

Arend Heyting

Intuicjonistyczne podstawy matematyki

Zamieszczona poniżej praca Arenda Heytinga to jego wykład wygłoszony 5 września 1930 roku na II Konferencji Epistemologii Nauk Ścisłych*.

Celem wykładu była prezentacja podstawowych założeń intuicjonizmu**. Przypomnijmy, że twórcą intuicjonizmu był matematyk holenderski Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Kierunek ten nawiązywał do poglądów L. Kroneckera, semiintuicjonistów francuskich (do grupy tej należeli: R. L. Baire, E. Borel, H. L. Lebesgue, N. N. Łuzin) i H. Poincarégo. Brouwer dał wyraz swoim poglądom już w rozprawie doktorskiej *Over de Grondslagen der Wiskunde* (O podstawach matematyki) z roku 1907, która zawierała wszystkie podstawowe tezy intuicjonizmu. Ponieważ jednak napisana była po niderlandzku, jej wpływ był mały. Brouwer przedstawił swe poglądy także w wykładzie inauguracyjnym (w związku z objęciem stanowiska profesora na Uniwersytecie w Amsterdamie) *Intuitionisme en formalisme* z roku 1912***.

A. Heyting był uczniem Brouwera i rozwijał idee twórcy intuicjonizmu. Jego główną zasługą w tym zakresie jest sprecyzowanie intuicjonistycznych sposobów wnioskowania poprzez aksjomatyzację intuicjonistycznego rachunku zdań (1930) i rachunku predykatów (1930, wersja ulepszona 1946). Aksjomatyzacja ta była pierwszą próbą prezentacji intuicjonizmu w języku zrozumiałym dla ogółu matematyków i logików, wolnym od niejasnych i wieloznacznych stwierdzeń Brouwera.

W poniższym artykule Heyting przedstawia podstawowe założenia i tezy intuicjonizmu. Stwierdza w szczególności: „Matematyk–intui-

* Por. wprowadzenie do artykułu R. Carnapa *Logicystyczne podstawy matematyki* zamieszczony powyżej.

** Szczegółowe informacje na temat intuicjonizmu znaleźć można w książce R. Murawskiego *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 2001 (wyd. 2), zob. też tegoż, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994 (wyd. 2).

*** Tłumaczenie tego wykładu znaleźć można w książce R. Murawskiego, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994 (wyd. 2), s. 263–275.

cjonista stawia sobie za cel uprawianie matematyki jako naturalnej funkcji intelektu, jako wolnej życiowej aktywności umysłu. Matematyka jest dla niego wytworem ducha ludzkiego. Używa on języka, zarówno naturalnego, jak i sformalizowanego, tylko do komunikowania myśli, to znaczy w celu umożliwienia innym i sobie śledzenia swych rozumowań matematycznych. Taki akompaniament lingwistyczny nie jest ani reprezentacją matematyki, ani tym bardziej samą matematyką”. Intuicjonizm nie przypisuje obiektom matematycznym istnienia transcendentnego, niezależnego od ludzkiego umysłu, przeciwnie, twierdzi, że obiekty te są zdeterminowane w swej istocie przez ludzką myśl. Jedną z konsekwencji tego stanowiska jest odrzucenie prawa wyłącznego środka. Heyting ilustruje to zagadnienie na przykładzie definiowania liczb niewymiernych. Następnie wyjaśnia intuicjonistyczne rozumienie zbioru i gatunku, mówiąc że intuicjonizm traktuje je nie jako ogół ich elementów, ale utożsamia je z wyznaczającą je własnością. To implikuje konieczność odrzucenia definicji niepredykatywnych (por. artykuł R. Carnapa powyżej). Artykuł kończy się rozważaniami na temat intuicjonistycznego rachunku zdań. Heyting wyjaśnia intuicjonistyczny sens spójników międzyzdaniowych oraz fakt, że dowód jakiegoś stwierdzenia to według intuicjonizmu odpowiednia konstrukcja matematyczna. W konkluzji autor stwierdza: „intuicjonizm nie zawiera żadnych arbitralnych założeń ani tym bardziej żadnych sztucznych zakazów, na przykład takich, które pozwalają na eliminację paradoksów. Intuicjonizm, jeśli przyjąć wyjściowe założenia, jest jedynym możliwym sposobem budowania matematyki”.

Matematyk–intuicjonista stawia sobie za cel uprawianie matematyki jako naturalnej funkcji intelektu, jako wolnej życiowej aktywności umysłu. Matematyka jest dla niego wytworem ducha ludzkiego. Używa on języka, zarówno naturalnego, jak i sformalizowanego, tylko do komunikowania myśli, to znaczy w celu umożliwienia innym i sobie śledzenia swych rozumowań matematycznych. Taki akompaniament lingwistyczny nie jest ani reprezentacją matematyki, ani tym bardziej samą matematyką.

Najlepiej będzie, jeśli od razu przejdziemy, zgodnie z aktywistycznym nastawieniem intuicjonistów, do konstrukcji matematyki. Najważniejszym elementem budowy jest tu pojęcie jedności (*Einheit*): jest to podstawowa zasada architektoniczna, na której opiera się ciąg liczb całkowitych. Liczby całkowite należy traktować jak jedności, które różnią się między sobą tylko miejscem w tym ciągu. Pominę tu dalszą analizę tych pojęć, jako że została ona przeprowadzona przez Natorpa w jego *Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*¹ w sposób zgodny w zasadzie w głównych punktach z intui-

¹ P. G. Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1910, xx + 416 (przypis mój – R. M.).

intuicyjnym sposobem myślenia. Muszę jednak zwrócić uwagę na jedną rzecz, gdyż jest ona istotna dla właściwego zrozumienia [naszego stanowiska intuicjonistycznego], że mianowicie nie przypisujemy liczbom całkowitym ani też innym obiektom matematycznym istnienia transcendentnego, niezależnego od naszej myśli. Być może jest prawdą, że każda myśl odwołuje się do obiektu pojmowanego jako istniejący niezależnie od niej, pozostawimy jednak na razie tę kwestię otwartą. W każdym razie obiekt taki nie musi być niezależny od myśli ludzkiej. Nawet jeśli przedmioty matematyki są być może niezależne od poszczególnych aktów myślenia, to jednak przedmioty te są w swej istocie zdeterminowane (*bedingt*) przez ludzką myśl. Ich istnienie jest tylko wtedy zagwarantowane, gdy mogą być określone przez myśl; przysługują im pewne własności tylko wtedy, gdy mogą być w nich rozpoznane przez myśl. Taka możliwość uzyskania wiedzy objawia się nam jedynie poprzez sam akt poznania. Wiara w istnienie transcendentne, niezależne od poznającego podmiotu, musi być odrzucona jako metoda dowodu w matematyce. Tu właśnie leży przyczyna [naszego] zwątpienia w zasadę wyłączonego środka, co za chwilę wyjaśnię na przykładzie.

Oscar Becker zajmował się szczegółowo problemem istnienia w matematyce w swojej książce poświęconej tym kwestiom². Pokazał też rozmaite związki tego pytania z najgłębszymi problemami filozoficznymi.

Wróćmy jednak do sprawy konstrukcji matematyki. Przy wprowadzaniu ułamków jako par liczb całkowitych nie natrafia się na zasadnicze trudności; inaczej jest jednak przy definicji liczb niewymiernych. Zgodnie z propozycją Dedekinda³ definiuje się liczby rzeczywiste poprzez przyporządkowanie każdej liczbie wymiernej predykatu „lewy” lub „prawy” w taki sposób, by zachować naturalny porządek wśród liczb wymiernych. Jeżeli jednak próbujemy przenieść tę definicję w dokładnej postaci do matematyki intuicjonistycznej, to nie mamy żadnej gwarancji, że stała Eulera C jest liczbą rzeczywistą⁴. Nie potrzebujemy definicji liczby C ; wystarczy, że wiemy, iż jest ona związana z pewnym algorytmem, który pozwala zawrzeć C w dowolnie małym przedziale wymiernym. (Przedział wymierny jest to

² Heyting ma tu na myśli książkę O. Beckera *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*, Jahrbuch für Philosophie u. phänomenologische Forschung 1927; wyd. 2: Max Niemeyer Verlag, Tübingen 1973. Oscar Becker (1889–1964) był matematykiem i logikiem niemieckim. Studiował w Oksfordzie i Lipsku, doktoryzował się w Lipsku w 1914 roku u O. Höldera. W latach 1923–1927 był asystentem E. Husserla. Od 1931 roku profesor w Bonn. Zajmował się filozofią matematyki (stosował tu metody fenomenologiczne), historią matematyki oraz logiką modalną (przypis mój – R. M.).

³ Por. R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872. Przekład polski w: R. Murawski *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994 (wyd. 2), s. 136–149 (przypis mój – R. M.).

⁴ Stała Eulera jest jedną z najważniejszych stałych analizy. Związana jest z funkcją gamma oraz z funkcją ζ Riemanna. Definiuje się ją następująco:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = - \int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt = - \int_0^{\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = 0,577215664901 \dots$$

Nie wiadomo do dziś, czy C jest liczbą wymierną, czy niewymierną (przypis mój – R. M.).

przedział, którego końce są liczbami wymiernymi; ponieważ nie zdefiniowaliśmy dotąd żadnej relacji porządku między C i liczbami wymiernymi, znaczenie słowa „zawrzeć” jest tu niejasne. Chodzi o wyznaczanie ciągu przedziałów wymiernych, z których każdy jest zawarty w poprzednim, w taki sposób, że proces ten może być kontynuowany tak długo, aż ostatni przedział będzie mniejszy niż dowolna dana granica.) Algorytm ten nie pozwala jednak rozstrzygnąć, czy dowolna dana liczba wymierna A leży na prawo, czy na lewo od C , czy też może jest równa C . Algorytm taki jest konieczny z punktu widzenia definicji Dedekinda, jeśli interpretować ją z intuicjonistycznego punktu widzenia.

Zarzut wysuwany zazwyczaj pod adresem tego rozumowania sprowadza się do stwierdzenia, że nie ma przecież znaczenia, czy problem ten może być rozstrzygnięty, czy nie, ponieważ jeśli nieprawda, że $A = C$, to albo $A < C$, albo $A > C$, a tę ostatnią alternatywę można rozstrzygnąć w skończonej, choć być może nieznanej liczbie kroków N w procedurze wyliczania liczby C . Wystarczy zarzut ten nieznacznie tylko zmodyfikować, by dojść do sprzeczności. Może on mianowicie znaczyć tylko tyle: albo istnieje liczba N taka, że po N krokach w procedurze wyliczania C okazuje się, że $A < C$ lub $A > C$; albo nie ma takiego N i wtedy oczywiście $A = C$. Ale, jak widzieliśmy, istnienie liczby C nie oznacza nic innego jak możliwość aktualnego wskazania liczby o żądanych własnościach, a nieistnienie N oznacza możliwość wyprowadzenia sprzeczności z tej własności. Ponieważ nie wiemy, czy któraś z tych możliwości ma miejsce, nie możemy twierdzić, że N istnieje, czy że nie istnieje. W tym sensie można powiedzieć, że nie wolno tu stosować zasady wyłączonego środka.

Definicja Dedekinda nie może być zatem w swej pierwotnej postaci stosowana w matematyce intuicjonistycznej. Brouwer poprawił ją następująco: wyobraźmy sobie liczby wymierne uporządkowane w jakiś sposób; dla uproszczenia ograniczmy się do liczb z przedziału jednostkowego i ustalmy następujący porządek:

$$0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, \dots$$

Liczy rzeczywiste są wyznaczone przez przekroje w tym ciągu – to znaczy za pomocą reguły, która każdej liczbie wymiernej z tego ciągu przypisuje predykat „lewy” lub predykat „prawy” tak, że zachowany jest naturalny porządek wśród liczb wymiernych. W każdym kroku dopuszczamy jednak, by jednej liczbie nie został przyporządkowany żaden predykat. Na przykład reguła taka może wyglądać następująco:

$$0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, \dots \\ L, P, L, L, ?, L, \dots$$

Tutaj [ułamkowi] $2/3$ chwilowo nic nie przyporządkowano; nie musimy wiedzieć, czy kiedyś zostanie mu coś przypisane, może być jednak i tak, że $3/4$ będzie taką wyłączoną liczbą, a [ułamkowi] $2/3$ zostanie przyporządkowany predykat L .

Łatwo podać przekrój dla stałej C Eulera. Niech d_n będzie najmniejszą różnicą pomiędzy dwoma sąsiednimi liczbami wśród pierwszych n elementów naszego wyjściowego ciągu. Jeżeli teraz będziemy wyliczali liczbę C tak długo, aż otrzymamy przedział wymierny i , który jest mniejszy niż d_n , to co najwyżej jedna z tych

n liczb może znaleźć się w [przedziale] i . Jeżeli taka liczba istnieje, to staje się ona wyróżnioną liczbą przekroju. Widzimy więc, jak ściśle definicja Brouwera związana jest z faktycznym wyznaczaniem liczb rzeczywistych.

Możemy teraz wykonać następny ważny krok. Możemy mianowicie odrzucić żądanie, by ciąg predykatów był wyznaczony za pomocą [pewnego] prawa dla nie-skończenia wielu miejsc. Wystarczy, jeśli będzie on wyznaczany krok po kroku w pewien sposób, na przykład za pomocą wolnych wyborów. Ciągi takie nazywamy nieograniczenie przedłużalnymi. Rozszerzamy więc definicję liczb rzeczywistych tak, że dopuszczamy nie tylko ciągi wyznaczone przez jakąś regułę, ale też ciągi nieograniczenie przedłużalne. Zanim przejdę do dokładniejszego zbadania tej definicji, podam prosty przykład. Zaczynam od takiego oto ciągu wyborów (*Wahlfolge*) typu „lewy–prawy”:

0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, ...
L, P, L, L, P, L, P, L, L, ...

Nie można tu jeszcze odpowiedzieć na pytanie, jaki predykat odpowiada [ułamkowi] $3/5$, ponieważ trzeba dopiero zdecydować, jaki predykat mu przypisać. Na podobne pytanie w stosunku do [ułamka] $3/4$ można odpowiedzieć: „prawy”, ponieważ będzie tak dla dowolnego przedłużenia naszego ciągu⁵. W ogólności można udzielić określonej odpowiedzi tylko na te pytania na temat ciągów nieograniczenie przedłużalnych, które dotyczą wszelkich możliwych przedłużeń ciągu. Inne, jak na przykład powyższe pytanie o predykat przypisany [ułamkowi] $3/5$, należy traktować jako bezsensowne. Ciągi wyboru zastępują zatem nie tyle pojedyncze ciągi wyznaczone przez jakieś prawa, ile raczej klasę wszelkich możliwych praw. Ciąg wyboru typu „lewy–prawy”, dla którego wolność wyboru ograniczona jest tylko przez warunki wynikające z naturalnego porządku między liczbami wymiernymi, wyznacza nie jedną liczbę rzeczywistą, a zbiór (*Menge*) wszystkich liczb rzeczywistych albo kontinuum. O ile zwykle myślimy o każdej liczbie rzeczywistej jako zdefiniowanej osobno i następnie dopiero myślimy o nich wszystkich razem, o tyle tutaj definiuje się kontinuum jako pewną całość. Ograniczając swobodę wyboru za pomocą wcześniej ustalonych reguł, otrzymuje się zbiory liczb rzeczywistych; jeżeli na przykład zażądać, by ciąg zaczynał się tak, jak to powyżej napisaliśmy, to definiuję w ten sposób zbiór liczb rzeczywistych między $1/2$ i $2/3$. Nieograniczenie przedłużalny ciąg staje się ciągiem wyznaczonym przez pewne prawo, jeśli na wolność wyboru będziemy nakładali coraz to nowe ograniczenia.

Używam tu słowa „zbiór” (*Menge*) dokładnie w sensie Brouwera⁶. Jego definicja zbioru jest uogólnieniem tego pojęcia. Oprócz ciągów wyboru rozważa on także ciągi, które otrzymuje się z ciągów wyboru za pomocą [pewnych] praw [opisujących] przy-

porządkowanie. Ze zbiorem związane są (*eine Menge enthält*) dwie zasady. Pierwsza podaje, jakie wybory liczb naturalnych są dopuszczalne po wykonaniu już pewnej skończonej liczby dozwolonych wyborów. Prawo takie musi być tak określone, że dla każdego skończonego ciągu dozwolonych wyborów znany jest co najmniej jeden nowy dozwolony wybór. Przykładem takiej zasady może być naturalny porządek liczb wymiernych w przypadku rozważanego przez nas ciągu wyborów „lewy–prawy”. Druga zasada związana ze zbiorami mówi, że każdemu dozwolonemu wyborowi przyporządkowany jest pewien obiekt matematyczny, który oczywiście zależeć może także od wyborów dokonanych wcześniej. Przy tym to przyporządkowanie zostaje określone przez konkretny wybór i dalszym wyborom nie przyporządkowuje się już niczego więcej. Ciąg, który powstaje z dozwolonego ciągu wyborów poprzez zasadę przyporządkowywania, nazywa się elementem zbioru.

Aby podciągnąć nasz przykład zbioru liczb wymiernych między $1/2$ i $2/3$ pod tę definicję ogólną, zastąpmy predykaty „lewy”, „prawy”, „chwilowo nieokreślony” przez 1, 2, 3; wyprowadzimy prawo dozwolonych wyborów z naturalnego porządku między liczbami wymiernymi oraz z zadanego warunku, by ciąg zaczynał się zawsze w pewien określony sposób; jako prawo przyporządkowania bierzemy odwzorowanie identyfikacyjne.

Zbiór nie jest ogółem swych elementów (stwierdzenie takie nie ma sensu, jeśli nie traktuje się zbiorów jako istniejących same w sobie), lecz utożsamia się go z definiującym go prawem. Mówimy, że dwa elementy zbioru są równe, jeśli dla dowolnego n w obu stoją równe obiekty na miejscu n -tym. Równość elementów zbioru nie oznacza więc tego, że są one tym samym elementem. Aby były tym samym elementem, muszą być przyporządkowane w tym samym zbiorze temu samemu ciągowi wyboru. Byłoby mało praktyczne nazywanie dwóch obiektów matematycznych równymi tylko wtedy, gdy są one tym samym przedmiotem. Każdy rodzaj przedmiotów musi mieć swą własną definicję równości.

Gatunkami (*Spezies*) nazywa Brouwer zbiory (w terminologii klasycznej) określone przez pewną charakterystyczną własność ich elementów. Gatunek, podobnie jak zbiór, traktujemy nie jako ogół jego elementów, ale utożsamiamy z wyznaczającą go własnością. Definicje niepredykatywne są niemożliwe dlatego – i intuicjoniści traktują to jako coś oczywistego – że elementami gatunku mogą być tylko obiekty zdefiniowane już wcześniej. W ten sposób gatunki wprowadzane są krok po kroku. Na pierwszym poziomie są te gatunki–zbiory (*Mengenspezies*), które są wyznaczone przez własność bycia identycznym z elementem pewnego konkretnego zbioru. A zatem każdemu zbiorowi M odpowiada gatunek–zbiór tych elementów zbiorowych (*Mengenelemente*), które są równe pewnemu elementowi M ⁷. Gatunek pierwszego rzędu może zawierać elementy zbiorowe oraz gatunki–zbiory. Z kolei gatunki drugiego rzędu mogą poza tym zawierać jako elementy gatunki pierwszego rzędu itd.

Wprowadzenie ciągów nieograniczenie przedłużalnych nie jest konieczną konsekwencją intuicjonistycznego punktu widzenia. Matematykę intuicjonistyczną

⁵ W oryginale mowa tu błędnie o ułamku $4/5$ (przypis mój – R. M.).

⁶ W języku angielskim oddaje się to słowo przez *spread* – por. tłumaczenie tej pracy zamieszczone w antologii P. Benacerrafa i H. Putnama *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, wyd. 2, Cambridge 1983, s. 52–61, tłum. E. Putnam, G. J. Massey (przypis mój – R. M.).

⁷ Ta definicja gatunku–zbioru została mi podana przez profesora Brouwera.

można budować i bez ciągów wyboru. Następujące twierdzenie teoriomnogościowe na temat kontinuum pokazuje, jak bardzo jednak matematyka zostałaby przez to zubożona. Dowód tego twierdzenia będzie też służył jako przykład intuicjonistycznego sposobu rozumowania.

Niech dana będzie pewna reguła, na mocy której każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowana jest pewna liczba naturalna jako jej numer. Załóżmy, że liczbom a i b zostały przyporządkowane różne liczby, na przykład 1 i 2. Możemy teraz za pomocą prostej konstrukcji określić trzecią liczbę c o następującej własności: w dowolnym otoczeniu c , niezależnie od tego, jak małym, istnieje liczba, której przyporządkowane jest coś innego niż [liczbie] c ; to znaczy każdy skończony odcinek początkowy przekroju wyznaczającego c może być przedłużony tak, że otrzymamy liczbę, której przyporządkowano coś innego niż [liczbie] c . Definiujemy teraz liczbę d za pomocą ciągu wyboru następująco: zaczynamy tak, jak z c , ale zastrzegamy sobie możliwość dokonania dalej innych wyborów niż to było dla c . Oczywiście numer liczby d nie jest określony po dokonaniu jakiegokolwiek ustalonej wcześniej liczby kroków. W konsekwencji liczbie d nie jest przyporządkowany żaden numer. Przeczy to jednak założeniu, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada jakiś numer. A zatem nasze założenie, że dwie liczby a i b mają różne numery, okazuje się sprzeczne. Ponieważ dwie liczby naturalne, których nie można rozróżnić, są tą samą liczbą, otrzymujemy następujące twierdzenie: jeżeli każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowany jest pewien numer, to ten sam numer przyporządkowany jest wszystkim liczbom.

Jako przypadek szczególny otrzymujemy [twierdzenie]: jeżeli podzielić kontinuum na dwa podgatunki (*Teilspezies*) tak, że każdy element należy do jednego i tylko do jednego z nich, to jeden z tych podgatunków jest pusty, a drugi równy kontinuum.

Nie można na przykład rozłożyć kontinuum jednostkowego na gatunek liczb leżących między 0 a $1/2$ i gatunek liczb między $1/2$ i 1. Powyższa konstrukcja daje bowiem liczbę, dla której nie trzeba nigdy rozstrzygać, czy jest ona większa, czy mniejsza od $1/2$. Także twierdzenia o ciągłości funkcji określonych w pewnym przedziale zależą od powyższego twierdzenia. Twierdzenie Brouwera o jednostajnej ciągłości każdej funkcji pełnej⁸ wykraczają jednak poza te wyniki.

Chcemy teraz zapytać, co stanie się z udowodnionym wyżej twierdzeniem, gdy nie dopuści się w matematyce żadnych ciągów nieograniczenie przedłużalnych. W tym przypadku miejsce kontinuum zajmie gatunek liczb określonych przez ciągi wyznaczone za pomocą pewnych praw. Definicja ta jest dopuszczalna, jeśli rozumieć ją tak, że dana liczba należy do tego gatunku tylko wtedy, gdy istnieje reguła, która pozwala nam rzeczywiście kolejno wyznaczyć wszystkie predykaty tego ciągu.

Powyższy dowód pozostaje poprawny w tym przypadku tylko wtedy, gdy uda nam się zdefiniować liczbę d za pomocą pewnego ciągu wyznaczonego za pomocą

⁸ Por. A. S. Troelstra, D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, t. 1, Amsterdam 1988, s. 305–307 (przypis mój – R. M.).

jakiej reguły, a nie przez ciąg wyborów. Jest to możliwe, gdy posłużymy się jakimś nierozwiązanym problemem, na przykład problemem, czy ciąg 0123456789 pojawia się w rozwinięciu dziesiętnym liczby π ; to, czy dopuścimy, by n -ty predykat w ciągu predykatów dla d mógł różnić się od n -tego predykatu dla c , możemy uzależnić od tego, czy taki ciąg [cyfr] występuje na n -tym miejscu po przecinku w π . Dowód ten przestaje funkcjonować, gdy tylko problem ten zostanie rozwiązany. Wtedy można go jednak zastąpić przez inny nierozwiązany problem, jeżeli taki istnieje. Nasze twierdzenie dla ciągów wyznaczonych przez pewne prawo można udowodnić tylko przy założeniu, że zawsze istnieją problemy nierozwiązane. Dokładniej: twierdzenie to jest prawdziwe, gdy istnieją dwie liczby wyznaczone przez ciągi określone przez pewne prawa, takie, że pytanie, czy są one równe, czy nie, jest problemem, w przypadku którego można dowieść, że jest nierozwiązalny; twierdzenie to jest fałszywe, gdy istnienie dwu takich liczb jest sprzeczne. Problem, jaki tu powstaje, jest jednak nie do pokonania. Nawet tutaj ciągi wyboru okazują się ważniejsze niż ciągi wyznaczone przez prawa – te pierwsze bowiem uniezależniają matematykę od pytania o istnienie problemów nierozstrzygalnych.

Zakończmy nasze rozważania o konstrukcji matematyki, by powiedzieć teraz kilka słów o intuicjonistycznym rachunku zdań. Rozróżniamy tu zdania (*Aussagen*) i stwierdzenia (*Sätze*): stwierdzenie jest asercją zdania. Zdanie matematyczne wyraża pewne oczekiwanie. Na przykład zdanie „Stała Eulera C jest liczbą wymierną” wyraża oczekiwanie znalezienia dwóch liczb całkowitych a i b takich, że $C = a/b$. Być może zamiast słowa „oczekiwanie” lepsze jest tu używane przez fenomenologów słowo „intencja”. Używamy słowa „zdanie” także na oznaczenie intencji wyrażonej przez to zdanie. Intencja, jak powiedzieliśmy to już wyżej, odwołuje się nie do stanu rzeczy pomyślanego jako istniejący niezależnie od nas, ale do doświadczenia pomyślanego jako możliwe, jak to wynika wyraźnie z przytoczonego wyżej przykładu.

Stwierdzenie pewnego zdania oznacza spełnienie intencji, na przykład stwierdzenie „ C jest liczbą wymierną” oznacza, że istotnie znaleziono wymagane dwie liczby całkowite. Odróżniam stwierdzenie od zdania za pomocą znaku afirmacji \vdash pochodzącego od Fregego⁹ i używanego też przez Russella i Whiteheada w tym samym celu. Stwierdzenie pewnego zdania nie jest zdaniem, ale jest ustaleniem faktu empirycznego, a mianowicie spełnienia intencji wyrażonej przez to stwierdzenie.

Funkcja logiczna jest to pewna metoda otrzymywania z danego zdania innych zdań. Funkcją taką jest negacja; jej znaczenie opisał dokładnie Becker, nawiązując do Husserla. Dla niego negacja jest czymś pozytywnym, a mianowicie intencją sprzeczności zawartą w wyjściowej intencji. Zdanie „ C nie jest liczbą wymierną” oznacza więc oczekiwanie, że z założenia „ C jest wymierne” można otrzymać sprzeczność. Należy zauważyć, że negacja zdania odwołuje się zawsze do pewnej

⁹ Por. G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle 1879 (przypis mój – R. M.).

procedury dowodowej prowadzącej do sprzeczności, nawet jeśli zdanie wyjściowe nie mówi nic o żadnej procedurze dowodowej. Jako symbolu negacji używać będą [znaku] \neg .

Dla prawa wyłączonego środka potrzebna jest nam jeszcze funkcja logiczna „albo–albo”. $p \vee q$ oznacza intencję, która może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest co najmniej jedna z intencji p i q . Formuła dla prawa wyłączonego środka ma teraz postać: $\vdash p \vee \neg p$. Można głosić to prawo dla określonego zdania p tylko wtedy, gdy p zostało udowodnione lub też sprowadzone do sprzeczności. Zatem dowód, że prawo wyłączonego środka jest prawem ogólnym, musiałby polegać na podaniu metody, za pomocą której, gdy dane jest dowolne zdanie, zawsze można udowodnić albo samo to zdanie, albo jego negację. Formuła $p \vee \neg p$ oznacza więc oczekiwanie konstrukcji matematycznej (metody dowodu), która czyni zadość temu żądaniu; znaczy to, że formuła ta jest zdaniem matematycznym, a pytanie o jej prawdziwość jest pytaniem matematycznym, które może być rozwiązane za pomocą metod matematycznych, o ile w ogóle jest rozwiązywalne. W tym sensie logika zależy od matematyki.

Zakończę pewnymi uwagami na temat rozwiązywalności problemów matematycznych. Problem podaje się za pomocą intencji, dla której szukamy spełnienia. Problem jest więc rozwiązany albo wtedy, gdy spełni się intencję poprzez [podanie pewnej] konstrukcji, albo gdy się udowodni, że prowadzi ona do sprzeczności. Pytanie o rozwiązywalność redukuje się więc do pytania o dowodliwość.

Dowód jakiegoś stwierdzenia jest konstrukcją matematyczną, którą z kolei można traktować w sposób matematyczny. Intencja takiego dowodu prowadzi zatem do nowego zdania. Jeśli oznaczyć przez $+p$ zdanie: „zdanie p jest dowodliwe”, to $+$ jest funkcją logiczną, mianowicie „dowodliwością”. Stwierdzenia (*Behauptungen*) $\vdash p$ i $\vdash +p$ mają to samo znaczenie. Istotnie, jeśli p jest udowodnione, to udowodniona jest też dowodliwość p , a gdy udowodnione jest $+p$, to została spełniona intencja [podania] dowodu p , to znaczy p zostało udowodnione. Mimo to zdania p i $+p$ nie są identyczne, co najlepiej pokazać na przykładzie. Przy obliczaniu stałej Eulera C może się zdarzyć, że pewna liczba wymierna, powiedzmy A , zawarta jest nadzwyczaj długo w przedziale, w którym przybliżamy coraz bardziej C , tak że dochodzimy w końcu do przypuszczenia, że C jest równe A , to znaczy oczekujemy, że przy dalszych obliczeniach ciągle znajdować się będziemy w naszym przedziale A . Przypuszczenie takie nie jest jednak żadną miarą dowodem, że tak zawsze będzie. Zdanie $+(C = A)$ mówi więc więcej niż zdanie $(C = A)$.

Jeśli zastosować teraz do obu tych zdań negację, to otrzyma się nie tylko dwa różne zdania $\neg p$ oraz $\neg +p$; także stwierdzenia $\vdash \neg p$ oraz $\vdash \neg +p$ są różne. $\vdash \neg +p$ znaczy, że założenie [istnienia] konstrukcji, której żąda $+p$, jest sprzeczne; proste oczekiwanie p nie musi prowadzić jednak do sprzeczności. W naszym przykładzie jest więc tak: Przypuśćmy, że wykazaliśmy sprzeczność założenia, iż istnieje konstrukcja, która dowodzi, że A leży w każdym przedziale zawierającym C ($\vdash \neg +p$). Założenie jednak, że przy wyliczaniu C rzeczywiście zawsze znajdziemy A wewnątrz naszego przedziału, nie musi prowadzić do sprzeczności. Do

pomyślenia jest nawet, że możemy dowieść, iż to ostatnie założenie nigdy nie prowadzi do sprzeczności, a więc że możemy jednocześnie stwierdzić, iż $\vdash \neg +p$ oraz $\vdash \neg \neg p$. W takim przypadku pytanie, czy $C = A$, byłoby istotnie nierozstrzygalne.

Rozróżnienie między p i $+p$ znika, gdy [już] w samym p zamierzona (*intendiert*) jest pewna konstrukcja, jako że możliwości pewnej konstrukcji można dowieść tylko przez podanie samej tej konstrukcji. Jeśli ograniczyć się tylko do takich zdań, w których żąda się [podania] pewnej konstrukcji, to funkcja logiczna dowodliwości w ogóle się nie pojawia. Można wprowadzić takie ograniczenie, rozważając tylko zdania postaci „ p jest dowodliwe” albo, innymi słowy, przyjmując, że do każdej intencji dołączona jest intencja jej spełnienia. W taki sposób należy rozumieć logikę intuicjonistyczną, rozwijaną dotąd bez użycia funkcji $+$. Wprowadzenie dowodliwości prowadziłyby do wielkich komplikacji. Z powodu małego znaczenia praktycznego nie warto zajmować się szczegółowo tymi komplikacjami¹⁰. Tutaj pojęcie to pozwoliło nam zobaczyć, jak pojmować problemy istotnie nierozstrzygalne.

Osiągnąłem mój cel, jeśli udało mi się pokazać, że intuicjonizm nie zawiera żadnych arbitralnych założeń ani tym bardziej żadnych sztucznych zakazów, na przykład takich, które pozwalają na eliminację paradoksów. Intuicjonizm, jeśli przyjąć wyjściowe założenia, jest jedynym możliwym sposobem budowania matematyki.

¹⁰ Pytanie rozważane w tym paragrafie zostało w pełni wyjaśnione dopiero w dyskusji z H. Freudenthałem, która miała miejsce po konferencji. Wyniki tej dyskusji znalazły się w tym tekście.