Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna!

Imię i nazwisko

1 Niewymierność $\sqrt{2}$

Poniżej znajduje się standardowy dowód na niewymierność pierwiastka z dwóch.

Definicja 1.1 *Liczba jest* wymierna *jeśli da się ją przedstawić w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi i $b \neq 0$.*

Twierdzenie 1.1 *Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.*

Załóżmy, dla dowodu niewprost, że tak nie jest. Wówczas istnieją takie liczby naturalne a i b ($b \neq 0$), że

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{1}$$

(a i b mogą być tak dobrane by ich największy wspólny dzielnik to 1, tzn. ułamek $\frac{a}{b}$ jest *prosty*. Załóżmy, że tak właśnie jest.)

W związku z tym, że ułamek $\frac{a}{b}$ jest prosty, przynajmniej jedna z liczb a, b nie może być parzysta.

Z równania (1) mamy dalej:

$$2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

a zatem (po pomnożeniu obu stron przez b^2):

$$a^2 = 2 \cdot b^2 \tag{2}$$

Innymi słowy a^2 jest liczbą parzystą (równa się dwa razy jakaś liczba, czyli jest podzielne przez dwa). Wynika stąd, że również a jest liczbą parzystą, gdyż liczba nieparzysta podniesiona do kwadratu nie może dać liczby parzystej. Zapiszmy więc a jako $2k$, gdzie k jest jakąś dowolną liczbą naturalną ($2k$ po prostu oznacza liczbę parzystą, tzn, podzielną przez 2). Podstawmy $2k$ zamiast a do równania (2), otrzymamy wówczas $(2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$. Dzieląc obie strony przez 2 otrzymujemy:

$$b^2 = 2k^2 \tag{3}$$

Oznacza to, że b^2 również jest liczbą parzystą, a co ważniejsze, że samo b także jest parzyste! Założyliśmy jednak, że ułamek a/b jest prosty, co oznacza, że a i b naraz nie mogą być parzyste, a to właśnie wynika z naszych dotychczasowych rozważań! Zatem założenie, że $\sqrt{2}$ może równać się jakiemuś ułamkowi prostemu[1] prowadzi do sprzeczności, czyli nie może zostać przyjęte. Zatem ta liczba jest niewymierna!

[1] Wiemy, że każdy ułamek da się sprowadzić do postaci prostej, więc z tego wynika, że $\sqrt{2}$ nie może równać się żadnemu ułamkowi.