcal{M} \models_v \varphi$  dla każdego wartościowania  $v$ .
- ▶ Formuła  $\varphi$  jest **logicznie prawdziwa** jeżeli jest prawdziwa w każdym modelu.

## Fakt

*Niech  $\varphi$  będzie zdaniem a  $\mathcal{M}$  modelem. Następujące warunki są równoważne.*

1.  $\mathcal{M} \models_v \varphi$ , dla pewnego wartościowania  $v$ .
2.  $\mathcal{M} \models_v \varphi$ , dla każdego wartościowania  $v$ .
3.  $\mathcal{M} \models \varphi$ .