DEF. MODELU DLA JĘZYKA

Niech J będzie językiem pierwszego rzędu. Struktura

$$\mathcal{M} = (\mathrm{M}, \{P^{\mathcal{M}}: P \in \mathrm{Rel}_J\}, \{f^{\mathcal{M}}: f \in \mathrm{Fun}_J\}, \{c^{\mathcal{M}}: c \in \mathrm{Const}_J\})$$

jest *modelem dla języka J*, jeśli

1. M jest niepustym zbiorem zwanym *uniwersum* modelu,
2. Dla każdego n-argumentowego symbolu $P \in \mathrm{Rel}_J$, istnieje relacja $P^{\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{M}^n$,
3. Dla każdego n-argumentowego symbolu $f \in \mathrm{Fun}_J$, istnieje funkcja $f^{\mathcal{M}}: \mathrm{M}^n \Rightarrow \mathrm{M}$,
4. Dla każdej stałej $c \in \mathrm{Const}_J$, istnieje wyróżniony element $c^{\mathcal{M}} \in \mathrm{M}$.

Wartościowaniem nazwiemy każdą funkcję v: Var $\Rightarrow$ M.

Każde wartościowanie v można jednoznacznie rozszerzyć do wartościowania v^*: $\mathrm{Term}_J \Rightarrow \mathrm{M}$ następująco:

1. $v^*(x) = v(x)$, dla każdej zmiennej indywiduowej x;
2. $v^*(c) = c^{\mathcal{M}}$, dla każdej stałej indywiduowej c;
3. $v^*(f(t_1,\ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(v^*(t_1),\ldots, v^*(t_n))$, dla każdego n-argumentowego symbolu funkcyjnego f i dla dowolnych termów $t_1,\ldots, t_n$.

DEF. SPEŁNIANIA FORMUŁ ATOMOWYCH

Niech J będzie językiem pierwszego rzędu, $\mathcal{M}$ modelem dla J, zaś v: $\mathrm{Term}_J \Rightarrow \mathrm{M}$ wartościowaniem. Powiemy, że formuła atomowa α jest spełniona w modelu $\mathcal{M}$ przez wartościowanie v, symbolicznie $\mathcal{M} \models_v \alpha$, gdy zachodzą następujące warunki

(a)	$\mathcal{M} \models_v t_1 = t_2$	wtw	$v(t_1) = v(t_2)$, dla termów t_1, t_2
(b)	$\mathcal{M} \models_v R(t_1,\ldots, t_n)$	wtw	$R^{\mathcal{M}}(v(t_1),\ldots, v(t_n))$, dla n-argumentowego symbolu predykatywnego (relacyjnego) R i dla termów $t_1,\ldots, t_n$

DEF. SPEŁNIANIA FORMUŁ ZŁOŻONYCH

Niech J będzie językiem pierwszego rzędu, $\mathcal{M}$ modelem dla J, zaś v: $\mathrm{Term}_J \Rightarrow \mathrm{M}$ wartościowaniem. Spełnienie w modelu $\mathcal{M}$ przez wartościowanie v formuł złożonych określają następujące warunki:

(c)	$\mathcal{M} \models_v \neg\alpha$	wtw	$\mathcal{M} \not\models_v \alpha$
(d)	$\mathcal{M} \models_v \alpha \wedge \beta$	wtw	$\mathcal{M} \models_v \alpha$ i $\mathcal{M} \models_v \beta$
(e)	$\mathcal{M} \models_v \alpha \vee \beta$	wtw	$\mathcal{M} \models_v \alpha$ lub $\mathcal{M} \models_v \beta$
(f)	$\mathcal{M} \models_v \alpha \rightarrow \beta$	wtw	$\mathcal{M} \not\models_v \alpha$ lub $\mathcal{M} \models_v \beta$
(g)	$\mathcal{M} \models_v \forall x\, \alpha$	wtw	$\mathcal{M} \models_w \alpha$ dla każdego wartościowania w, które różni się od v co najwyżej na zmiennej x.
(h)	$\mathcal{M} \models_v \exists x\, \alpha$	wtw	$\mathcal{M} \models_w \alpha$ dla pewnego wartościowania w, które różni się od v co najwyżej na zmiennej x.

„wartościowanie w różni się od v co najwyżej na zmiennej x" =

„dla każdej zmiennej indywiduowej y, jeśli $y \neq x$, to $w(y) = v(y)$"

Date: 22.4.2026.

1. Niech $\mathcal{A} = \big(\mathbb{N};\, c^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}\big)$, $c^{\mathcal{A}} = 1$, $f^{\mathcal{A}}(x) = x + 1$, $g^{\mathcal{A}}(x, y) = x + y$. Niech wartościowanie v będzie dane przez $v(x) = 2$, $v(y) = 3$. Oblicz wartości następujących termów w $\mathcal{A}$:
   (a) $f(x)$,
   (b) $g(f(x), c)$,
   (c) $g(g(x, c), y)$,
   (d) $f(f(y)))$,
   (e) $f(g(f(x), y))$.

2. Niech $\mathcal{A}$ będzie jak wyżej, ale rozszerzona o predykaty:

$$P^{\mathcal{A}} = \{0, 2\}, \qquad R^{\mathcal{A}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}.$$

   Niech $v(x) = 2$, $v(y) = 3$. Sprawdź, czy
   (a) $\mathcal{A} \models_v P(x)$,
   (b) $\mathcal{A} \models_v P(f(y))$, $\mathcal{A} \models_v R(x, y)$, $\mathcal{A} \models_v R(g(x, c), f(y))$,
   (c) $\mathcal{A} \models_v g(x, y) = f(c)$,
   (d) $\mathcal{A} \models_v P(x) \vee P(y)$,
   (e) $\mathcal{A} \models_v R(x, y) \wedge P(f(y))$,
   (f) $\mathcal{A} \models_v R(y, x) \to P(g(x, y))$,
   (g) $\mathcal{A} \models_v \neg P(g(f(x), y)) \leftrightarrow R(x, f(x))$.

3. Niech $\mathcal{B} = \big(\{0, 1, 2\};\, <^{\mathcal{B}}, s^{\mathcal{B}}\big)$, gdzie $<^{\mathcal{B}}$ jest zwykłym porządkiem na $\{0, 1, 2\}$, i funkcja $s^{\mathcal{B}}$ jest

$$s(0) = 1, \qquad s(1) = 2, \qquad s(2) = 2.$$

   Niech $v(x) = 0$, $v(y) = 0$. Sprawdź, czy prawdziwe są:
   (a) $\mathcal{B} \models_v \exists y\, (x < y \wedge \forall z\, (y < z \to z = y))$,
   (b) $\mathcal{B} \models_v \exists y\, (s(y) = x)$,
   (c) $\mathcal{B} \models_v \forall y\, (x < y \to \exists z\, (s(z) = y))$,
   (d) $\mathcal{B} \models_v \exists y \forall z\, (z < y \vee z = y)$.