

**Axioms:**

- Ax.1.  $A \rightarrow (B \rightarrow B)$  Ax.7.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$   
 Ax.2.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$  Ax.8.  $A \rightarrow (A \vee B)$   
 Ax.3.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$  Ax.9.  $B \rightarrow (A \vee B)$   
 Ax.4.  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$  Ax.10.  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$   
 Ax.5.  $(A \wedge B) \rightarrow A$  Ax.11.  $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$   
 Ax.6.  $(A \wedge B) \rightarrow B$

**Reguła:**  $A, A \rightarrow B \vdash B$  (RO - reguła odrywania) (Modus Ponens)

**Twierdzenie o dedukcji:**  $\Phi, \alpha \vdash \beta$  wtw, gdy  $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta$

**Twierdzenie:**  $\Phi \vdash \alpha$  wtw, gdy  $\Phi \cup \{\sim \alpha\}$  jest sprzeczne.

**Twierdzenie:**  $\Phi \vdash \sim \alpha$  wtw, gdy  $\Phi \cup \{\alpha\}$  jest sprzeczne.

1. Wykonaj następujące podstawienia.

•  $e(p) = p \rightarrow p, \quad e(q) = p \wedge q, \quad \phi = (p \rightarrow p) \rightarrow q, \quad h^e(\phi) = ?$

•  $e(p) = q, \quad e(q) = p, \quad \phi = r \rightarrow (p \wedge q), \quad h^e(\phi) = ?$

•  $e(p) = r \rightarrow q, \quad e(q) = r \wedge p \rightarrow q, \quad \phi = (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q, \quad h^e(\phi) = ?$

Sprawdź, czy formuła  $((r \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge p \rightarrow q))) \rightarrow (r \wedge p \rightarrow q)$  jest tautologią.

2.  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

1.  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

Ax. 1

2.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$

Ax. 1

3.  $\alpha \rightarrow \alpha$

RO

3.  $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

1.  $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

Ax. 1

2.  $(\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))$

Ax. 3

3.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

RO

4.  $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

(RPI)

1.  $\alpha \rightarrow \beta$

2.  $\beta \rightarrow \gamma$

3.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Ax. 2

4.  $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

RO

5.  $\alpha \rightarrow \gamma$

RO

5. Wykaż, że  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ .

(RKom)

6. Wykaż, że  $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$  (Ax.1 and Ax.2)

7.  $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$

8.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$