

# Wstęp do logiki

## wykład 9

6 grudnia 2022

## Kilka konwencji notacyjnych

- ▶ Formuły często zapisujemy w postaci  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $x_1, \dots, x_n$  są wszystkimi zmiennymi wolnymi w  $\varphi$ .
- ▶ Czasem używamy też  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  dla oznaczenia formuły  $\varphi$ , której zmienne wolne są **spomiędzy**  $x_1, \dots, x_n$ .
- ▶ Skrótowo piszemy  $\varphi(\bar{x})$ , gdzie  $\bar{x}$  oznacza ciąg  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- ▶ Podobne skróty stosujemy do kwantyfikatorów. Piszemy:
  - ▶  $\forall x, y, z \varphi(x, y, z)$  zamiast  $\forall x \forall y \forall z \varphi(x, y, z)$ ,
  - ▶  $\exists x, y, z \varphi(x, y, z)$  zamiast  $\exists x \exists y \exists z \varphi(x, y, z)$ ,
  - ▶  $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$  zamiast  $\forall x_1 \forall x_2, \dots, \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ ,
  - ▶  $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$  zamiast  $\exists x_1 \exists x_2, \dots, \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ ,

# Uniwersalne domknięcie formuły

## Definicja

Niech  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  będzie formułą, której zmienne wolne to  $x_1, \dots, x_n$ .

**Uniwersalne domknięcie**  $\varphi$  to zdanie  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ .

## Fakt

*Niech  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  będzie formułą, której zmienne wolne to  $x_1, \dots, x_n$ .*

*Dla dowolnego modelu  $\mathcal{M}$  mamy*

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \forall x_1, x_2, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

## Dowód.

- ▶ ( $\Rightarrow$ ) Weźmy dowolne wartościowanie  $v$ . Każde wartościowanie  $v'$  różniące się od  $v$  co najwyżej na  $x_1, \dots, x_n$  spełnia  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  z założenia, że lewa strona zachodzi.
- ▶ ( $\Leftarrow$ ) Weźmy dowolne wartościowanie  $v$ . Ponieważ  $v$  różni się od samego siebie co najwyżej na  $x_1, \dots, x_n$ , to  $v$  spełnia  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  z założenia, że prawa strona zachodzi.

□

# Od spełniania do logicznej prawdziwości

## Symbole i definicje – podsumowanie

Dla dowolnej formuły  $\varphi$  (w języku  $\mathcal{J}$ ) i modelu  $\mathcal{M}$  (dla  $\mathcal{J}$ ):

- ▶  $\mathcal{M} \models_v \varphi$  – formuła  $\varphi$  jest spełniona w  $\mathcal{M}$  przez wartościowanie  $v$ .
  - ▶  $\mathcal{M} \models \varphi$  – formuła  $\varphi$  jest spełniona w  $\mathcal{M}$  przez każde  $v$   
–  $\varphi$  jest **prawdziwa** w  $\mathcal{M}$ .
  - ▶  $\mathcal{M} \models \varphi$  dla każdego modelu  $\mathcal{M}$  –  $\varphi$  jest prawdziwa w każdym modelu  
–  $\varphi$  jest **logicznie prawdziwa**  
– czasami mówi się też:  $\varphi$  jest **tautologią rachunku predykatów**.
- 
- ▶ Dla zdań spełnianie i prawdziwość to to samo.
  - ▶ Dla formuł prawdziwość i prawdziwość uniwersalnego domknięcia to to samo.

# Formuły proste

## Definicja

Formułę pierwszego rzędu  $\varphi$  nazywamy **prostą** wtw gdy  $\varphi$  jest albo (i) formułą atomową, albo (ii) formułą postaci  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n \psi$  dla pewnej formuły pierwszego rzędu  $\psi$  i kwantyfikatorów  $Q_1, \dots, Q_n$ , dla pewnego  $n > 0$ .

- ▶ Formuły  $\forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \forall y Q(z, y))$  oraz  $x = y$  są proste.  
Formuła  $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \forall y Q(z, y)$  nie jest prosta.

## Obserwacja

*Dla każdej formuły pierwszego rzędu  $\varphi$ , zbiór jej prostych podformuł jest jednoznacznie wyznaczony.*

## Notacja

Zbiór podformuł prostych formuły  $\varphi$  oznaczamy  $\text{Psub}(\varphi)$ .  
Zatem,  $\text{Psub}(\varphi) = \{\psi : \psi \in \text{Sub}(\varphi) \text{ oraz } \psi \text{ jest prosta}\}$ .

# Szkielet zdaniowy

## Definicja

Niech  $\varphi$  będzie formułą pierwszego rzędu. **Szkielet zdaniowy**  $\varphi$  to zdanie  $\alpha$  w języku rachunku zdań, takie że

$$\varphi = \alpha(p_1/\varphi_1, \dots, p_n/\varphi_n),$$

gdzie  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \text{Psub}(\varphi)$ , a  $\{p_1, \dots, p_n\}$  są wszystkimi zmiennymi zdaniowymi występującymi w  $\alpha$ .

- ▶ Ta definicja nie jest do końca formalna, bo używa postawienia formuł języka *pierwszego rzędu* za *zmienne zdaniowe*.
  - ▶ Przykład:
    - ▶ Niech  $\varphi$  będzie formułą  $\forall x(\exists yR(x, y) \wedge Q(x, z)) \rightarrow \forall xP(x, z)$ .
    - ▶ Obwodząc proste składowe  $\varphi$  dostajemy
- $$\boxed{\forall x(\exists yR(x, y) \wedge Q(x, z))} \rightarrow \boxed{\forall xP(x, z)}$$
- ▶ Każdy prostokąt odpowiada zmiennej zdaniowej, a więc szkieletem zdaniowym  $\varphi$  jest zdanie  $p \rightarrow q$ .

# Związek z rachunkiem zdań

## Definicja

Niech  $\varphi$  będzie formułą pierwszego rzędu, niech  $\text{Psub}(\varphi) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , a  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  niech będzie szkieletem zdaniowym  $\varphi$ . Dla dowolnego modelu  $\mathcal{M}$  i wartościowania  $v: \text{Var} \rightarrow M$ , zdefiniujemy wartościowanie **zerojedynkowe**  $v_{01}: \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$  kładąc

$$v_{01}(p_i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models_v \varphi_i.$$

## Lemat (o wartościowaniach zerojedynkowych)

*Dla  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $v$  i  $v_{01}$  zdefiniowanych jak wyżej mamy*

$$v_{01}(\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \models_v \varphi.$$

## Dowód.

Indukcja ze względu na złożoność  $\alpha$ .

- ▶ Jeśli  $\alpha$  jest zmienną zdaniową, to lemat zachodzi z definicji  $v_{01}$ .
- ▶ Jeśli  $\alpha$  jest formułą złożoną, to lemat wynika z własności wartościowań  $v$  i  $v_{01}$ .



# Związek z rachunkiem zdań

## Twierdzenie

*Podstawienia tautologii rachunku zdań są logicznie prawdziwe.*

## Dowód.

- ▶ Niech  $\alpha$ ,  $p_i$ ,  $\varphi$  i  $\varphi_j$  będą jak w lemacie o wartościowaniach zerojedynkowych.
- ▶ Załóżmy, że  $\alpha$  jest tautologią rachunku zdań i weźmy dowolny model  $\mathcal{M}$  i wartościowanie  $v$ .
- ▶ Dla  $v$  zdefiniujmy  $v_{01}$  jak poprzednio.
- ▶ Z lematu mamy, że  $v_{01}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_v \varphi$ .
- ▶ Ale  $\alpha$  jest tautologią, więc  $v_{01}(\alpha) = 1$ .
- ▶ Zatem  $\mathcal{M} \models_v \varphi$ . □

## Uwaga

Odwrotne zawieranie nie zachodzi. Nie każda formuła logicznie prawdziwa jest podstawieniem tautologii rachunku zdań. Na przykład  $\forall x(x = x)$  nie jest.

# Skrócony zapis wartościowań

## Notacja

Dla formuły  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , wartościowania  $v(x_i) = a_i$ , oraz modelu  $\mathcal{M}$  wygodnie jest pisać

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \quad \text{zamiast} \quad \mathcal{M} \models_v \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Przy tej konwencji notacyjnej mamy:

$$\mathcal{M} \models \forall \varphi(x, \bar{y})[a, \bar{b}] \quad \text{wtw gdy} \quad \forall m \in M : \mathcal{M} \models \varphi(x, \bar{y})[m, \bar{b}]$$

$$\mathcal{M} \models \exists \varphi(x, \bar{y})[a, \bar{b}] \quad \text{wtw gdy} \quad \exists m \in M : \mathcal{M} \models \varphi(x, \bar{y})[m, \bar{b}]$$

gdzie  $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$  są zmiennymi,  $\bar{b} = b_1, \dots, b_n$  są elementami  $M$ , a symbole  $\forall, \exists$  są kwantyfikatorami w metajęzyku (języku naturalnym).

# Wynikanie semantyczne

## Definicja

Niech  $\Gamma$  będzie zbiorem formuł, a  $\varphi$  formułą (w pewnym języku  $\mathcal{J}$ ).  
Piszemy  $\Gamma \models \varphi$  i mówimy, że  $\varphi$  **wynika (semantycznie)** z  $\Gamma$  wtw gdy dla każdego modelu  $\mathcal{M}$  mamy

$$\mathcal{M} \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi.$$

## Uwaga!!!

$\Gamma \models \varphi$  to *nie jest to samo* co

▶ dla każdego modelu  $\mathcal{M}$  [ $\forall v (\mathcal{M} \models_v \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} \models_v \varphi)$ ].

$\Gamma \models \varphi$  to *jest to samo* co

▶ dla każdego modelu  $\mathcal{M}$  [ $\forall v \mathcal{M} \models_v \Gamma \quad \Rightarrow \quad \forall v \mathcal{M} \models_v \varphi$ ].

# Semantyczne twierdzenie o dedukcji

## Twierdzenie (o dedukcji – semantyczne)

Dla dowolnego zbioru zdań  $\Gamma$ , zdania  $\varphi$  i dowolnej formuły  $\psi$ :

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi.$$

## Dowód.

- ▶ ( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że lewa strona zachodzi i rozważmy model  $\mathcal{M}$  taki, że  $\mathcal{M} \models \Gamma$ . Jeżeli  $\mathcal{M} \not\models \varphi$ , to  $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$  z definicji spełniania. Jeżeli  $\mathcal{M} \models \varphi$ , to lewa strona daje, że  $\mathcal{M} \models \psi$ . Zatem  $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ .
- ▶ ( $\Leftarrow$ ) Załóżmy, że prawa strona zachodzi i rozważmy model  $\mathcal{M}$  taki, że  $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$ . Prawa strona daje, że  $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ . Ale  $\mathcal{M} \models \varphi$ , więc z definicji spełniania  $\mathcal{M} \models \psi$ . □

Tw. o dedukcji nie zachodzi dla  $\psi$  nie będącego zdaniem.

Kontrprzykład:  $x = y \models x = z \not\models (x = y) \rightarrow (x = z)$ .

## Dowód.

Najpierw zauważmy, że  $x = y \models x = z$  zachodzi, bo dla każdego modelu  $\mathcal{M}$ , albo  $|M| > 1$  i wtedy  $\mathcal{M} \models x = y$ , albo  $|M| = 1$  i wtedy  $\mathcal{M} \models x = z$ . Weźmy teraz dowodny model  $\mathcal{N}$  taki, że  $|N| > 1$ . Wtedy  $\mathcal{N} \not\models (x = y) \rightarrow (x = z)$ . □

# Teoria

## Definicja

**Teoria** to dowolny zbiór zdań.

- ▶ Teoria  $T$  jest **spełnialna** wtw gdy istnieje model  $\mathcal{M}$  taki, że  $\mathcal{M} \models T$ .
- ▶ Teoria  $T$  jest **zupełna** wtw gdy  $T$  jest spełnialna i dla każdego zdania  $\varphi$  mamy  $T \models \varphi$  lub  $T \models \neg\varphi$ .

## Definicja

Dla dowolnego modelu  $\mathcal{M}$ , **teoria**  $\mathcal{M}$  to zbiór  $\text{Th}(\mathcal{M})$  zdefiniowany następująco:  $\text{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi : \varphi \text{ jest zdaniem i } \mathcal{M} \models \varphi\}$ .

## Twierdzenie

*Dla dowolnego modelu  $\mathcal{M}$  teoria  $\text{Th}(\mathcal{M})$  jest zupełna.*

## Dowód.

Natychmiastowy z definicji spełniania i faktu, że  $\varphi$  jest zdaniem.

## Przykład teorii

Weźmy język z jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym  $\cdot$  (pisanym między argumentami:  $x \cdot y$ ).

- ▶ Niech  $T = \{\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\}$ .
- ▶ Niech  $\varphi$  będzie zdaniem  $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$ .
- ▶ Rozważmy dwa modele  $\mathcal{A} = (A; \cdot^{\mathcal{A}})$  i  $\mathcal{B} = (B; \cdot^{\mathcal{B}})$  takie, że

$\cdot^{\mathcal{A}}$	$a$	$b$		$\cdot^{\mathcal{B}}$	$a$	$b$
	$a$	$b$			$a$	$b$
	$b$	$a$			$a$	$b$

- ▶ Łatwo sprawdzić, że  $\mathcal{A} \models T$  oraz  $\mathcal{B} \models T$ .
- ▶ Ale  $\mathcal{A} \models \varphi$ , a  $\mathcal{B} \models \neg\varphi$  (bo  $a \cdot^{\mathcal{B}} b = b \neq a = b \cdot^{\mathcal{B}} a$ ).
- ▶ Zatem teoria  $T$  nie jest zupełna.