

---

Dla formuły  $\varphi$ , zmiennej  $x$  oraz termu  $t$ ,  $\varphi[x/t]$  jest formułą otrzymaną z  $\varphi$  przez zastąpienie każdego wolnego wystąpienia  $x$  termem  $t$ .

---

1. Rozważ następujące formuły.

(a)  $\alpha_1 = P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

(b)  $\alpha_2 = \forall x P(x) \rightarrow P(y)$

(c)  $\alpha_3 = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$

(c)  $\alpha_4 = \exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

(c)  $\alpha_5 = \forall x(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow (\exists y R(x, y, z) \wedge \forall z R(z, y, y))$

W każdym przypadku wykonaj podstawienia  $\alpha_i[x/y]$ ,  $\alpha_i[y/x]$ ,  $\alpha_i[x/t]$ , gdzie  $t = P(x)$ .

---

*Podstawienia dozwolone* (admissible substitutions) definiuje się przez rekurencję po złożoności  $\varphi$  następująco.

- jeśli  $\varphi$  jest atomowa, to  $\varphi[x/t]$  jest dozwolone,
  - $(\varphi \vee \psi)[x/t]$  jest dozwolone, jeśli zarówno  $\varphi[x/t]$ , jak i  $\psi[x/t]$  są dozwolone,
  - $(\sim\varphi)[x/t]$  jest dozwolone, jeśli  $\varphi[x/t]$  jest dozwolone,
  - $(\exists x\varphi)[x/t]$  jest dozwolone (zauważ, że podstawienie daje  $\exists x\varphi$ ),
  - $(\exists y\varphi)[x/t]$  jest dozwolone, jeśli  $x$  i  $y$  są różne,  $\varphi[x/t]$  jest dozwolone oraz albo  $x$  nie występuje wolno w  $\varphi$ , albo  $y$  nie występuje w  $t$ .
- 

2. Wybierz podstawienia dozwolone.

(a)  $\forall x P(y) \rightarrow P(x) [x/f(x, y)]$

(b)  $\exists x \forall y (R(f(y, x), z)) \wedge P(y) [y/z]$

(c)  $\exists x (R(c, f(x, y))) [y/g(x, y)]$

(d)  $\forall x P(x) \vee \exists z R(f(z, y), x) [y/g(f(x, y), y)]$

(e)  $\forall x \exists y (R(f(x, y), z) \wedge P(x)) [z/c]$

3. Podaj przykład formuły  $\varphi$  i termu  $t$  takich, że  $\models \varphi$ , podczas gdy  $\not\models \varphi[x/t]$ .

---

**Twierdzenie o podstawianiu:** Jeśli  $\varphi[x/t]$  jest dozwolone, to

$$\mathcal{A} \models (\varphi[x/t])[e] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e, x = t^{\mathcal{A}}[e]].$$

---

4. Niech  $\varphi$  będzie formułą,  $t$  termem, a  $e$  wartościowaniem w  $\mathcal{A}$ . Podaj przykłady dla wszystkich możliwych wartości logicznych zdań  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$  oraz  $\mathcal{A} \models \varphi[e, x = t^{\mathcal{A}}[e]]$ , gdy podstawienie jest

- dozwolone,
- niedozwolone.