WIKTOR MAREK
JANUSZ ONYSZKIEWICZ

Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach

WIKTOR MAREK
JANUSZ ONYSZKIEWICZ

Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach

Wydanie dwunaste

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2004

PRZEDMOWA
DO WYDANIA PIERWSZEGO

Książka w zasadzie przeznaczona jest dla studentów kierunku matematycznego uniwersytetów i szkół pedagogicznych. Głównym celem jaki przyświecał jej autorom była chęć dostarczenia słuchaczom wykładu tzw. *Wstępu do matematyki* stosunkowo obszernego zestawu zadań, których przerobienie ułatwi opanowanie wykładanego materiału. Z tego też powodu zadania związane z zagadnieniami omawianymi na tym wykładzie zgrupowane są na początku książki w pierwszych dziewięciu rozdziałach. Staraliśmy się uwzględnić możliwie wszystkie typowe zadania i podać ich przykładowe rozwiązania. Inne zadania nieco trudniejsze opatrzone są wskazówkami ułatwiającymi rozwiązanie.

Na początku każdego rozdziału podane są definicje ważniejszych pojęć. Pojęcia mniej ważne lub bardziej specjalne są wprowadzane w tekstach zadań. Podany na końcu książki indeks umożliwia odnalezienie potrzebnych definicji.

Zadania w każdym rozdziale uszeregowane są w miarę możliwości zgodnie z wzrastającym stopniem ich trudności. Każdą grupę bardziej typowych zadań rozpoczynają zadania bardzo łatwe — może nawet banalne. Niektóre z nich mogą być z powodzeniem rozwiązane przez ucznia szkoły średniej, znającego nowy program matematyki. Umieszczenie ich jednak było podyktowane istnieniem sporej grupy studentów studiów dla pracujących, którzy stykają się z wieloma pojęciami po raz pierwszy.

Przerobienie większej ilości takich zadań umożliwia więc nabycie pewnej swobody w operowaniu nowymi pojęciami tak bardzo potrzebnej przy rozwiązywaniu zadań nieco trudniejszych. Umieszczając sporą ilość łatwych zadań chcieliśmy też naszą książkę uczynić użyteczną dla osób pracujących samodzielnie, bez pomocy i opieki asystenta.

Ostatni rozdział części przeznaczonej dla studentów pierwszego roku (tzn. rozdział IX) zawiera zadania, do rozwiazania których potrzebna jest znajomość nieraz kilku poprzednich rozdziałów. Z tego też względu mogą być one traktowane jako zadania kontrolne. Mając ten cel na uwadze zadania w tym rozdziale nie są zgrupowane tematycznie, lecz są ułożone w zestawy, z których każdy pokrywa prawie cały materiał wykładu.

Ze względu na rozmaity zakres materiału podawanego na wykładach *Wstępu do matematyki* czy też *Elementów logiki matematycznej i teorii mnogości* (WSN) było niezmiernie trudno ustalić, które twierdzenia mogą być czytelnikom znane. Z tego też względu zdecydowaliśmy oprzeć się niemal wyłącznie na definicjach, żądając od czytelnika, aby udowodnił (korzystając ze wskazówek) cały szereg niekiedy podstawowych twierdzeń.

Staraliśmy się w miarę możności zachować oznaczenia identyczne ze stosowanymi we *Wstępie do matematyki współczesnej* H. Rasiowej. W pewnych miejscach nieco szerszy zakres omawianych zagadnień skłonił nas do dokonania pewnych zmian, w innych wypadkach zastosowaliśmy nieco nowszą symbolikę (por. 5.38). Układ materiału jest też nieco odmienny w porównaniu z cytowaną książką i wzorowany jest na dość powszechnie stosowanej i, jak nam się wydaje, najwłaściwszej dydaktycznie kolejności omawiania poszczególnych działów.

Rozdziały X-XIII wykraczają wyraźnie poza zakres materiału wykładanego na I roku studiów. Umieściliśmy je z nadzieją, że będą przydatne na starszych latach, w związku z prowadzeniem proseminariów, bądź też ćwiczeń do wykładów monograficznych z logiki matematycznej. W zadaniach z tych rozdziałów, a także w pewnych bardziej specjalnych zadaniach rozdziałów poprzednich, musieliśmy w komentarzach i wskazówkach odwoływać się niekiedy do książki [3].

Chęć uczynienia książki możliwie kompletną spowodowała umieszczenie dodatkowo zadań na zastosowanie indukcji matematycznej, a także z bliskiego podstawom matematyki działu jakim jest teoria krat i algebr Boole'a.

AUTORZY

PRZEDMOWA DO WYDANIA DRUGIEGO

Drugie wydanie książki *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach* zostało uzupełnione i poprawione. Między innymi zwiększyliśmy liczbę zadań oraz odpowiedzi, a także dołączyliśmy indeks oznaczeń, ułatwiający korzystanie z książki.

Dokonanie tych zmian było możliwe dzięki czytelnikom pierwszego wydania, którzy zwrócili uwagę na — liczne niestety — usterki. Szczególnie dziękujemy dr J. Waszkiewiczowi za wnikliwą i szczegółową analizę treści książki. Jesteśmy także zobowiązani mgr B. Konopackiemu, inż. J. Maciejcowi oraz prof. dr Z. Pawlakowi za cenne uwagi.

AUTORZY

Lipiec 1973

ZADANIA

Rozdział I

RACHUNEK ZDAŃ

Wartościowaniem nazywamy funkcję, która każdej zmiennej zdaniowej przyporządkowuje wartość logiczną 0 (*fałsz*) lub 1 (*prawda*). Funkcję taką, w naturalny sposób można rozszerzyć na zbiór wszystkich formuł rachunku zdań.

Tautologią nazywamy formułę, która przy dowolnym wartościowaniu przybiera wartość logiczną 1.

Funktorem zdaniotwórczym n-argumentowym (*spójnikiem zdaniowym*) nazywamy funkcję, która każdemu układowi $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, gdzie x_i jest bądź fałszem, bądź prawdą, przyporządkowuje wartość logiczną 0 lub 1.

Mamy więc cztery funktory jednoargumentowe:

	0	1
A_0	0	0
A_1	0	1
A_2	1	0
A_3	1	1

oraz szesnaście funktorów dwuargumentowych:

	00	01	10	11
B_0	0	0	0	0
B_1	0	0	0	1
B_2	0	0	1	0

B_3	0	0	1	1
B_4	0	1	0	0
B_5	0	1	0	1
B_6	0	1	1	0
B_7	0	1	1	1
B_8	1	0	0	0
B_9	1	0	0	1
B_{10}	1	0	1	0
B_{11}	1	0	1	1
B_{12}	1	1	0	0
B_{13}	1	1	0	1
B_{14}	1	1	1	0
B_{15}	1	1	1	1

Spośród funktorów A_i oraz B_j, gdzie $0 \leqslant i \leqslant 3$, $0 \leqslant j \leqslant 15$, funktor A_2 nazywa się *negacją* ($\sim$), zaś funktory $B_1, B_7, B_{13}, B_9, B_{14}, B_8$ odpowiednio: *koniunkcją* ($\wedge$), *alternatywą* ($\vee$), *implikacją* ($\Rightarrow$), *równoważnością* ($\Leftrightarrow$), *funktorem Sheffera* (*dyzjunkcją*) oraz *funktorem jednoczesnego zaprzeczenia.*

1.1. Zdefiniować koniukcję za pomocą alternatywy i negacji.

1.2. Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.

1.3. Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

1.4. Udowodnić, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji ani dyzjunkcji.

1.5. Udowodnić, że za pomocą równoważności i negacji nie można zdefiniować alternatywy ani koniunkcji.

1.6. Udowodnić, że za pomocą funktora A_0 oraz implikacji można zdefiniować wszystkie pozostałe funktory zdaniotwórcze (zarówno jednoargumentowe jak i dwuargumentowe).

1.7. Udowodnić, że każdy z funktorów B_8 i B_{14} wystarcza do zdefiniowania pozostałych funktorów zdaniotwórczych (zarówno jednoargumentowych jak i dwuargumentowych).

***1.8.** Udowodnić, że funktory B_8 i B_{14} są jedynymi funktorami o własności opisanej w zadaniu 1.7. Udowodnić, że za ich pomocą można zdefiniować dowolny funktor n-argumentowy (dla dowolnego n).

1.9. Niech wyrażenie (formuła) f zawiera n zmiennych zdaniowych.

Ile wartościowań należy rozpatrzyć przy badaniu, czy wyrażenie f jest tautologią?

Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami (zad. 1.10-1.32):

1.10. $p \Rightarrow p$.

1.11. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

1.12. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$.

1.13. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (*prawo sylogizmu warunkowego*).

1.14. $p \Leftrightarrow \sim \sim p$ (*prawo podwójnego przeczenia*).

1.15. $p \vee \sim p$ (*prawo wyłączonego środka*).

1.16. $\sim(p \wedge \sim p)$ (*prawo sprzeczności*).

1.17. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (*prawo de Morgana*).

1.18. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (*prawo de Morgana*).

1.19. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (*prawo transpozycji*).

1.20. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ (*prawo Pierce'a*).

1.21. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

1.22. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (*prawo Claviusa*).

1.23. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (*prawo Dunsa-Scotusa*).

1.24. $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

1.25. $p \Rightarrow (p \vee q)$.

1.26. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$.

1.27. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$.

1.28. $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

1.29. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

1.30. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

1.31. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

1.32. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami (zad. 1.33-1.61).

1.33. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$.

1.34. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$.

1.35. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$.

1.36. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$.

1.37. $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

1.38. $p \vee [(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

1.39. $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$.

1.40. $p \Rightarrow [(\sim q \wedge q) \Rightarrow r]$.

1.41. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$.

1.42. $[(p \vee q) \Rightarrow (p \vee \sim q)] \Rightarrow (\sim p \vee q)$.

1.43. $[(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

1.44. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

1.45. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$.

1.46. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

1.47. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$.

1.48. $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \vee q \Rightarrow \sim r)\} \Rightarrow (p \wedge q \wedge r)$.

1.49. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

1.50. $(p \vee q \vee r) \Rightarrow \{\sim p \Rightarrow [(q \vee r) \wedge \sim p]\}$.

1.51. $[\sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \wedge \sim q)$.

1.52. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge s) \Rightarrow (q \vee r)]$.

1.53. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$.

1.54. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$.

1.55. $[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r \vee s)]$.

1.56. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge \sim s) \Rightarrow q]$.

1.57. $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow \sim r]\} \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.

1.58. $[(\sim p \wedge q) \vee (p \vee \sim q)] \Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)\}$.

1.59. $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Rightarrow \{[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \wedge [(q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p)]\}$.

1.60. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u)] \Rightarrow [(p \wedge r \wedge t) \Rightarrow (q \wedge s \wedge u)]$.

1.61. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$.

1.62. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli liczba naturalna a jest liczbą pierwszą, to o ile a jest liczbą złożoną, to a równa się 4.

1.63. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli liczba naturalna a dzieli się przez 3, to z faktu, że a nie dzieli się przez 3 wynika, że a dzieli się przez 5.

1.64. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli z faktu, że wszystkie boki trójkąta ABC są równe, wynika, że wszystkie kąty trójkąta ABC są równe, i trójkąt ABC ma nierówne kąty, to ma on również nierówne boki.

1.65. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, iż A jest czworokątem, wynika, iż A ma boki równe.

1.66. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli liczba a dzieli się przez 3 i dzieli się przez 5, to z faktu, iż a nie dzieli się przez 3, wynika, iż a nie dzieli się przez 5.

1.67. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli liczba a dzieli się przez 2 i a dzieli się przez 7, to z faktu, iż a nie dzieli się przez 7, wynika, iż a dzieli się przez 3.

1.68. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta L jest równoległa do prostej M albo prosta P nie jest równoległa do prostej M, to albo prosta L nie jest równoległa do prostej M, albo prosta P jest równoległa do prostej M.

1.69. Czy następujące zdanie jest prawdziwe: Jeżeli Jan nie zna Logiki, to, jeśli Jan zna Logikę, to Jan urodził się w IV wieku pne.

1.70. Czy prawdziwe jest zdanie: Jan zna Logikę wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdą, że nie jest prawdą, że Jan zna Logikę.

1.71. Czy prawdziwe jest zdanie: Jeżeli z faktu, iż funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, wynika, że jest ona ciągła w punkcie x_0, to z faktu, iż funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, wynika, iż jest ona różniczkowalna w punkcie x_0.

1.72. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q mamy:

a) $p \vee q$ równoważne jest q,
b) $p \wedge q$ równoważne jest p.

1.73. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to dla każdego zdania q mamy:

a) $p \wedge q$ równoważne jest q,
b) $p \vee q$ równoważne jest p.

1.74. Przyporządkujmy wartości logicznej 0 liczbę naturalną 0, zaś wartości logicznej 1 liczbę naturalną 1, wtedy funktory logiczne mogą być wyrażone w następujący sposób:

$$\sim p = 1-p, \quad p \wedge q = \min(p, q) = pq,$$

$$p \vee q = \max(p, q) = p+q-pq, \quad p \Rightarrow q = 1-p+pq.$$

Udowodnić, że przy takiej interpretacji wyrażenie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym układzie wartości przyjmuje wartość 1.

***1.75.** Przyporządkujmy wartości logicznej 1 liczbę naturalną 0, zaś wartości logicznej 0 liczbę 1. Znaleźć analogiczne wyrażenia do rozważanych w zadaniu 1.74. Udowodnić analogiczne twierdzenie (z tym, że zamiast 1 w tezie twierdzenia winno być 0).

1.76. Udowodnić, że jeżeli wyrażenie Ψ jest tautologią, to wyrażenie

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\Phi_n \Rightarrow \Psi)\ldots)$$

także jest tautologią.

1.77. Udowodnić, że jeśli wyrażenie Ψ jest tautologią, to wyrażenie

$$\sim\Psi \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n)\ldots)$$

także jest tautologią.

1.78. Rozważmy wyrażenie postaci

$$\underbrace{(\ldots((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow p)\ldots) \Rightarrow p}_{n}.$$

Dla jakich n wyrażenie to jest tautologią?

***1.79.** Definiujemy $p^0 = p$, $p^1 = \sim p$. Rozważmy wyrażenie postaci:

$$(*) \qquad (\ldots(p^{i_0} \Rightarrow p^{i_1}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_{n-1}}.$$

Dla jakich ciągów $\langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle$ wyrażenie $(*)$ jest tautologią?

1.80. Formuła Θ znajduje się w postaci normalnej alternatywno-koniunkcyjnej, jeśli ma postać:

$$\Theta : \Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_n,$$

każda z formuł Φ_j ma postać

$$\Phi_j : \Psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Psi_{j_s},$$

zaś każde Ψ_{j_i} z kolei jest zmienną zdaniową bądź jej negacją.

Udowodnić, że każda formuła Θ jest równoważna formule Θ_1 znajdującej się w alternatywno-koniunkcyjnej postaci normalnej. Innymi słowy formuła $\Theta \Leftrightarrow \Theta_1$ jest tautologią.

1.81. Formuła Θ znajduje się w postaci normalnej koniunkcyjno-alternatywnej jeśli ma postać

$$\Theta : \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n,$$

każda z formuł Φ_i z kolei ma postać

$$\Phi_i : \Psi_{j_1} \vee \ldots \vee \Psi_{j_t},$$

a każda z formuł Ψ_{j_r} jest zmienną zdaniową bądź jej negacją.

Udowodnić, że każda formuła równoważna jest formule znajdującej się w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej.

***1.82.** Udowodnić, że formuła zbudowana ze zmiennych zdaniowych wyłącznie za pomocą spójnika zdaniowego $\Leftrightarrow$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda zmienna występuje w niej parzystą ilość razy.

1.83. Znaleźć formułę Ψ znajdującą się w postaci normalnej alternatywno-koniunkcyjnej równoważną danej formule Φ, gdzie Φ jest formułą:

a) $p \wedge [q \vee (\sim p \wedge r)]$,
b) $p \Leftrightarrow [q \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$,
c) $p \Rightarrow [q \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)]$,
d) $p \vee [(q \wedge p) \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim p)]$.

1. 84. Dla każdej z formuł a-d z zadania 1.83 znaleźć formułę równoważną znajdującej się w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej.

1.85. Udowodnić, że jeśli wyrażenie nie zawiera innych spójników poza $\Leftrightarrow$, to zmieniając w nim w dowolny sposób porządek zmiennych i nawiasów otrzymamy formułę równoważną.

***1.86.** Załóżmy, że wyrażenie Φ zawiera jedynie spójniki $\wedge$ i $\vee$. Niech Φ_d oznacza wyrażenie powstające z Φ przez zastąpienie każdego symbolu $\wedge$ przez $\vee$, zaś $\vee$ przez $\wedge$.

Z kolei niech Φ^*oznacza formułę, w której każdą zmienną zastępujemy przez jej negację.

Udowodnić, że $\sim\Phi_d \Leftrightarrow \Phi^*$ jest tautologią.

1.87. Udowodnić, że jeśli $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ jest tautologią, to także $\Phi_d \Leftrightarrow \Psi_d$ jest tautologią.

Korzystając z praw arytmetyki liczb rzeczywistych: $a/b < 0 \Leftrightarrow ab < 0$, $a/b > 0 \Leftrightarrow ab > 0$, $a/b \leqslant 0 \Leftrightarrow ab \leqslant 0 \wedge b \neq 0$, $a/b \geqslant 0 \Leftrightarrow ab \geqslant 0 \wedge b \neq 0$ oraz rachunku zdań, znaleźć rozwiązanie nierówności 88-97:

1.88. $\dfrac{x^2-4}{x^2-9} \geqslant 0.$

1.89. $\dfrac{x^3+x-2}{x^2-x+12} \geqslant 0.$

1.90. $x^2 \geqslant 0.$

1.91. $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4} \geqslant 0.$

1.92. $\dfrac{x^3-2}{x^2-1} \geqslant 0.$

1.93. $\dfrac{x^2-7}{x^3+8} \leqslant 0.$

1.94. $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x-4} < 0.$

1.95. $\dfrac{x^2-16}{x^2-x+2} \leqslant 0.$

1.96. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8} \geqslant 0.$

1.97. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1} > 0.$

***1.98.** Udowodnić następujące twierdzenie: *Jeśli prawdziwe są wynikania: $p_1 \Rightarrow q_1, \ldots, p_n \Rightarrow q_n$ oraz zdania $(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$ i $\sim(q_i \wedge q_j)$* dla $i \neq j$, *to prawdziwe też są wynikania $q_1 \Rightarrow p_1, \ldots, q_n \Rightarrow p_n$.*

Mówimy wtedy, że zdania $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ tworzą *zamknięty układ twierdzeń.*

1.99. Udowodnić, że jeżeli w trójkątach ABC i $A'B'C'$ mamy $AC = A'C'$ i $AB = A'B'$, to $\sphericalangle A > \sphericalangle A' \Leftrightarrow BC > B'C'$.

1.100. Sprawdzić, że zdania $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, mówiące o trójkątach ABC i $A'B'C'$, w których $AC = A'C'$, $AB = A'B'$:

$$\begin{aligned} &p_1\colon \sphericalangle A > \sphericalangle A', \qquad && q_1\colon BC > B'C',\\ &p_2\colon \sphericalangle A = \sphericalangle A', && q_2\colon BC = B'C',\\ &p_3\colon \sphericalangle A < \sphericalangle A', && q_3\colon BC < B'C' \end{aligned}$$

tworzą zamknięty układ twierdzeń.

Długość formuły definiujemy przez indukcję ze względu na stopień jej komplikacji następująco: długość zmiennych zdaniowych równa jest 1, jeśli dł$\Phi = a$ i dł$\Psi = b$, to dł$(\Phi \wedge \Psi)$ = dł$(\Phi \vee \Psi)$ = dł$(\Phi \Rightarrow \Psi) = a+b+1$, dł$(\sim\Phi)$ = dł$\Phi+1$.

1.101. Znaleźć formułę Ψ możliwie najkrótszej długości równoważną danej formule Φ, gdzie Φ jest kolejno:

a) $(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge \sim q\wedge \sim r)\vee(p\wedge q\wedge \sim s)\vee \sim(p\wedge r \Rightarrow q)$,

b) $\sim p \Rightarrow \sim\sim q$,

c) $(p\wedge q)\vee \sim(\sim p \Rightarrow q)$,

d) $(q\wedge r\wedge s\wedge \sim q)\vee(p\wedge \sim q\wedge \sim p)\vee(r\wedge s)$.

Dotychczas używana przez nas symbolika wymagała używania nawiasów. Jest także w użyciu tak zwana beznawiasowa symbolika Łukasiewicza. Polega ona na tym, że tworząc z formuł Φ_1 i Φ_2 (zapisanych już w symbolice beznawiasowej) za pomocą spójnika dwuargumentowego S (gdzie S może być równe C, D, E, I, co oznacza odpowiednio koniunkcję, alternatywę, równoważność i implikację) nową formułę, zapisujemy ją S$\Phi_1\Phi_2$ (np. $p\wedge q$ zapisujemy Cpq, podobnie zamiast $\sim p$ piszemy Np). Jeśli formuła Φ zapisana jest w symbolice beznawiasowej, to proces tłumaczenia jej na uprzednio wprowadzony formalizm nawiasowy wygląda następująco:

a) Jeśli po spójniku N stoi zmienna zdaniowa p, to w miejsce Np piszemy $(\sim p)$,

b) jeśli po spójniku C, D, E, I stoją dwie zmienne zdaniowe p i q, to zapisujemy odpowiednio $(p\wedge q)$, $(p\vee q)$, $(p\Leftrightarrow q)$, $(p\Rightarrow q)$,

c) każde wyrażenie znajdujące się w nawiasach traktujemy tak, jakby to była zmienna zdaniowa stosując bądź a, bądź b. Na przykład CDpNqr = = CD$p\,(\sim q)r$ = C$(p\vee \sim q)r$ = $(p\vee \sim q)\wedge r$.

1.102. Zapisać w symbolice beznawiasowej:

a) $p \wedge [q \vee (\sim p \Rightarrow r)]$,
b) $p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$,
c) $p \Leftrightarrow [p \wedge \sim(\sim q \Leftrightarrow q)]$,
d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim p)]$,
e) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$,
f) $(p \vee q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$.

1.103. Podać zapis w symbolice nawiasowej następujących wyrażeń symboliki beznawiasowej:

a) DDC*pq*C*p*N*q*DCN*pq*CN*p*N*q*,
b) EC*p*D*qr*DC*pq*C*pr*,
c) II*pq*IN*q*N*p*,
d) DC*pq*NND*q*N*r*,
e) INC*pq*CN*pq*.

***1.104.** Udowodnić, że formuła nie będąca zmienną zdaniową i zapisana w symbolice beznawiasowej zaczyna się od spójnika logicznego. Kiedy tym spójnikiem może być N?

Reguły wnioskowania są to operacje prowadzące od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych. Tak więc reguły wnioskowania pozwalają na uzyskiwanie nowych zdań w oparciu o już przyjęte. Najważniejszymi spośród nich są: *reguła odrywania* (*modus ponens*), która prowadzi od zdań Φ i $\Phi \Rightarrow \Psi$ do uznania zdania Ψ, oraz reguła podstawiania, która pozwala na uznanie zdania $\Phi(a)$ dla każdego poszczególnego a z zakresu zmienności zmiennej x o ile wiadomo, że dla wszystkich x zachodzi $\Phi(x)$.

1.105. Z tautologii z zadań 1.11 i 1.13 wyprowadzić za pomocą reguł wnioskowania tautologię

$$p \Rightarrow p.$$

1.106. Z tych samych tautologii wyprowadzić za pomocą reguł wnioskowania tautologię

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

1.107. Uzasadnić prawdziwość następującej reguły wnioskowania. Jeśli $\Phi(p)$ jest prawdziwe (p — zmienna zdaniowa) i $p \Leftrightarrow \Psi$, to $\Phi(\Psi)$ prawdziwe, gdzie $\Phi(\Psi)$ powstaje z Φ przez zastąpienie zmiennej p (nie koniecznie we wszystkich miejscach) wyrażeniem Ψ.

Rozdział II

ALGEBRA ZBIORÓW

Jeśli a jest elementem zbioru A, to piszemy $a \in A$ (co czytamy: a należy do A). Zamiast $\sim a \in A$ piszemy często $a \notin A$, $a, b, \ldots, d \in A$ jest skrótem zapisu $a \in A \wedge b \in A \wedge \ldots \wedge d \in A$.

Zbiory definiujemy przez określenie ich elementów. W związku z tym dwa zbiory, które mają te same elementy, uważamy za identyczne. Jest to tzw. *zasada ekstensjonalności*, którą można zapisać w sposób następujący:

$$A = B \Leftrightarrow \text{dla każdego } x \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Elementy zbioru można też określić przez bezpośrednie ich wyliczenie. I tak np. $\{a, b, c, d\}$ jest zbiorem, którego elementami są jedynie przedmioty a, b, c i d.

Zbiór można też zdefiniować przez podanie warunku, jaki powinny spełniać jego elementy. Mając więc dany jakiś warunek (własność) Φ (np. w postaci funkcji zdaniowej) możemy zdefiniować zbiór A w sposób następujący:

$$x \in A \Leftrightarrow \Phi(x).$$

Tak zdefiniowany zbiór A składa się z tych przedmiotów, które mają własność Φ (które znajdują się w zakresie zmienności zmiennej x i spełniają funkcję zdaniową Φ). W takiej sytuacji używamy też zapisu $A = \{x : \Phi(x)\}$.

Zbiór elementów x należących do zbioru B i spełniających warunek Φ oznaczamy przez

$$\{x \in B : \Phi(x)\}.$$

Z kolei zbiory mogą być elementami innych zbiorów, nazywanych niekiedy rodzinami zbiorów. Przyjmuje się jednak, że nie istnieje taka rodzina zbiorów $\{A_n : n \in \mathcal{N}\}$, że $A_{n+1} \in A_n$, skąd w szczególności wynika $\sim(A \in A)$.

Zbiór, który nie zawiera żadnych elementów nazywamy *zbiorem pustym*. Z zasady ekstensjonalności wynika, że istnieje tylko jeden taki zbiór, który oznaczamy przez O. Zbiór ten bywa też oznaczany przez $\emptyset$.

Dopuszczamy istnienie przedmiotów, które nie są zbiorami. Jeśli więc a nie jest zbiorem, to nie istnieje takie x, że $x \in a$. Podobną własność ma O, ale $O \neq a$, bowiem a nie jest — w odróżnieniu od O — zbiorem.

Piszemy $A \subset B$ (co czytamy: A zawarte w B), jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B. A więc

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{dla każdego } x \quad (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

W tym wypadku mówimy, że A jest *podzbiorem* zbioru B. Jeśli ponadto $A \neq B$, to zbiór A nazywamy *podzbiorem właściwym* zbioru B.

Relację $A \subset B$ nazywamy *inkluzją*. Ma ona szereg własności, np.

$$A \subset A,$$
$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C,$$
$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B.$$

Podać elementy następujących zbiorów (zad. 2.1-2.28):

2.1. $\{a, b, c\}$.

2.2. $\{a, b, a\}$.

2.3. $\{a\}$.

2.4. O.

2.5. $\{\{a\}\}$.

2.6. $\{O\}$.

2.7. $\{\{a, b\}, \{a\}\}$.

2.8. $\{\{\{a\}\}, \{a\}, a\}$.

2.9. $\{\{a, b, c\}, c\}$.

2.10. $\{\{a, b\}, \{\{a, b\}\}, O\}$.

2.11. $\{x \in \mathcal{N} : x \leqslant 2\}$.

2.12. $\{x \in \mathcal{N} : x^2 \leqslant 7\}$.

2.13. $\{x \in \mathcal{N} : x^2 < 7\}$.

2.14. $\{x \in \mathcal{N} : x = 2\}$.

2.15. $\{x \in \mathcal{N} : x = 2 \vee x = 3\}$.

2.16. $\{x \in \mathcal{N} : x^2 < 0\}$.

2.17. $\{x \in \mathcal{N} : x = -1\}$.

2.18. $\{x \in \mathcal{N} : x \geqslant 0\}$.

2.19. $\{x \in \mathcal{N} : x^2 = 4\}$.

2.20. $\{x \in \mathcal{W} : x^2 = 4\}$.

2.21. $\{x \in \mathcal{W} : x^2 = 2\}$.

2.22. $\{x \in \mathcal{N} : x^2 - 8x + 1 < 0\}$.

2.23. $\{x \in \mathcal{N} : |3 - x| < 3\}$.

2.24. $\{x \in \mathcal{R} : x^2 + 4x + 4 \leqslant 0\}$.

2.25. $\{x \in \mathcal{R} : x^2 = 2\}$.

2.26. $\{x \in \mathcal{W} : (x+1)^2 \leqslant 0\}$.

2.27. $\{x \in \mathcal{R} : x^2 < 3\}$.

2.28. $\{x \in \mathcal{R} : x^2 + 1 \geqslant 0\}$.

Przyjmując, że różne litery oznaczają różne przedmioty, ewentualnie liczby rzeczywiste, zbadać jakie relacje inkluzji zachodzą między następującymi zbiorami A i B (zad. 2.29-2.50):

2.29. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$.

2.30. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$.

2.31. $A = O$, $B = \{a, b, c\}$.

2.32. $A = O$, $B = \{a\}$.

2.33. $A = \{\{a\}, a, O\}$, $B = \{a\}$.

2.34. $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}$, $B = \{\{a, b\}, c\}$.

2.35. $A = \{\{a, b\}, \{a\}, b, O\}$, $B = \{\{a\}, b, \{O\}\}$.

2.36. $A = \{x \in \mathcal{N} : x > 2\}$, $B = \{y \in \mathcal{N} : y > 2\}$.

2.37. $A = \{x \in \mathcal{R} : x > 0\}$, $B = \{y \in \mathcal{N} : y > 0\}$.

2.38. $A = \{x \in \mathcal{N} : x^2 > 4\}$, $B = \{x \in \mathcal{N} : x > 2\}$.

2.39. $A = \{ax+b : a, b \in \mathcal{R}\}$, $B = \{x+y : y \in \mathcal{R}\}$.

2.40. $A = \{ax^2+bx+c : a, b, c \in \mathcal{R}\}$, $B = \{ax+b : a, b \in \mathcal{R}\}$.

2.41. $A = \{ax+b+2 : a, b \in \mathcal{R}\}$, $B = \{bx+a : a, b \in \mathcal{R}\}$.

2.42. $A = \{(a-1)x^2+(b+1)x+c : a, b, c \in \mathcal{R}\}$,
$B = \{zx^2+tx+v : z, t, v \in \mathcal{W}\}$.

Uwaga. Zbiory A i B w zadaniach 2.39-2.42 należy rozumieć jako zbiory funkcji, a mianowicie tzw. funkcji liniowych bądź trójmianów kwadratowych.

2.43. $A = \{x \in \mathcal{W} : x^2 \leqslant 1\}$, $B = \{x \in \mathcal{R} : 2x^3-5x^2+4x = 1\}$.

2.44. $A = \{x \in \mathcal{W} : x^2 < 0\}$, $B = \{x \in \mathcal{W} : x^6+7x^5-3x = 0\}$.

2.45. $A = \{x \in \mathcal{W} : x^2+x-2 \leqslant 0\}$, $B = \{y \in \mathcal{R} : y^2+y-2 = 0\}$.

2.46. $A = \{x \in \mathcal{R} : x^3-5x+3 = 0\}$, $B = \{x \in \mathcal{W} : x^3-5x+4 \leqslant 0\}$.

2.47. A — zbiór trójkątów równoramiennych, B — zbiór trójkątów równobocznych.

2.48. A — zbiór kwadratów, B — zbiór prostokątów.

2.49. A — zbiór rombów o co najmniej jednym kącie prostym, B — zbiór prostokątów.

2.50. A — zbiór wielokątów o obwodzie równym 4, B — zbiór kwadratów o polu równym 1.

Niech teraz a, b, c i d będą różne od zbioru pustego. Jakie zależności muszą zachodzić pomiędzy nimi, żeby zachodziły następujące równości:

2.51. $\{b, c\} = \{b, c, d\}$.

2.52. $\{a, b, a\} = \{a, b\}$.

2.53. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

2.54. $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$.

2.55. $\{\{a, b\}, \{d\}\} = \{\{a\}\}$.

2.56. $\{\{a, O\}, b\} = \{\{O\}\}$.

Z dowolnych dwu zbiorów A i B możemy utworzyć nowe zbiory $A \cup B$, $A \cap B$ i $A-B$ zwane odpowiednio *sumą*, *iloczynem* i *różnicą zbiorów*. Zbiory te są określone w następujący sposób:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B,$$
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B,$$
$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Zbiory A i B nazywamy *rozłącznymi* jeśli $A \cap B = O$. Jeśli wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami pewnego zbioru, to zbiór ten nazywamy *przestrzenią* i oznaczamy przez X. Zamiast pisać $X - A$ piszemy po prostu $-A$. Niekiedy zbiór $-A$ bywa oznaczany przez A'. Zbiór $-A$ nazywamy *dopełnieniem zbioru* A.

Zakładając, że różne małe litery oznaczają różne przedmioty, nie będące zbiorami, obliczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ i $B - A$ dla następujących zbiorów A i B (zad. 2.57-2.62):

2.57. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$.
2.58. $A = \{\{a, b\}, c\}$, $B = \{c, d\}$.
2.59. $A = \{x, y, \{z\}\}$, $B = \{a, x, y\}$.
2.60. $A = \{\{a, \{a\}\}, a\}$, $B = \{a, \{a\}\}$.
2.61. $A = \{a, \{a\}, \{b\}\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}\}$.
2.62. $A = \{\{a, \{b\}\}, c, \{c\}, \{a, b\}\}$, $B = \{\{a, b\}, c, \{b\}\}$.

Obliczyć podobnie jak poprzednio $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ i $B - A$ dla następujących zbiorów A i B (zad. 2.63-2.66):

2.63. $A = \{x \in \mathcal{N} : x < 3\}$, $B = \{x \in \mathcal{N} : x \geqslant 3\}$.
2.64. $A = \{x \in \mathcal{N} : x < 0\}$, $B = \{x \in \mathcal{N} : x = 2\}$.
2.65. $A = \{x \in \mathcal{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathcal{N} : x < 1\}$.
2.66. $A = \{x \in \mathcal{R} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathcal{R} : x < 2\}$.

2.67. Niech przestrzeń X będzie zbiorem wszystkich wielokątów i niech A będzie zbiorem trójkątów równoramiennych, B — zbiorem trójkątów równobocznych, C — zbiorem trójkątów prostokątnych.

Znaleźć zbiory:

a) $(A \cap B) \cap C$,
b) $(A \cap -B) \cap C$,
c) $(-A) \cap (B \cap C)$,
d) $(-A) \cap (C \cap -B)$,
e) $(A \cap B) \cap (-C)$.

Udowodnić, że przy ustalonej przestrzeni X dla wszelkich zbiorów A, B i C zachodzą następujące równości (zad. 2.68-2.79):

2.68. $A \cup B = B \cup A$. **2.69.** $A \cap B = B \cap A$.
2.70. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2*

2.71. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.72. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

2.73. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2.74. $O \cap A = O$.

2.75. $X \cap A = A$.

2.76. $O \cup A = A$.

2.77. $X \cup A = X$.

2.78. $A \cup -A = X$.

2.79. $A \cap -A = O$.

2.80. Dowieść, że

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = O.$$

Dowieść, że dla wszelkich zbiorów A, B, C i D zachodzą następujące równości (zad. 2.81-2.87):

2.81. $(A \cup B) - C = (A-C) \cup (B-C)$.

2.82. $A-(B-C) = (A-B) \cup (A \cap C)$.

2.83. $(A-B) \cup C = [(A \cup C)-B] \cup (B \cap C)$.

2.84. $A \cup (B-C) = [(A \cup B)-C] \cup (A \cap C)$.

2.85. $A-(B \cup C) = (A-B)-C$.

2.86. $(A-B) \cap (C-D) = (A \cap C)-(B \cup D)$.

2.87. $A-[B-(C-D)] = (A-B) \cup [(A \cap C)-D]$.

Dowieść następujących tożsamości rachunku zbiorów (tj. równości prawdziwych dla wszelkich zbiorów A i B) zwanych prawami de Morgana (zad. 2.88-2.89):

2.88. $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$.

2.89. $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$.

Sprawdzić, czy poniższe równości są tożsamościami rachunku zbiorów. Jeśli nie, podać odpowiednie przykłady (zad. 2.90-2.93):

2.90. $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$.

2.91. $A \cup (A \cap B) = A$.

2.92. $A \cap (A \cup B) = B$.

2.93. $(A \cup B \cup C)-(A \cup B) = C$.

Dowieść, że dla wszelkich zbiorów A, B i C zachodzą następujące implikacje bądź równoważności (zad. 2.94-2.100):

2.94. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D)$.

2.95. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cup C \subset B \cup D)$.

2.96. $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A-D \subset B-C)$.

2.97. $(A \subset B) \Rightarrow (C-B \subset C-A)$.

2.98. $(A-B = B-A) \Rightarrow A = B$.

2.99. $(A \subset B) \Leftrightarrow [B = A \cup (B-A)]$.

2.100. $(A \subset B) \Leftrightarrow \{(B \subset C) \Rightarrow [(C-A) \cap (C-B) = C-B]\}$.

Zbadać, jakie relacje inkluzji zachodzą między zbiorami A, B i C, jeśli prawdziwa jest równość (zad. 2.101-2.106):

2.101. $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$.

2.102. $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$.

2.103. $(A-C) \cup B = A \cup B$.

2.104. $(A \cup B)-C = (A-C) \cup B$.

2.105. $(A \cup B)-(B \cap C) = A \cap C$.

2.106. $[(A \cap B) \cup C]-A = (A \cap B)-C$.

2.107. Dowieść, że $A \cap B$ jest największym zbiorem zawartym równocześnie w A i w B, tj. takim, że każdy zbiór X zawarty w A i w B jest zawarty w $A \cap B$.

2.108. Dowieść, że $A \cup B$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym równocześnie A i B, tj. takim, że każdy zbiór X zawierający A i B zawiera również $A \cup B$.

2.109. Dowieść, że $A-B$ jest największym zbiorem zawartym w A i rozłącznym z B, tj. takim, że każdy zbiór X zawarty w A i rozłączny z B jest zawarty w $A-B$.

***2.110.** Ile elementów ma najmniejsza rodzina $\mathscr{A}$ zbiorów taka, że $A_i \in \mathscr{A}$ dla $i \leqslant n$, i jeśli $X \in \mathscr{A}$ i $Y \in \mathscr{A}$, to $X \cup Y \in \mathscr{A}$.

***2.111.** Ile elementów ma najmniejsza rodzina $\mathscr{A}$ zbiorów taka, że $A_i \in \mathscr{A}$ dla $i \leqslant n$, i jeśli $X \in \mathscr{A}$ i $Y \in \mathscr{A}$, to $X \cup Y \in \mathscr{A}$ i $X-Y \in \mathscr{A}$.

***2.112.** Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą pewnymi zbiorami i niech $k \leqslant n$. Dowieść, że suma wszystkich iloczynów k różnych zbiorów spośród zbiorów A_i jest równa iloczynowi wszystkich sum $n-k+1$ różnych zbiorów spośród A_i.

2.113. Dowieść, że

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1-A_2) \cup (A_2-A_3) \cup \ldots$
$\ldots \cup (A_{n-1}-A_n) \cup (A_n-A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$,

b) $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_m) = (A_1 \cap B_1) \cup \ldots \cup (A_1 \cap B_m) \cup \cdots$
$\ldots \cup (A_2 \cap B_1) \cup \cdots \cup (A_2 \cap B_m) \cup \ldots$
$\ldots \cup (A_n \cap B_1) \cup \ldots \cup (A_n \cap B_m)$.

Różnicą symetryczną dwu zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \dot{-} B = (A-B) \cup (B-A).$$

Dowieść, że (zad. 2.114-2.118):

2.114. $A \dot{-} B = B \dot{-} A$. **2.115.** $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$.

2.116. $A \dot{-} O = A$. **2.117.** $A \dot{-} A = O$.

2.118. $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$.

Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą następujące równości (zad. 2.119-2.121):

2.119. $A \dot{-} B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2.120. $A \cup B = (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)$.

2.121. $A \cup (B \dot{-} C) = (A \cup B) \dot{-} (A \cup C)$.

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi podzbiorami przestrzeni X. Oznaczmy przez A_i^1 zbiór $-A_i$, a przez A_i^0 zbiór A_i. Każdy iloczyn w postaci

$$A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n},$$

gdzie $i_l = 0$ lub $i_l = 1$, nazywamy *składową*.

2.122. Dowieść, że różnych składowych jest co najwyżej 2^n.

2.123. Dowieść, że różne składowe są rozłączne.

2.124. Znaleźć sumę wszystkich składowych.

2.125. Udowodnić, że zbiór A_i jest równy sumie tych składowych, w których występuje czynnik postaci A_i^0.

2.126. Dowieść, że każdy element najmniejszego ciała podzbiorów zbioru X zawierającego zbiory $A_1, \ldots, A_n$ daje się przedstawić jako suma składowych.

Uporządkowaną parą $\langle a, b\rangle$ nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Pary uporządkowane mają następującą ważną własność (por. zadanie 2.53):

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Uporządkowaną trójką $\langle a, b, c\rangle$ nazywamy zbiór $\big\langle\langle a, b\rangle, c\big\rangle$. Ogólnie, uporządkowaną *n-ką* $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ nazywamy zbiór

$$\big\langle\langle \ldots\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \ldots\rangle, a_n\big\rangle.$$

Iloczyn kartezjański $A \times B$ definiujemy w następujący sposób:

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ogólnie $A_1 \times \ldots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle : a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$.

2.127. Dowieść, że

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \Leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n = b_n).$$

Znaleźć iloczyn kartezjański $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów A i B (zad. 2.128-2.131):

2.128. $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$.

2.129. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$.

2.130. $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.131. $A = O$, $B = \{1, 2, 3\}$.

2.132. Dowieść, że jeśli zbiory A i B mają odpowiednio n i m elementów, to $A \times B$ i $B \times A$ mają mn elementów.

2.133. Dowieść, że jeśli $A \times B = B \times A$, to albo $A = O$, albo $A = B$, albo $B = O$.

2.134. Obliczyć $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$ i $A \times B \times C$, gdzie $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2, 3\}$.

Przyjmując, że punkty na płaszczyźnie są uporządkowanymi parami $\langle a, b\rangle$ liczb rzeczywistych, gdzie a — odcięta, b — rzędna punktu, znaleźć $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów A i B (zad. 2.135-2.139):

2.135. $A = \{x \in \mathscr{R} : 1 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathscr{R} : 0 < x < 1\}$.

2.136. $A = \{x \in \mathscr{R} : 0 < x\}$, $B = \{y \in \mathscr{R} : 0 < y\}$.

2.137. $A = \{y \in \mathscr{R} : -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathscr{R} : 0 < x \leqslant 1\}$.

2.138. $A = \{y \in \mathscr{R} : x < 1 \vee 1 < x\}$, $B = \{y \in \mathscr{R} : y^2 > 0\}$.

2.139. $A = \{x \in \mathscr{R} : 0 < x < 1 \vee 2 < x \leqslant 3\}$,
$B = \{x \in \mathscr{R} : 1 < x \leqslant 2 \wedge 3 < x \leqslant 4\}$.

Przyjmując, że punkty przestrzeni trójwymiarowej są uporządkowanymi trójkami $\langle a, b, c\rangle$ takimi, że $\langle a, b\rangle$ jest rzutem punktu $\langle a, b, c\rangle$ na płaszczyznę $z = 0$, a c rzutem $\langle a, b, c\rangle$ na oś z, znaleźć $A \times B$ dla następujących zbiorów A i B (zad. 2.140-2.142):

2.140. $A = \{\langle x, y\rangle : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}$, $B = \{x : 0 < x < 1\}$.

2.141. $A = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{x : -1 < x < 1\}$.

2.142. $A = \{x, y\rangle : 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$, $B = \{x : 0 < x\}$.

Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące równości (zad. 2.143-2.146):

2.143. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2.144. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2.145. $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$.

2.146. $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

Niech X będzie ustaloną przestrzenią. Załóżmy ponadto, że dla każdego $A \subset X$ istnieje pewien zbiór $\bar{A} \subset X$ zwany *domknięciem zbioru* A taki, że spełnione są zawsze następujące równości:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \quad A \subset \bar{A}, \quad \bar{O} = O.$$

Wnętrzem zbioru A nazywamy zbiór $\mathrm{Int}(A) = X - \overline{X - A}$.

Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} - \mathrm{Int}(A)$.

Dla danego zbioru A określamy zbiór $\mathscr{P}(A)$ zwany niekiedy *zbiorem potęgowym* (rodziną wszystkich podzbiorów A) jak następuje:

$$X \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A.$$

Zbiór $\mathscr{P}(A)$ bywa niekiedy oznaczany przez 2^A.

Dowieść następujących równości (zad. 2.147-2.156):

2.147. $\bar{X} = X$.

2.148. $\bar{A} - \bar{B} = \overline{\bar{A} - B} - \bar{B}$.

2.149. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.

2.150. $(\bar{A} = A \wedge \bar{B} = B) \Rightarrow \overline{A \cap B} = A \cap B$.

2.151. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}(A)$.

2.152. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

2.153. $A \subset B \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$.

2.154. $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{(X - A)} = (A \cap \overline{X - A}) \cup (\bar{A} - A)$.

2.155. $\mathrm{Fr}(A) \cup A = \bar{A}$.

2.156. $\mathrm{Fr}[\mathrm{Int}(A)] \subset \mathrm{Fr}(A)$.

Znaleźć zbiór $\mathscr{P}(A)$ dla następujących zbiorów A (zad. 2.157-2.160):

2.157. $A = \{a, b, c\}$, **2.158.** $A = O$.

2.159. $A = \{O\}$. **2.160.** $A = \{\{\{a\}\}, \{a\}, a\}$.

Dowieść, że (zad. 2.161-2.163):

2.161. $A \subset B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.

2.162. $A \neq B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \neq \mathscr{P}(B)$.

2.163. $\sim[A = \mathscr{P}(A)]$.

2.164. Czy jeśli $X \subset \mathscr{P}(X)$, to X musi być zbiorem pustym $(X = O)$?

2.165. Dowieść, że jeśli A ma n elementów, to $\mathscr{P}(A)$ ma 2^n elementów.

Rozdział III

FUNKCJE ZDANIOWE, KWANTYFIKATORY

Funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie, zawierające zmienne, które staje się zdaniem (prawdziwym bądź fałszywym), gdy za te zmienne podstawimy konkretne przedmioty.

Tak więc funkcja zdaniowa jednej zmiennej może być interpretowana jako własność pewnych przedmiotów, zaś funkcja zdaniowa wielu zmiennych, jako warunek, który musi spełniać układ przedmiotów. W szczególności zdanie traktujemy jako funkcję zdaniową o liczbie zmiennych równej zero.

Z każdą funkcją zdaniową $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ wiąże się na ogół pewna skończona rodzina zbiorów $X_1, \ldots, X_n$, których elementy można podstawić do Φ za odpowiednie zmienne. Zbiory te nazywamy *zakresami zmienności* odpowiednich zmiennych.

Jeśli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej, to oczywiście

$$a \in \{x : \Phi(x)\} \Leftrightarrow \Phi(a)$$

i jeśli X jest zakresem zmienności zmiennej x, to $\Phi(a) \Rightarrow a \in X$.

Czasami zamiast mówić, że zakresem zmienności zmiennej x funkcji $\Phi(x)$ jest zbiór X, mówi się, że funkcja $\Phi(x)$ określona jest na zbiorze X.

Ogólniej, jeśli $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest funkcją zdaniową n zmiennych, to

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \Phi(x_1, \ldots, x_n)\} \Leftrightarrow \Phi(a_1, \ldots, a_n).$$

Zbiory

$$\{x : \Phi(x)\} \quad \text{i} \quad \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \Phi(x_1, \ldots, x_n)\}$$

nazywane są *wykresami funkcji zdaniowej.*

Warto zaznaczyć, że jeżeli istnieją zbiory będące zakresami zmienności zmiennych funkcji Φ, to wykres funkcji Φ zawsze istnieje. O tym, że nie każdej funkcji zdaniowej można przyporządkować wykres, zdecydowały pewne ograniczenia na konstrukcje zbiorów związane z pojawieniem się tzw. *antynomii*.

Funkcje zdaniowe możemy łączyć spójnikami logicznymi i w ten sposób otrzymywać nowe funkcje zdaniowe, pod warunkiem, że zmienne równokształtne występujące w funkcjach składowych mają ten sam zakres zmienności, np. $\Phi(x, y)$ możemy połączyć spójnikiem z $\Psi(x, z)$ lub $\Xi(u, x)$, jeżeli tylko zakres zmienności zmiennej x w Φ jest taki sam jak zakres zmienności zmiennej x w Ψ, czy Ξ.

Kwantyfikatory obok omawianych uprzednio spójników są rodzajem operacji logicznych wykonywanych na funkcjach zdaniowych.

W matematyce najczęściej używane są kwantyfikatory będące formalnymi odpowiednikami zwrotów „dla każdego x" i „istnieje x". Oznacza się je odpowiednio przez

$$\bigwedge_x \quad \text{oraz} \quad \bigvee_x$$

i nazywa *kwantyfikatorem ogólnym* (ewentualnie *dużym*) oraz *szczegółowym* (ewentualnie *egzystencjonalnym* lub *małym*).

Tak więc jeśli dana jest funkcja zdaniowa $\Phi(x, y)$, to $\bigwedge\limits_x \Phi(x, y)$ czytamy: dla każdego x z zakresu zmienności funkcji Φ zachodzi $\Phi(x, y)$. Podobnie $\bigvee\limits_x \Phi(x, y)$ czytamy: istnieje w obrębie zakresu zmienności Φ takie x, że $\Phi(x, y)$.

W obydwu przypadkach zastosowanie kwantyfikatora przekształciło nam funkcję zdaniową dwu zmiennych x i y w funkcję zdaniową jednej zmiennej y. Wprawdzie w zapisie tej funkcji występuje litera x, jednak wartość nowej funkcji zdaniowej zależy jedynie od tego, co podstawimy w miejsce y. O zmiennej x mówimy wówczas, że jest *zmienną związaną* w odróżnieniu od y, które nazywamy *zmienną wolną*. Formuła bez zmiennych wolnych jest *zdaniem*.

Wprowadza się też pojęcie *kwantyfikatorów ograniczonych* $\bigwedge\limits_{\Phi(x)}$, $\bigvee\limits_{\Phi(x)}$, które czytamy odpowiednio: „dla każdego x takiego, że $\Phi(x)$..." oraz „istnieje x mające własność $\Phi(x)$ takie, że...". Ściślej, wyrażenie $\bigwedge\limits_{\Phi(x)} \Psi$ traktujemy jako skrót zapisu $\bigwedge\limits_x (\Phi(x) \Rightarrow \Psi)$, a wyrażenie $\bigvee\limits_{\Phi(x)} \Psi$ jako skrót zapisu $\bigvee\limits_x (\Phi(x) \wedge \Psi)$.

Symbolami Φ, Ψ, Θ oznaczać będziemy tzw. *zmienne predykatywne*, tj. zmienne, dla których zakresem zmienności będą funkcje zdaniowe.

Wyrażenie (formuła) zbudowane ze zmiennych predykatywnych, funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów nazywamy *tautologią rachunku kwantyfikatorów* (rachunku funkcyjnego), jeśli wyrażenie to jest zawsze prawdziwe bez względu na to jakie funkcje zdaniowe zostaną podstawione za zmienne predykatywne.

Niekiedy formułę Φ nazywamy zdaniem, mimo że napisana jest w ten sposób, że występują w niej zmienne wolne $x_1, \ldots, x_n$. W takich jednak wypadkach formułę tę uważamy za skrótowy zapis formuły

$$\bigwedge_{x_1} \cdots \bigwedge_{x_n} \Phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Sposób ten jest często praktykowany w algebrze, gdzie np. przemienność dodawania zapisujemy jako $x+y = y+x$, co ściśle rzecz biorąc oznacza zdanie:

$$\bigwedge_{x} \bigwedge_{y} x+y = y+x.$$

Znaleźć wykresy Z funkcji zdaniowych (zad. 3.1-3.10):

3.1. $x^2-1 \geqslant 0$, $X = \mathscr{R}$.

3.2. $x = x$, $X = \mathscr{N}$.

3.3. $x \neq x$, $X = \mathscr{Z}$.

3.4. $x+1 = 2x$, $X = \mathscr{R}^+$.

3.5. $x+1 = 2x$, $X = \mathscr{R}-\mathscr{R}^+$.

3.6. $|x| \geqslant 1$, $X = \mathscr{C}$.

3.7. $|x| = |x+1|$, $X = \mathscr{R}$.

3.8. $x^2 \geqslant x$, $X = \mathscr{N}$.

3.9. $(x-1)(x+1) = 0$, $X = \mathscr{Z}$.

3.10. $|x+1|+|x+2| = 1$, $X = \mathscr{R}$.

Załóżmy, że zmienne funkcji zdaniowych Φ_1 i Φ_2 mają te same zakresy zmienności. Niech Z_1 i Z_2 będą odpowiednio wykresami funkcji Φ_1 i Φ_2. Znaleźć wykres funkcji zdaniowej (zad. 3.11-3.17):

3.11. $\Phi_1 \wedge \Phi_2$. **3.12.** $\Phi_1 \vee \Phi_2$. **3.13.** $\sim\Phi$.

3.14. $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$. **3.15.** $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$. **3.16.** $B_8(\Phi_1, \Phi_2)$.

Znaleźć funkcję zdaniową o wykresie (zad. 3.17-3.20):

3.17. $Z_1 \cap Z_2$. **3.18.** $Z_1 \cup Z_2$. **3.19.** $Z_1 - Z_2$.

3.20. $Z_1 \times Z_2$, przy dodatkowym założeniu, że Φ_1 i Φ_2 są funkcjami różnej zmiennej.

Funkcja zdaniowa $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest *prawdziwa* w $X_1, \ldots, X_n$, jeśli dla każdego $a_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ jest zdaniem prawdziwym. Podobnie mówimy, że funkcja zdaniowa $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest *fałszywa* w $X_1, \ldots, X_n$, jeśli dla każdego $a_i \in X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ jest zdaniem fałszywym.

Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową o zakresie zmienności X, zaś zbiór Z będzie wykresem funkcji Φ. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by (zad. 3.21-3.22):

3.21. $Z = X$. **3.22.** $Z = O$.

3.23. Załóżmy, że wykresy Z_1 — funkcji zdaniowej $\Phi_1(x)$ i Z_2 — funkcji zdaniowej $\Phi_2(x)$ są równe; jaki jest wykres funkcji zdaniowej:

a) $\Phi_1(x) \Leftrightarrow \Phi_2(x)$, b) $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, c) $\Phi_1(x) \vee \sim \Phi_2(x)$.

3.24. Niech $\Phi_1(x)$ będzie funkcją zdaniową prawdziwą w X, zaś $\Phi_2(x)$ dowolną funkcją zdaniową. Jaki jest wykres funkcji zdaniowej:

a) $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, b) $\Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$,
c) $\sim \Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$, d) $\sim \Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$.

Znaleźć wykresy funkcji zdaniowych $\Phi(x, y)$, gdzie zakresem zmienności zmiennej x i zakresem zmienności zmiennej y jest zbiór $\mathscr{R}$ (zad. 3.25-3.55):

3.25. $x = y$. **3.26.** $x < y$.
3.27. $x \leqslant y$. **3.28.** $x \geqslant y$.
3.29. $x^2+y^2 \leqslant 1$. **3.30.** $x^2+y^2 = 1$.
3.31. $ax+by+c = 0$ $(a, b, c \in \mathscr{R})$. **3.32.** $x \neq y$.
3.33. $x^2+y^2 = 0$. **3.34.** $x \cdot y = 1$.
3.35. $x \cdot y = 0$. **3.36.** $x \cdot y < 1$.
3.37. $ax^2+bx+c+y = 0 (a,b,c \in \mathscr{R})$. **3.38.** $x < |y|$.
3.39. $|x| > y$. **3.40.** $(ax)^2+(by)^2 \leqslant 1 (a,b,c \in \mathscr{R})$.
3.41. $x^2+y^2 \geqslant 0$. **3.42.** $|x \cdot y| < 0$.
3.43. $x \geqslant y \vee x^2+y^2 \leqslant 1$. **3.44.** $x+y = 0 \vee x \geqslant y$.
3.45. $x+y = 1 \vee x \neq y$. **3.46.** $x \geqslant y \wedge x^2+y^2 = 0$.
3.47. $x \cdot y < 1 \Rightarrow x \cdot y = 1$. **3.48.** $\sim(x \cdot y < 1)$.
3.49. $|x \cdot y| < 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0$. **3.50.** $x \geqslant 0 \vee y \geqslant 0$.
3.51. $x < |y| \Rightarrow x^2+y^2 \geqslant 0$. **3.52.** $x \leqslant 0 \vee (y = y)$.
3.53. $x^2+y^2 = 0 \vee x = x$. **3.54.** $y^2+2y-3 \leqslant 0$.
3.55. $x^3+1 > 0$.

Znaleźć wykresy funkcji zdaniowych zmiennych x, y i z, których zakresem zmienności jest zbiór $\mathscr{R}$ (zad. 3.56-3.62):

3.56. $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. **3.57.** $x+y = z$.
3.58. $x+y = 1$. **3.59.** $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3.60. $x^2+y^2 < 4 \wedge |z| < 1$. **3.61.** $|x| < 1 \wedge |y| < 1 \wedge |z| < 1$.

3.62. $x^2+y^2 = z^2$.

O układzie $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ mówimy, że spełnia funkcję zdaniową $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jeśli $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ jest zdaniem prawdziwym. Jeśli istnieją takie $a_1, \ldots, a_n$, że $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ spełnia $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, to funkcję $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *funkcją spełnialną*.

3.63. Dowieść, że wykres funkcji zdaniowej Φ jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja Φ nie jest spełnialna.

3.64. Dowieść, że funkcja Φ nie jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja Φ jest fałszywa.

3.65. Dowieść, że jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są zakresami zmienności funkcji $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ i $X_i \neq 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to jeśli funkcja Φ jest prawdziwa. to jest ona spełnialna.

3.66. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \vee \Psi(y)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy albo funkcja $\Phi(x)$, albo funkcja $\Psi(y)$ jest spełnialna.

3.67. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \wedge \Psi(y)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $\Phi(x)$ i $\Psi(y)$ są spełnialne.

Czy takie samo twierdzenie jest prawdziwe i dla funkcji $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$?

3.68. Dowieść, że funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)$ nie jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(x)$ jest prawdziwa, a $\Psi(y)$ fałszywa.

Czy takie samo twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji $\Phi(x)$ i $\Psi(y)$?

3.69. Kiedy spełnialna jest funkcja $\sim\Phi(x)$?

3.70. Dowieść, że jeśli X jest zakresem zmienności zmiennej x, to wykres funkcji $\sim\Phi(x)$ jest różny od X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\Phi(x)$ jest spełnialna.

3.71. Dowieść, że jeśli $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ są takimi funkcjami, że dla wszelkich $a_1, \ldots, a_n$ z zakresu zmienności zmiennych $\Phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Psi(a_1, \ldots, a_n)$, to wykresy funkcji Φ i Ψ są identyczne.

3.72. Dowieść twierdzenia odwrotnego do podanego w zadaniu 3.71.

Zakładając, że $\Phi(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$, $\Theta(x, y, z)$ są funkcjami zdaniowymi o zmiennych x, y, z, wskazać zmienne wolne i zmienne związane w następujących formułach (zad. 3.73-3.85):

3.73. $\bigwedge_x \Phi(x, y, z)$. **3.74.** $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y, z)$.

3.75. $\bigvee_z \Phi(x, y, z)$. **3.76.** $\bigvee_x \Phi(x, y, z)$.

3.77. $[\bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x, y, z)] \Rightarrow \Psi(x, y, z)$.

3.78. $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y, z) \wedge \bigvee_z \Psi(x, y, z)$.

3.79. $\bigwedge_x \Phi(x, y, z) \Rightarrow \{\bigvee_x (\bigvee_y \Psi(x, y, z) \wedge \bigwedge_z \Theta(x, y, z))\}$.

3.80. $\bigvee_x [\Phi(x, y, z) \Rightarrow \Psi(x, x, y)] \Rightarrow \{\bigvee_x \bigvee_z [\Phi(x, x, y) \wedge \Theta(x, y, y)]\}$.

3.81. $\bigvee_x (x < y \vee x < z)$.

3.82. $\bigvee_x \bigwedge_y [(x < y) \Rightarrow (x < z) \wedge (z < y)]$.

3.83. $\bigwedge_x (x|y \wedge x|z \Rightarrow x|z)$.

3.84. $(\bigwedge_x \bigvee_y x < y) \vee (x < z)$.

3.85. $\bigvee_x (x < x \vee x < z)$.

3.86. Niech $\Phi(x)$ będzie funkcją zdaniową określoną na zbiorze $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dowieść, że

a) $\bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(a_1) \wedge \Phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \Phi(a_n))$,

b) $\bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow (\Phi(a_1) \vee \Phi(a_2) \vee \ldots \vee \Phi(a_n))$.

3.87. Niech $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi na zbiorze $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dowieść, że

a) $\bigwedge_{\Psi(x)} \Phi(x) \Leftrightarrow \{[\Psi(a_1) \Rightarrow \Phi(a_1)] \wedge [\Psi(a_2) \Rightarrow \Phi(a_2)] \wedge \ldots \wedge [\Psi(a_n) \Rightarrow \Phi(a_n)]\}$,

b) $\bigvee_{\Psi(x)} \Phi(x) \Leftrightarrow \{[\Psi(a_1) \wedge \Phi(a_1)] \vee [\Psi(a_2) \wedge \Phi(a_2)] \vee \ldots \vee [\Psi(a_n) \wedge \Phi(a_n)]\}$.

Zakładając, że x, y i z przebiegają zbiór $\mathscr{R}$, znaleźć wykresy następujących funkcji zdaniowych (zad. 3.88-3.111):

3.88. $\bigvee_x x^2+y^2 = 1$.

3.89. $\bigvee_x x \cdot y = 1$.

3.90. $\bigwedge_x x^2+y^2 = 1$.

3.91. $\bigvee_x x \cdot y = 1$.

3.92. $\bigvee_x x \cdot y \neq 1$.

3.93. $\bigwedge_x x \cdot y < 1$.

3.94. $\bigvee_x x \cdot y < 1$.

3.95. $\bigwedge_x x^2+1 < y$.

3.96. $\bigvee_x x^2+y^2 = z^2$.

3.97. $\bigwedge_x x^2+y^2 \neq z^2$.

3.98. $\bigwedge_x \bigvee_y x^2+y^2 = z^2$.

3.99. $\bigvee_x \bigwedge_y x \cdot y = z$.

3.100. $\bigwedge_x \bigvee_y (x < z) \wedge (z < y)$.

3.101. $\bigwedge_x \bigwedge_y x^2+y^2 \geqslant z$.

3.102. $\bigvee_x (x^2+y^2 = 1) \vee (x < x)$.

3.103. $\bigvee_x (x \cdot y = 1) \wedge (x = x)$.

3.104. $\bigvee_x \sqrt{1-x^2} = y$.

3.105. $\bigwedge_x \sqrt{1-x^2} = y$.

3.106. $\bigvee_x (x^2+2ax+b = y) \wedge (y > 0)$.

3.107. $\bigwedge_x \sin y < x \wedge x < 2+\sin y$.

3.108. $\bigvee_x \sin y < x \wedge x < 2+\sin y$.

3.109. $\bigvee_x \operatorname{tg} x > y \wedge -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$.

3.110. $\bigwedge_x \operatorname{tg} x > y \wedge -\frac{1}{2}\pi < x \wedge x < \frac{1}{2}\pi$.

3.111. $\bigvee_z x = z \cdot \sin z \wedge y = z \cdot \cos z$.

3.112. Niech $\Phi(x, y)$ będzie funkcją zdaniową określoną dla liczb rzeczywistych. Jaki jest sens geometryczny operacji prowadzących od wykresu funkcji $\Phi(x, y)$ do wykresów następujących funkcji:

a) $\bigwedge_x \Phi)(x, y)$, b) $\bigvee_x \Phi(x, y)$, c) $\bigwedge_y \Phi(x, y)$, d) $\bigvee_y \Phi(x, y)$.

3.113. Dowieść, że dla dowolnej funkcji zdaniowej $\Phi(x, y)$, jeśli którykolwiek z wykresów funkcji $\bigvee_x \Phi(x, y)$, $\bigvee_y \Phi(x, y)$ nie jest zbiorem pustym, to $\Phi(x, y)$ jest spełnialna.

Niech $x = y$, $x < y$, $x \leqslant y$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla liczb naturalnych. Za ich pomocą, korzystając ze znanych operacji arytmetycznych, takich jak $x+y$, $x \cdot y$, symboli dla liczb oraz symboli logicznych, zapisać następujące funkcje zdaniowe (zad. 3.114-3.128):

3.114. x jest liczbą parzystą.

3.115. x jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych.

3.116. x jest liczbą pierwszą.

3.117. x nie jest liczbą pierwszą.

3.118. x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb y i z.

3.119. x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z.

3.120. x przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 lub 2.

3.121. Każda liczba przy dzieleniu przez 2 daje resztę 0 lub 1.

3.122. Pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza (tw. Czebyszewa).

3.123. Liczby x i y mają takie same dzielniki.

3.124. Każda liczba nieparzysta większa od 3 rozkłada się na sumę dwu liczb pierwszych (hipoteza Goldbacha).

3.125. Każde trzy liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność.

3.126. Każde dwie liczby mają największy wspólny dzielnik.

3.127. Nie istnieje największa liczba naturalna.

3.128. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

W odróżnieniu od założeń czynionych poprzednio przyjmijmy teraz, że zmienne w funkcjach zdaniowych $x = y$, $x < y$ i $x \leqslant y$ przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Korzystając z tych funkcji oraz ze znanych operacji arytmetycznych, takich jak $x+y$, x^y, $x \cdot y$, $|x|$ itp. zapisać za pomocą symboli logicznych następujące formuły (zad. 3.129-3.135):

3.129. Nie istnieje liczba, której kwadrat byłby mniejszy od zera.

3.130. Funkcja $f(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

3.131. Między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia.

3.132. Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

3.133. x nie jest kwadratem żadnej liczby rzeczywistej.

3.134. y jest pierwiastkiem stopnia co najwyżej trzeciego z pewnej liczby rzeczywistej.

3. 135. $f(x)$ jest funkcją malejącą.

Przy założeniach czynionych uprzednio, mając dodatkowo funkcję zdaniową $n \in \mathcal{N}$ (n jest liczbą naturalną) zapisać za pomocą symboli logicznych następujące formuły (funkcje zdaniowe) (zad. 3.136-3.150):

3.136. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący.

3.137. Ciąg $\{a_n\}$ przyjmuje wartości dodatnie.

3.138. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

3.139. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

3.140. Ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca stały.

3.141. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest od pewnego miejsca stały, to jest zbieżny.

3.142. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to zawiera podciąg zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.

3.143. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0.

3.144. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to jest ograniczona.

3.145. Funkcja $f(x)$ jest w przedziale $\langle a, b\rangle$ jednostajnie ciągła.

3.146. a jest kresem górnym liczb ze zbioru $\mathcal{R}$.

3.147. a jest kresem dolnym liczb ze zbioru $\mathcal{R}$.

3.148. Jeśli $f(x)$ jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to osiąga w tym przedziale kresy.

3.149. Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami ciągłymi, to i funkcja $f(x)\,g(x)$ też jest funkcją ciągłą.

3.150. Jeśli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami jednostajnie ciągłymi, to funkcja $f(x)+g(x)$ też jest jednostajnie ciągła.

Udowodnić, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów (zad. 3.151-3.159):

3.151. $\sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim\Phi(x)$ (*prawo de Morgana*).

3.152. $\sim \bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim\Phi(x)$ (*prawo de Morgana*).

3.153. $\bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x,y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x,y)$.

3.154. $\bigvee_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Leftrightarrow \bigvee_x \Phi(x) \vee \bigvee_x \Psi(x)$.

3.155. $\bigvee_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x) \wedge \bigvee_x \Psi(x)$.

3.156. $\bigwedge_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)] \Leftrightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \wedge \bigwedge_x \Psi(x)$.

3.157. $\bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x) \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)]$.

3.158. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$.

3.159. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$.

Zakładając, że funkcja zdaniowa Ψ nie zawiera x jako zmiennej wolnej dowieść, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku kwantyfikatorów (zad. 3.160-3.166):

3.160. $(\bigwedge_x \Psi) \Leftrightarrow \Psi$.

3.161. $\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi] \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \vee \Psi$.

3.162. $\Psi \wedge \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x [\Psi \wedge \Phi(x)]$.

3.163. $[\Psi \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Psi \Rightarrow \Phi(x)]$.

3.164. $[\Psi \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)] \Rightarrow \bigvee_x [\Psi \Rightarrow \Phi(x)]$.

3.165. $[\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \Psi] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi]$.

3.166. $[\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \Psi] \Rightarrow \bigvee_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi]$.

Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami (zad. 3.167-3.177):

3.167. $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_z \Phi(z)$.

3.168. $\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \vee \bigwedge_x \Psi(x)$.

3.169. $\bigwedge_y \bigvee_x \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_x \bigwedge_y \Phi(x,y)$.

3.170. $\bigvee_x \Phi(x) \wedge \bigvee_x \Psi(x) \Rightarrow \bigvee_x [\Phi(x) \wedge \Psi(x)]$.

3.171. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)]$.

3.172. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)] \Rightarrow \bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$.

3.173. $\bigvee_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Psi(x)]$.

3.174. $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x, x)$.

3.175. $\bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x, x)$.

3.176. $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x)]$.

3.177. $\bigwedge_x [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$.

Niech Ax_L oznacza zbiór zdań postaci:

a) $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Psi(x)]$,

b) $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)$,

c) $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x \Phi(x, y)$,

d) $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x, x)$ o ile Φ nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu jest zmienna wolna y,

e) $\Phi \Rightarrow \bigwedge_x \Phi$ o ile Φ nie zawiera zmiennej wolnej x,

f) $\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Psi(x)]$,

g) $\Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)$,

h) $\bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y) \Rightarrow \bigvee_y \bigvee_x \Phi(x, y)$,

i) $\bigvee_x \Phi(x, x) \Rightarrow \bigvee_x \bigvee_y \Phi(x, y)$ o ile Φ nie zawiera żadnego kwantyfikatora, który wiąże zmienną x i w którego zasięgu znajdowałaby się zmienna wolna y,

j) $\bigvee_x \Phi \Rightarrow \Phi$ o ile Φ nie zawiera zmiennej wolnej x,

oraz wszystkie zdania, które można uzyskać z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe dowolnych wyrażeń i poprzedzenie ich kwantyfikatorami dużymi wiążącymi wszystkie zmienne wolne.

Tak określony zbiór Ax_L jest systemem aksjomatów dla rachunku kwantyfikatorów.

3.178. Stosując taką metodę jak w zadaniach 3.151-3.166 dowieść, że formuły b-j są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.

3.179. Stosując reguły wnioskowania (patrz rozdz. I) wyprowadzić z Ax_L formuły z zadań 3.151-3.166.

3.180. Dowieść, że nie jest konsekwencją Ax_L następujące zdanie:

$$\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x).$$

3.181. Dowieść, że uzupełniając zbiór Ax_L jeszcze jednym zdaniem typu

$$\bigvee_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x)],$$

z tak wzbogaconego zbioru możemy udowodnić zdanie

$$\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x).$$

Uwaga. Zbiór Ax_L z dodanym zdaniem $\bigvee_x [\Phi(x) \Leftrightarrow \Phi(x)]$ nazywamy *aksjomatyką rachunku kwantyfikatorów* w dziedzinie niepustej.

***3.182.** Dowieść, że jeśli w formule Φ będącej twierdzeniem rachunku kwantyfikatorów (tautologią) zastąpimy wszystkie kwantyfikatory przez kwantyfikatory ograniczone do pewnej funkcji zdaniowej $\Psi(x)$, to otrzymamy znów tautologię.

Przeprowadzić dowody poniższych twierdzeń, wskazać z jakich reguł wnioskowania i jakich tautologii rachunku kwantyfikatorów korzysta się w kolejnych krokach dowodowych (zad. 3.183-3.189):

3.183. Każda liczba naturalna ma przynajmniej jeden dzielnik, który jest liczbą pierwszą.

3.184. Między dowolnymi dwoma liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia, różna od nich.

3.185. Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

3.186. Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

3.187. Dla każdych dwóch liczb istnieje wspólna wielokrotność.

3.188. Dla dowolnego b i $a \neq 0$ równanie $ax+b = 0$ ma rozwiązanie.

3.189. W każdym trójkącie istnieje punkt równoodległy od wszystkich boków.

Formuła Φ jest formułą *elementarną (atomową)*, jeżeli nie jest postaci $\Phi_1 \cdot \Phi_2$, gdzie $\cdot$ oznacza jeden ze spójników logicznych, ani też postaci

$Q\Phi_1$, gdzie Q jest bądź znakiem negacji, bądź kwantyfikatorem. Wynika stąd w szczególności, że w formule elementarnej wszystkie zmienne są wolne.

O formule Φ mówimy, że jest ona w *dyzjunkcyjnej* (lub *koniunkcyjnej*) *postaci normalnej* jeżeli jest ona postaci

$$\Phi = Q^1 x_1 \ldots Q^n x_n \; \Phi'(x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie $Q^i x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ oznacza kwantyfikator (duży lub mały), formuła Φ' natomiast nie zawiera kwantyfikatorów i jest w alternatywno-koniunkcyjnej (lub koniunkcyjno-alternatywnej) postaci normalnej (por. zadania 1.80 i 1.81).

Formułę Φ' nazywamy dyzjunkcyjną (koniunkcyjną) postacią normalną formuły Φ, jeśli Φ' jest w dyzjunkcyjnej (koniunkcyjnej) postaci normalnej, Φ' zawiera te same zmienne wolne co Φ i $\Phi \Leftrightarrow \Phi'$.

Znaleźć dyzjunkcyjną (koniunkcyjną) postać następujących formuł przy założeniu, że Φ, Ψ, Θ są formułami elementarnymi o zmiennych ze zbioru $\{x, y, z\}$ (zad. 3.190-3.196):

3.190. $\bigwedge\limits_{x} \Phi(x) \vee \bigwedge\limits_{x} \Psi(x)$.

3.191. $\bigvee\limits_{x} \Phi(x) \wedge \bigvee\limits_{x} \Psi(x)$.

3.192. $\bigvee\limits_{x} \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge\limits_{x} \Psi(x)$.

3.193. $\bigvee\limits_{x} \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x} \Psi(x, y)$.

3.194. $\sim \bigvee\limits_{x} [\Phi(x) \wedge \bigvee\limits_{y} \Psi(x, y)]$.

3.195. $\sim \bigwedge\limits_{x} [\bigvee\limits_{y} \Phi(x, y) \Rightarrow \sim \bigwedge\limits_{y} \Psi(x, y, z) \vee \bigwedge\limits_{z} \Theta(x, y, z)]$.

3.196. $\bigvee\limits_{x} \{\bigwedge\limits_{x} \Phi(x, y) \vee \sim \bigvee\limits_{y} [\Psi(x, y) \vee \bigwedge\limits_{z} \Theta(z, x)]\}$.

3.197. Dowieść, że każda formuła może być przedstawiona w koniunkcyjnej postaci normalnej.

3.198. Dowieść, że każda formuła może być przedstawiona w dyzjunkcyjnej postaci normalnej.

3.199. Czy dla danej formuły Φ istnieje tylko jedna jej dyzjunkcyjna (koniunkcyjna) postać normalna?

3.200. Sprowadzić do postaci normalnej formuły z zadań 3.151-3.174.

Rozdział IV

RELACJE. RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

Relacją n-członową nazywamy zbiór, którego wszystkie elementy są n-kami uporządkowanymi. Innymi słowy relacją n-członową nazywamy taki zbiór R, dla którego istnieją zbiory $A_1, \ldots, A_n$ takie, że $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$.

Mając daną relację $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$, *i-tą dziedziną* R nazywamy zbiór

$$D_i(R) = \{x \in A_i : \bigvee_{a_1} \ldots \bigvee_{a_{i-1}} \bigvee_{a_{i+1}} \ldots \bigvee_{a_n} \langle a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle \in R.$$

W szczególności jeżeli R jest relacją dwuczłonową, to pierwszą dziedzinę $D_1(R)$ nazywamy po prostu *dziedziną* R i oznaczamy przez $D(R)$, a drugą dziedzinę $D_2(R)$ nazywamy *przeciwdziedziną* relacji R i oznaczamy przez $D^*(R)$.

Tak więc, dla $R \subset A \times B$ mamy

$$D(R) = \{x \in A : \bigvee_{y \in B} \langle x, y\rangle \in R\}, \qquad D^*(R) = \{y \in B : \bigvee_{x \in A} \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Zbiór $D(R) \cup D^*(R)$ nazywamy *polem relacji* R.

Zamiast pisać $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in R$ piszemy często $R(x_1, \ldots, x_n)$, a w przypadku gdy R jest relacją dwuczłonową piszemy $x_1 R x_2$.

Rozważmy teraz relacje $R \subset X^2$ ($X^2 = X \times X$). Spośród nich wyróżnimy pewne specjalne rodzaje relacji, a mianowicie:

a) *zwrotne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x \in X} \langle x, x\rangle \in R$$

(lub $\bigwedge_{x \in X} xRx$, $\bigwedge_{x \in X} R(x, x)$),

b) *przeciwzwrotne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\langle x, x\rangle \notin R$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X} \sim xRx$, $\bigwedge\limits_{x\in X} \sim R(x, x)$),

c) *symetryczne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} xRy \Rightarrow yRx$, $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$),

d) *słabo antysymetryczne* w X (*wpół antysymetryczne*, *na wpół przeciwsymetryczne*), tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x = y$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$, $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y$),

e) *przeciwsymetryczne* w X (*asymetryczne*), tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}(\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R)$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} xRy \Rightarrow \sim yRx$, $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} R(x, y) \Rightarrow \sim R(y, x)$),

f) *przechodnie* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{z\in X}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X}\bigwedge\limits_{z\in X} xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$, $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X}\bigwedge\limits_{z\in X} R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$),

g) *spójne* w X, tj. takie, że

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y$$

(lub $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} xRy \vee yRx \vee x = y$, $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in X} R(x, y) \vee R(y, x) \vee x = y$).

Przez I_X oznaczamy następującą relację:

$$\{\langle x, y\rangle \in X^2 : x = y\} = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$$

i nazywamy ją *identycznością* na zbiorze X.

Jeśli $R \subset X^2$ i $X_1 \subset X$, to relację $R \cap X_1^2$ nazywamy *obcięciem* R do X_1 i oznaczamy przez $R \restriction X_1$.

O relacji $R \subset X^2$ mówimy, że jest zwrotna (przeciwzwrotna, symetryczna itp.) jeśli $R \restriction X_1$ jest zwrotna (przeciwzwrotna, symetryczna itp.) na X_1 będącym polem R.

Relację $R \subset X^2$ zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy *relacją równoważności.*

Relację $R \subset X^2$ zwrotną, słabo antysymetryczną i przechodnią nazywamy *relacją porządku.*

Znaleźć dziedziny następujących relacji R (zad. 4.1-4.6):

4.1. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$.

4.2. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$.

4.3. $R = \{\langle a, b, c\rangle, \langle a, c, b\rangle, \langle a, d, b\rangle\}$.

4.4. $R(a, b) \Leftrightarrow (a \in \mathcal{N} \wedge b \in \mathcal{N} \wedge a < b)$.

4.5. $R(a, b, c) \Leftrightarrow (a \in \mathcal{Z} \wedge b \in \mathcal{Z} \wedge c \in \mathcal{N} \wedge a^2+b^2 < 10-c^2)$.

4.6. $R(a, b, c) \Leftrightarrow \left(a \in \mathcal{R} \wedge b \in \mathcal{R} \wedge c \in \mathcal{N} \wedge \bigvee_{x \in \mathcal{R}-\{0\}} \frac{a \cdot b}{x} = c+1\right)$.

4.7. Dowieść, że jeśli dla pewnego i mamy $D_i(R) = O$, to $R = O$.

Zakładając, że różne litery oznaczają różne elementy, zbadać, które spośród własności a-h mają następujące relacje $R \subset X^2$, gdzie $X = \{a, b, c, d\}$. Jeśli R nie ma którejś z wymienionych własności, zbadać, czy istnieje takie niepuste $X_1 \subset X$, że $R \restriction X_1$ własność tę w X_1 już posiada (zad. 4.8-4.11):

4.8. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$.

4.9. $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.

4.10. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle a, d\rangle\}$.

4.11. $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.

4.12. Udowodnić, że dla dowolnej relacji R, $R \subset D(R) \times D^*(R)$.

4.13. Udowodnić, że część wspólna dwu relacji zwrotnych w zbiorze X jest zwrotna w zbiorze X.

4.14. Udowodnić, że na to, by relacja R była zwrotna, potrzeba i wystarcza, by $I_{D(R) \cup D^*(R)} \subset R$.

4.15. Udowodnić, że na to, by relacja R była przeciwzwrotna, potrzeba i wystarcza, by $I_{D(R) \cup D^*(R)} \cap R = O$.

4.16. Udowodnić, że część wspólna oraz suma dowolnej rodziny relacji przeciwzwrotnych jest przeciwzwrotna.

4.17. Czy suma dowolnej rodziny relacji zwrotnych jest zwrotna?

4.18. Udowodnić, że jeśli relacja R jest słabo antysymetryczna w zbiorze X, to $R-I_X$ jest asymetryczna w zbiorze X. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

4.19. Udowodnić, że jeżeli relacja R jest asymetryczna w zbiorze X, to $R \cup I_X$ jest słabo antysymetryczna w zbiorze X. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

4.20. Dowieść, że jeżeli $R \subset X^2$ ma jedną z własności a-g, to $R \restriction D(R) \cup D^*(R)$ też ma tę własność.

4.21. Udowodnić, że jeżeli R jest relacją asymetryczną, to jest relacją przeciwzwrotną.

4.22. Udowodnić, że jeśli $R \subset X^2$ jest relacją spójną w X, to $D(R) - D^*(R)$ i $D^*(R) - D(R)$ są co najwyżej jednoelementowe.

Jeśli $R_1 \subset X^2$, to $R_2 \subset X^2$ takie, że $R_1 \subset R_2$ nazywamy *rozszerzeniem relacji* R_1.

Zbadać, czy każdą relację $R \subset X^2$ można rozszerzyć do relacji (zad. 4.23-4.29):

4.23. Zwrotnej w X^2.

4.24. Przeciwzwrotnej w X^2.

4.25. Symetrycznej w X^2.

4.26. Przeciwsymetrycznej w X^2.

4.27. Słabo antysymetrycznej w X^2.

4.28. Przechodniej w X^2.

4.29. Spójnej w X^2.

Dla danej relacji R definiujemy

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}.$$

4.30. Udowodnić, że na to, by relacja R była symetryczna, potrzeba i wystarcza, by $R \subset R^{-1}$.

4.31. Udowodnić, że $R \subset R^{-1} \Leftrightarrow R = R^{-1}$.

4.32. Sprawdzić, czy prawdziwe są wzory:

a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,

c) $I_X^{-1} = I_X$, d) $(X^2)^{-1} = X^2$.

4.33. Udowodnić, że na to, by relacja R była spójna w zbiorze X, potrzeba i wystarcza, by $R \cup R^{-1} \cup I_X = X^2$.

Sprawdzić, czy następujące zdania są prawdziwe (zad. 4.34-4.38):

4.34. Suma dwu relacji symetrycznych na zbiorze X jest symetryczna na tym zbiorze.

4.35. Część wspólna dwu relacji przechodnich na zbiorze X jest przechodnia na tym zbiorze.

4.36. Część wspólna dwu relacji spójnych na zbiorze X jest spójna na tym zbiorze.

4.37. Suma dwu relacji spójnych na zbiorze X jest spójna na tym zbiorze.

4.38. Jeżeli R jest relacją przechodnią w X oraz $R \subset S \subset X^2$, to S jest relacją przechodnią w X.

Iloczynem względnym relacji R i S (oznaczanym dalej przez $R \circ S$) nazywamy relację $T \subset D(R) \times D^*(S)$ taką, że

$$\langle x, z\rangle \in T \Leftrightarrow \bigvee_{y} (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S).$$

4.39. Udowodnić, że na to, by relacja R była przechodnia, potrzeba i wystarcza, by $R \circ R \subset R$.

4.40. Udowodnić, że $I_X \circ I_Y = I_{X \cap Y}$.

4.41. Udowodnić, że $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

4.42. Udowodnić, że $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

4.43. Udowodnić, że $I_{D(R)} \subset R \circ R^{-1}$, $I_{D^*(R)} \subset R^{-1} \circ R$.

4.44. W zadaniu tym zajmujemy się relacjami w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$, tj. podzbiorami $\mathscr{R}^2$.

a) Jaka jest naturalna interpretacja geometryczna takich relacji?

b) Jaki jest sens geometryczny zbiorów $D(R)$ i $D^*(R)$?

c) Jaki jest sens geometryczny własności zwrotności?

d) Jaki jest sens geometryczny własności symetrii?

e) Jaki jest sens geometryczny spójności?

f) Jaki jest sens geometryczny przeciwzwrotności?

g) Jaki jest sens geometryczny asymetrii?

h) Jaki jest sens geometryczny słabej antysymetrii?

Zbadać, które spośród własności a-g ze str. 37-38 ma relacja R (zad. 4.45-4.81):

4.45. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow 3 | x-y$.

4.46. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow 2 | x+y$.

4.47. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x | y$.

4.48. $R \subset (\mathscr{N} - \{0\})^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N} - \{0\}} xRy \Leftrightarrow (x | y \wedge x \neq y)$.

4.49. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 3)$.

4.50. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 1).$

4.51. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2.$

4.52. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2.$

4.53. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3.$

4.54. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x^3 = y^2.$

4.55. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow |x| < |y|.$

4.56. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| = 3.$

4.57. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| \neq 3.$

4.58. $R \subset \mathscr{Z}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{Z}} xRy \Leftrightarrow |x|+|y| \neq 4.$

4.59. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (x \leqslant 5 \wedge y \leqslant 5 \wedge x = y) \vee (x > 5 \wedge y > 5 \wedge$
$\wedge\, 2|x+y).$

4.60. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (x > y \vee y > x).$

4.61. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathscr{W}.$

4.62. $R \subset \mathscr{W}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{W}} xRy \Leftrightarrow x-y \notin \mathfrak{z}.$

4.63. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow x-y \notin \mathscr{N}.$

4.64. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow e^x = 2e^y.$

4.65. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Im} y.$

4.66. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow (3x = 2y).$

4.67. $R \subset \mathscr{W}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{W}} xRy \Leftrightarrow y = x+2.$

4.68. $R \subset \mathscr{R}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{R}} xRy \Leftrightarrow |x-2| = |y+2|.$

4.69. $R \subset \mathscr{C}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{C}} xRy \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in \mathscr{N}} x-y = a+bi.$

4.70. $R \subset (\mathscr{W}^2)^2 \wedge \bigwedge_{x,y,z,t \in \mathscr{W}} \langle x, y\rangle\, R\, \langle z, t\rangle \Leftrightarrow xt = yz.$

4.71. $R \subset (\mathscr{N}^3)^2 \wedge \bigwedge_{x,y,z,t,u,w \in \mathscr{N}} \langle x, y, z\rangle\, R\, \langle t, u, w\rangle \Leftrightarrow (x = t \wedge y = w \wedge$
$\wedge\, z = u).$

4.72. $R \subset \mathscr{N}^2 \wedge \bigwedge_{x,y \in \mathscr{N}} xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 4.$

*4.73. $R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \dot{-} Y$ jest zbiorem skończonym.

4.74. Niech Par oznacza podzbiór zbioru liczb naturalnych złożony z liczb parzystych,

$$R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \cap \mathrm{Par} = Y \cap \mathrm{Par}.$$

4.75. $R \subset (\mathscr{P}(\mathscr{N}))^2 \wedge \bigwedge_{X,Y \in \mathscr{P}(\mathscr{N})} XRY \Leftrightarrow X \cap Y \subset \mathscr{N} - \mathrm{Par}.$

4.76. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Rodzina $I \subset \mathscr{P}(X)$ nazywa się *ideałem* wtedy i tylko wtedy, gdy

1° $O \in I$,

2° $Z \in I \wedge Y \in I \Leftrightarrow Z \cup Y \in I$.

Dla danego ideału $I \subset \mathscr{P}(X)$ definiujemy relację R w zbiorze $\mathscr{P}(X)$ wzorem

$$ZRY \Leftrightarrow Z \dot{-} Y \in I.$$

4.77. Niech T będzie zbiorem wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych, $\{x_n\}\, R\, \{y_n\} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} > \lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\}$.

4.78. Przy warunku z zadania poprzedniego,

$$\{x_n\}\, R\, \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 7.$$

4.79. Przy warunku z zadania 4.77,

$$\{x_n\}\, R\, \{y_n\} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} y_n.$$

4.80. Dla danego zbioru X rozważmy rodzinę wszystkich relacji w zbiorze X i relację R określoną na elementach tej rodziny następująco:

$$ARB \Leftrightarrow D(A) \subset D(B).$$

4.81. Dane są zbiory X i Y oraz ideał I (por. zadanie 4.76) w zbiorze X taki, że $X \in I$. W zbiorze ${}^XY$ wszystkich funkcji o dziedzinie X i wartościach w Y, określamy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \in I.$$

Podziałem zbioru X nazywamy rodzinę $\{X_i : i \in I\}$ niepustych podzbiorów zbioru X spełniających następujące warunki:

a) $\bigwedge_{i,j \in I} (i \neq j \Leftrightarrow X_i \cap X_j = O)$, b) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$.

Każda relacja równoważności $R \subset X^2$ wyznacza podział zbioru X na tzw. klasy abstrakcji; *klasą abstrakcji* elementu x, $[x]_R$ nazywamy zbiór $\{y : yRx\}$.

4.82. Udowodnić, że jeśli R jest relacją równoważności, to
a) $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow xRy$, b) $[x]_R \cap [y]_R \neq O \Leftrightarrow xRy$.

4.83. Udowodnić, że każdy podział $\mathscr{X} = \{X_i : i \in I\}$ zbioru X wyznacza relację równoważności $R_{\mathscr{X}}$ w zbiorze X w myśl wzoru

$$xR_{\mathscr{X}}y \Leftrightarrow \bigvee_i (x \in X_i \wedge y \in X_i).$$

4.84. Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathscr{X}$ nie spełnia warunku b, to $R_{\mathscr{X}}$ nie jest relacją równoważności.

4.85. Udowodnić, że warunek a nie jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by relacja $R_{\mathscr{X}}$ określona za pomocą rodziny $\mathscr{X}$ spełniającej warunek b była relacją równoważności. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by R była relacją równoważności.

Jeśli relacja R wyznacza podział $\mathscr{X}$ zbioru X, zaś podział $\mathscr{X}$ wyznacza relację R_1, to $R = R_1$. Podobnie, podział $\mathscr{X}$ wyznaczony przez relację $R_{\mathscr{X}}$ równy jest $\mathscr{X}$.

Dla danego zbioru X oraz relacji $R \subset X^2$ zbadać, czy R jest relacją równoważności, jeśli tak wskazać klasy abstrakcji (zad. 4.86-4.123).

4.86. $X = \text{Par}$, $xRy \Leftrightarrow 3|x-y$.

4.87. $X = \mathscr{C}$, $z_1Rz_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$.

4.88. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow x-y = 2$.

4.89. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

4.90. $X = \mathscr{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$.

4.91. $X = \{1, 2, 3\}$, $xRy \Leftrightarrow x+y \neq 3$.

4.92. $X = \mathscr{R}[t]$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{a,b,c} (x-y = at^2+bt+c)$.

4.93. $X = \mathscr{Z}[t]$, $xRy \Leftrightarrow$ różnica wielomianów x i y ma wszystkie współczynniki parzyste.

4.94. $X = \mathscr{C}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{z \in \mathscr{R}} (z \neq 0 \wedge xz = y)$.

4.95. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{a \in \mathscr{R}} (x+yi)^2 = ai$.

4.96. $X = \mathscr{C}_\infty [a, b]$, $fRg \Leftrightarrow \bigvee_{k,n \in \mathscr{N}} (f^{(n)} = g^{(k)})$, gdzie $f^{(n)}$ oznacza n-tą pochodną funkcji f.

4.97. $X = \mathscr{W}[t]$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{a,b \in \mathscr{W}} (x-y = at+b)$.

4.98. $X = \mathscr{C}$, $xRy \Leftrightarrow x+y \in \mathscr{R}$.

4.99. $X = \{1, 2, ..., 16\}$, $xRy \Leftrightarrow 4|x^2-y^2$.

4.100. X = zbiór wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach wymiernych,

$$\{x_n\}_{n\in\mathscr{N}} R \{y_n\}_{n\in\mathscr{N}} \Leftrightarrow \lim x_n = \lim y_n.$$

4.101. Zbiór X jak w zadaniu 4.100, $\{x_n\}_{n\in\mathscr{N}} R \{y_n\}_{n\in\mathscr{N}} \Leftrightarrow \{x_n-y_n\}_{n\in\mathscr{N}}$ jest zbieżny do zera.

4.102. $X = \mathscr{N}$, k ustalona liczba naturalna większa od 2, $xRy \Leftrightarrow k|x+y$.

4.103. X i k jak w zadaniu 4.102, $xRy \Leftrightarrow k|x-y$.

4.104. X = zbiór macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych, Det A — wyznacznik macierzy A, $ARB \Leftrightarrow \text{Det}\, A = \text{Det}\, B$.

4.105. X = zbiór macierzy 2×2 o wyrazach rzeczywistych, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $ARB \Leftrightarrow \bigvee_{k\in\mathscr{R}} A-B = kI$.

4.106. $X = \mathscr{C}[t]$, $fRg \Leftrightarrow f-g \in \mathscr{R}[t]$.

4.107. $X = \mathscr{R}[t]$, $fRg \Leftrightarrow f-g$ jest wielomianem stopnia nieparzystego.

4.108. $X = \mathscr{R}[t]$ $fRg \Leftrightarrow f-g$ jest wielomianem stopnia parzystego.

4.109. $X = \mathscr{N}-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow x\cdot y$ jest liczbą nieparzystą.

4.110. $X = \mathscr{N}-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{t\in\mathscr{N}} xy = t^2$.

4.111. $X = \mathscr{N}\times(\mathscr{N}-\{0\})$, $\langle r, s\rangle R \langle t, u\rangle \Leftrightarrow ru = st$.

4.112. $X = \mathscr{N}\times\mathscr{N}$, $\langle r, s\rangle . R \langle t, u\rangle \Leftrightarrow r+u = s+t$.

4.113. $X = Z\times(Z-\{0\})$, $\langle r, s\rangle R \langle t, u\rangle \Rightarrow ru = st$.

4.114. $X = \mathscr{R}$, $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathscr{N}$.

4.115. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow (x \in \text{Par} \wedge y \in \text{Par} \wedge x = y) \vee$
$\vee (x \notin \text{Par} \wedge y \notin \text{Par} \wedge 3|x-y)$.

4.116. $X = \mathscr{N}$, $xRy \Leftrightarrow (x \in \text{Par} \wedge y \in \text{Par} \wedge 3|x-y) \vee$
$\vee (x \notin \text{Par} \wedge y \notin \text{Par} \wedge 5|x-y)$.

4.117. $X = \mathscr{P}(Y)$ (Y jest ustalonym zbiorem co najmniej dwu elementowym), $ARB \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A$.

4.118. $X = \mathscr{P}(Y)$, a ustalony element zbioru Y, $ARB \Leftrightarrow a \in (A \cup B)$.

4.119. $X = \mathscr{Z}$, $xRy \Leftrightarrow (|x| < 5 \wedge |y| < 5 \wedge x = y) \vee$
$\vee (|x| \geqslant 5 \wedge |y| \geqslant 5 \wedge 2|x-y)$.

4.120. $X = \mathscr{P}(Y)$, C ustalony podzbiór zbioru Y, $ARB \Leftrightarrow A \dot{-} B \subset C$.

4.121. $X = \mathscr{R}[t]-\{0\}$, $xRy \Leftrightarrow xy$ jest wielomianem stopnia parzystego.

4.122. $X = \mathscr{W}[t]$, $fRg \Leftrightarrow fg$ jest wielomianem stopnia nieparzystego.

4.123. $X = \mathcal{N}$, $xRy \Leftrightarrow \bigvee_{k,l \in \mathcal{N}} (k > 0 \wedge l > 0 \wedge x^k = y^l)$.

***4.124.** Dane zbiory X_1, X_2 oraz relacje równoważności $R_1 \subset X_1^2$ i $R_2 \subset X_2^2$. W zbiorze $X_1 \times X_2$ definiujemy relację S wzorem

$$\langle x_1, x_2 \rangle S \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow [(x_1 R_1 y_1) \wedge (x_2 R_2 y_2)].$$

Czy S jest relacją równoważności, jeśli tak wskazać jej klasy abstrakcji.

4.125. Dane są relacje równoważności $R_1, R_2 \subset X^2$, Zbadać, czy

a) relacja $R_1 \cap R_2$ jest relacją równoważności,

b) relacja $R_1 \cup R_2$ jest relacją równoważności,

c) relacja $\sim R_1 = X^2 - R_1$ jest relacją równoważności.

Jeśli tak, uzależnić podział wyznaczony przez zdefiniowaną relację od podziałów wyznaczonych przez relacje R_1 i R_2.

4.126. Dana jest rodzina $\{R_t\}_{t \in T}$ relacji równoważności. Zbadać, czy:

a) $\bigcap_{t \in T} R_t$ jest relacją równoważności,

b) $\bigcup_{t \in T} R_t$ jest relacją równoważności.

Jeśli nie, podać odpowiedni kontrprzykład.

4.127. Dane jest przekształcenie $f: X \to Y$. Definiujemy w zbiorze X relację $\sim_f$, wzorem

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

a) Udowodnić, że $\sim_f$ jest relacją równoważności,

b) znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by relacja $\sim_f$ była identycznością.

4.128. Dany jest podział zbioru $\mathscr{R}$ na odcinki domknięto-otwarte $\{\langle x, x+1) : x \in \mathscr{Z}\}$. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są dokładnie zbiory tego podziału.

4.129. Dany jest podział zbioru $\mathscr{Z}$ na dwa zbiory: zbiór liczb parzystych i zbiór liczb nieparzystych. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.130. Dzielimy płaszczyznę $\mathscr{R}^2$ na pięć zbiorów, odpowiadających czterem ćwiartkom otwartym płaszczyzny oraz sumie mnogościowej osi Ox i Oy. Znaleźć relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.131. Płaszczyznę $\mathscr{R}^2$ dzielimy na zbiory będące okręgami o środku w początku układu współrzędnych. Znaleźć relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

4.132. Dane są podziały $\mathscr{A} = \{A_t\}_{t \in T}$, $\mathscr{B} = \{B_s\}_{s \in S}$ zbioru X. Zakładamy ponadto, że

$$\bigwedge_{t \in T} \bigvee_{s \in S} A_t \subset B_s.$$

Podać, jaki jest związek pomiędzy relacjami równoważności odpowiadającymi tym podziałom.

4.133. Na zbiorze X dane są relacje równoważności R_1 i R_2 takie, że $R_1 \subset R_2$, tj.

$$\bigwedge_{x,y} \langle x, y \rangle \in R_1 \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R_2.$$

Jaki jest związek pomiędzy podziałami zbioru A wyznaczonymi przez te relacje?

Istnieje wygodny i poglądowy sposób przedstawiania relacji dwuargumentowych za pomocą tzw. *diagramów*. Tworzy się je w sposób następujący. Niech $R \subset A \times B$ i niech A i B będą zbiorami skończonymi. Elementy zbiorów A i B przedstawiamy w postaci punktów na płaszczyźnie przyjmując np., że punkt oznaczony kropką $(\cdot)$ odpowiada elementowi zbioru A, punkt oznaczony krzyżykiem $(+)$ — elementowi zbioru B. W szczególności jeśli $A = B$, to wszystkie punkty oznaczamy kropkami. Jeśli relacja R zachodzi między elementami $a \in A$ i $b \in B$, tj. aRb, to rysujemy strzałkę o początku w punkcie odpowiadającym elementowi a i końcu w punkcie odpowiadającym elementowi b.

Własności relacji R mogą być łatwo odczytane z diagramu.

4.134. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{0, 1, 2\}$, określonej następująco: $xRy \Leftrightarrow x < y$.

4.135. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{1, 2, ..., 10\}$, takiej, że $xRy \Leftrightarrow x|y \wedge x \neq y$.

4.136. Narysować diagram relacji $R \subset A^2$, gdzie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, takiej, że $xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

Podać jaką własność ma diagram relacji (zad. 4.137-4.143):

4.137. Zwrotnej.

4.138. Przechodniej.

4.139. Słabo antysymetrycznej.

4.140. Symetrycznej.

4.141. Spójnej.

4.142. Przeciwzwrotnej.

4.143. Asymetrycznej.

Jeśli $R \subset A^2$ jest relacją zwrotną i przechodnią, wówczas możemy diagram uprościć opuszczając wszystkie strzałki wychodzące z danego punktu i wracające od razu do niego.

Mając także narysowane strzałki prowadzące od a do b i od b do c możemy opuścić strzałkę prowadzącą od a do c itd.

Zachodzenie relacji xRy jest odczytywane wówczas z diagramu jako możność przejścia od punktu x do punktu y idąc zgodnie z kierunkiem strzałek.

W zadaniach 4.144-4.150 mowa będzie wyłącznie o takich uproszczonych diagramach relacji zwrotnych i przechodnich.

Podać jaką własność ma (zad. 4.144-4.150):

4.144. Diagram relacji symetrycznej.

4.145. Diagram relacji słabo antysymetrycznej.

4.146. Diagram relacji słabo antysymetrycznej i spójnej.

4.147. Punkt diagramu odpowiadający elementowi minimalnemu relacji porządku.

4.148. Punkt diagramu odpowiadający elementowi maksymalnemu relacji porządku.

4.149. Punkt diagramu odpowiadający elementowi najmniejszemu relacji porządku.

4.150. Punkt diagramu odpowiadający największemu elementowi.

Rozdział V

FUNKCJE

Relację $R \subset X \times Y$ nazywamy *funkcją*, jeśli spełnia ona warunek

$$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} \bigwedge_{z \in Y} (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R \Rightarrow y = z).$$

Tradycyjnie dla oznaczenia funkcji używamy liter f, g, h (ewentualnie z indeksami) i zamiast pisać $\langle x, y\rangle \in f$ piszemy $f(x) = y$.

Dziedziną (*zbiorem argumentów*) funkcji f nazywamy zbiór Df określony warunkiem

$$x \in Df \Leftrightarrow \bigvee_{y} (\langle x, y\rangle \in f), \quad \text{czyli} \quad x \in Df \Leftrightarrow \bigvee_{y} (f(x) = y).$$

Przeciwdziedziną (*zbiorem wartości*) funkcji f nazywamy zbiór Wf określony warunkiem

$$y \in Wf \Leftrightarrow \bigvee_{x} (\langle x, y\rangle \in f), \quad \text{czyli} \quad y \in Wf \Leftrightarrow \bigvee_{x} (f(x) = y).$$

Przekształceniem (*odwzorowaniem*) zbioru X w zbiór Y nazywamy funkcją f taką, że $Df = X$ i $Wf \subset Y$.

Fakt, że f jest takim odwzorowaniem oznaczamy przez $f: X \to Y$, a zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy przez ${}^{X}Y$.

Jeśli więc dana jest funkcja $f \subset X \times Y$, to jest ona przekształceniem zbioru Df w zbiór Y.

Jeśli $Df = X$, to mówimy że f jest funkcją całkowitą na X. Jeśli zaś $Df \subset X$, to o f mówimy, że jest funkcją częściową określoną w X. Tak więc każda funkcja jest funkcją częściową, każda funkcja częściowa jest całkowicie określona na swojej dziedzinie. Zbiór wszystkich funkcji częściowych określonych na X o wartościach w Y oznaczamy ${}^{X}_{\smile}Y$. Mamy więc: $f \in {}^{X}_{\smile}Y \Leftrightarrow \bigvee_{X_1 \subset X} f \in {}^{X_1}Y$.

Dla danych przekształceń $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ definiujemy przekształcenie $g \circ f\colon X \to Z$ za pomocą wzoru

$$\langle x, z\rangle \in g \circ f \Leftrightarrow \bigvee_y (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g) \Leftrightarrow \bigvee_y [y = f(x) \wedge z = g(y)].$$

Przekształcenie $g \circ f$ nazywamy *złożeniem* (*superpozycją*) przekształceń f i g.

Działanie superpozycji jest łączne, tzn. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Natomiast nie jest ono przemienne.

Jeśli zbiór X zawarty jest w Df, to *obraz zbioru* X (oznaczamy go symbolem $f * X$) jest zbiorem wartości funkcji f dla elementów zbioru X, czyli

$$f * X = \{y : \bigvee_{x \in X} f(x) = y\}\ (^1).$$

Jeśli f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y (czyli $f\colon X \to Y$), to $f^{-1} * Z$, dla $Z \subset Y$, definiujemy jako $\{x : f(x) \in Z\}$. Zbiór $f^{-1} * Z$ nazywamy *przeciwobrazem* Z przy odwzorowaniu f.

5.1. Udowodnić, że zgodnie z podaną definicją, jeśli $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $A \neq O$, to $f * A \neq O$.

5.2. Znaleźć przykład niepustych zbiorów X, Y, A oraz odwzorowanie $f\colon X \to Y$, takie, że $A \subset Y$, $A \neq O$, ale $f^{-1} * A = O$.

Pojęcie odwzorowania (funkcji) bywa zawężane na różne sposoby.

Odwzorowaniem różnowartościowym (*funkcją różnowartościową*) nazywamy odwzorowanie (funkcję) spełniające warunek

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y] \quad \text{albo} \quad \bigwedge_x \bigwedge_y [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)].$$

Piszemy wtedy $f\colon X \xrightarrow{1-1} Y$.

Szczególnym rodzajem odwzorowań są tzw. *odwzorowania „na"*. Są to odwzorowania $f\colon X \to Y$ spełniające warunek $Wf = Y$. Innymi słowy $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem „na", jeśli

$$\bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} (f(x) = y).$$

Zapisujemy to wzorem $f\colon X \underset{\text{na}}{\to} Y$.

---

(1) Oznaczenie to jest odmienne od używanego w książce: H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Tam mianowicie używany jest symbol $f(X)$. Powód zmiany czytelnik odnajdzie w zadaniu 5.38.

Zauważmy, że funkcja f jest zawsze odwzorowaniem swej dziedziny na swój zbiór wartości. Odwzorowanie różnorodnościowe i „na" nazywamy *wzajemnie jednoznacznym*. Piszemy wtedy $f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$. Jeśli f jest funkcją różnowartościową, to relacja f^{-1} jest także funkcją. Nazywamy ją *funkcją odwrotną*. Jeśli $f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$, to $f^{-1}: Y \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$.

Funkcją n-zmiennych $f(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy funkcję określoną na podzbiorze iloczynu kartezjańskiego $X_1 \times \ldots \times X_n$.

5.3. Udowodnić, że relacja I_X jest odwzorowaniem X w X różnowartościowym i „na" czyli, że $I_X: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$.

5.4. Zbadać, czy relacja $R \subset \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ określona wzorem $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = y^2$ jest funkcją.

5.5. Zbadać, czy relacja $R \subset \mathscr{R}^+ \times \mathscr{R}^+$ określona wzorem $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = y^2$ jest funkcją.

5.6. Zbadać, czy relacja $R \subset \mathscr{N} \times \mathscr{Z}$ określona wzorem $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 = y^3$ jest funkcją.

5.7. Zbadać, czy relacja $R \subset \mathscr{N} \times \mathscr{Z}$ określona wzorem $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^3 = y^2$ jest funkcją.

5.8. Zbadać, czy relacja $R \subset \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ określona wzorem $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \Leftrightarrow \operatorname{Im} x = \operatorname{Re} y$ jest funkcją.

5.9. W zadaniu tym zajmiemy się relacjami $R \subset \mathscr{R} \times \mathscr{R}$, a więc w sposób naturalny interpretowanymi jako podzbiory płaszczyzny.

a) Podać sens geometryczny tego, że relacja R jest funkcją.

b) Jaki jest sens geometryczny tego, że relacja R^{-1} jest funkcją.

c) Jaki jest sens geometryczny tego, że relacja R jest funkcją różnowartościową.

d) Jak interpretować geometrycznie następujące zdanie: Dla każdej relacji R istnieje relacja S taka, że $S \subset R$ oraz S jest funkcją i $DS = DR$.

Dla danego przekształcenia $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ zbadać, czy f jest odwzorowaniem różnowartościowym, czy f jest odwzorowaniem „na". Jeśli nie jest „na" znaleźć Wf. Jeśli f nie jest różnowartościowe, wskazać x_1 i x_2 takie, że $x_1 \neq x_2$, ale $f(x_1) = f(x_2)$ (zad. 5.21-5.35):

5.10. $f(x) = 2^x$. **5.11.** $f(x) = x^3$.

5.12. $f(x) = E[x]$. **5.13.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$

4*

5.14. $f(x) = 2^x + x$. **5.15.** $f(x) = 3^x - 2^x$.

5.16. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. **5.17.** $f(x) = x^3 - x^2$.

5.18. $f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$

5.19. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{dla } x \in \mathscr{R}^+, \\ 2x & \text{dla } x \in \mathscr{R} - \mathscr{R}^+. \end{cases}$

5.20. $f(x) = x^2$. **5.21.** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

5.22. $f(x) = x\, 2^{x-1}$. **5.23.** $f(x) = \sin x$.

5.24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{dla } x \neq -1, \\ 1 & \text{dla } x = -1. \end{cases}$

5.25. Niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym X w X, zaś g odwzorowaniem X w X. Niech przy tym $f \circ g = f$. Wykazać, że $g = I_X$. Czy założenie różnowartościowości odwzorowania f jest istotne?

5.26. Niech $f\colon X \xrightarrow[\text{na}]{} X$, a g odwzorowaniem $X \to X$. Niech przy tym $g \circ f = f$. Udowodnić, że $g = I_X$. Czy założenie, że odwzorowanie f jest „na" jest istotne?

5.27. Udowodnić, że jeśli $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ i $g \circ f = I_X$, to f jest różnowartościowe, a g jest odwzorowaniem „na".

Niech $f\colon X \to Y$. Odwzorowanie $g\colon Y \to X$ nazywamy *lewą* (*prawą*) *odwrotnością* dla f, jeśli $g \circ f = I_X$ ($f \circ g = I_Y$).

5.28. Udowodnić, że jeśli f odwzorowuje X w Y i X jest zbiorem niepustym to:

a) f posiada lewą odwrotność wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowe,

b) f posiada prawą odwrotność wtedy i tylko wtedy, gdy f jest „na".

5.29. Niech $f\colon X \to Y$, $g_1\colon Y \to X$, $g_2\colon Y \to X$ będą przekształceniami spełniającymi warunki $f \circ g_1 = f \circ g_2 = I_Y$, $g_1 \circ f = g_2 \circ f = I_X$. Dowieść, że $g_1 = g_2$.

5.30. Niech $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ będą przekształceniami różnowartościowymi. Udowodnić, że $g \circ f\colon X \to Z$ jest także przekształceniem różnowartościowym.

5.31. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ są odwzorowaniami takimi, że $g \circ f$ jest odwzorowaniem różnowartościowym, a f odwzorowaniem „na".

Udowodnić, że g jest odwzorowaniem różnowartościowym. Znaleźć przykład wskazujący, że jeśli f nie jest „na", to g może nie być różnowartościowe.

5.32. Załóżmy, że $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ są odwzorowaniami takimi, że $g \circ f$ jest „na", zaś g jest odwzorowaniem różnowartościowym. Udowodnić, że f jest „na". Znaleźć przykład wskazujący, że jeśli g nie jest odwzorowaniem różnowartościowym, to f nie musi być „na".

5.33. Podać przykład zbioru X i przekształcenia $f: X \to X$, które jest „na" i nie jest różnowartościowe. Czy można taki przykład znaleźć wśród zbiorów skończonych?

5.34. Podać przykład zbioru X i przekształcenia $f: X \to X$, które jest różnowartościowe ale nie jest „na". Czy można taki przykład znaleźć wśród zbiorów skończonych?

5.35. Udowodnić, że jeśli X jest zbiorem skończonym, a $f: X \to X$, to f jest przekształceniem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy f jest przekształceniem „na".

5.36. Udowodnić, że na to, by odwzorowanie $f: X \to Y$ było „na" potrzeba i wystarcza, by przeciwobraz każdego zbioru jednopunktowego $\{y\}$ $(y \in Y)$ był niepusty.

5.37. Udowodnić, że na to, by odwzorowanie $f: X \to Y$ było różnowartościowe potrzeba i wystarcza, by przeciwobraz każdego zbioru jednopunktowego $\{y\}$ $(y \in Y)$ był zbiorem co najwyżej jednopunktowym.

5.38. Niech $a \neq b$, zaś $X = \{a, b, \{a, b\}\}$, $Y = \{a, b\}$, $f: X \to Y$ będzie odwzorowaniem określonym wzorami $f(a) = f(b) = a$, $f(\{a, b\}) = b$. Znaleźć $f_* \{a, b\}$. Zinterpretować otrzymany wynik.

5.39. Niech $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ będzie określone wzorem $f(n) = n^2+1$. Czy f jest przekształceniem „na"? Czy f jest przekształceniem różnowartościowym?

5.40. Niech $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(x) = 2^x$. Udowodnić, że istnieje przekształcenie odwrotne do f. Jakim wzorem się ono wyraża?

5.41. Niech $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(x) = 2^x$. Zbadać, czy istnieje przekształcenie odwrotne do f. Odpowiedź szczegółowo uzasadnić.

Obrazem elementu $x \in X$ nazywamy obraz zbioru $\{x\}$.

5.42. Niech $X = \mathcal{R}_n[t]$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną $\geqslant 4$, oraz $\varphi: X \to X$ odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(x(t)) = x(2t)$.

a) Zbadać, czy φ jest odwzorowaniem różnowartościowym.

b) Zbadać, czy φ jest odwzorowaniem „na".

c) Znaleźć obraz wielomianów stałych (tj. $\mathcal{R}_0[t]$).

d) Znaleźć przeciwobraz zbioru $\mathcal{R}_2[t]$.

5.43. Niech $X = C_\infty\langle 0, 1\rangle$, zaś $\varphi: X \to X$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(f) = f' - 1$.

a) Zbadać, czy φ jest odwzorowaniem „na".

b) Zbadać, czy φ jest odwzorowaniem różnowartościowym.

c) Znaleźć obraz zbioru funkcji stałych.

d) Znaleźć obraz zbioru $\mathcal{R}[t]$.

e) Znaleźć przeciwobraz zbioru $\mathcal{W}[t]$.

f) Znaleźć przeciwobraz zbioru $\{\sin x, \cos x\}$.

g) Znaleźć $\varphi^{-1} * (\varphi * \{e^x\})$.

5.44. Niech $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Znaleźć $f * \langle 0, 1\rangle$.

b) Znaleźć $f * \langle -2, -1\rangle$.

c) Znaleźć $f^{-1} * (-\infty, -6\rangle$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \{-3, -4\}$.

e) Znaleźć $f * \{1, 2\}$.

5.45. Niech $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = \sin x + 1$.

a) Znaleźć $f * \langle 0, \frac{3}{2}\pi\rangle$.

b) Znaleźć $f * \{0, \pi\}$.

c) Znaleźć $f * \{\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi\}$.

d) Znaleźć $f^{-1} * (\frac{1}{2}, \infty)$.

e) Znaleźć $f^{-1} * (-\infty, 1\rangle$.

f) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

5.46. Niech $f: \mathcal{R}[t] \to \mathcal{R}[t]$ będzie przekształceniem określonym wzorem $f(\varphi(t)) = \varphi^2(t)$.

a) Znaleźć obraz zbioru wielomianów stałych (tj. $f * \mathcal{R}_0[t]$).

b) Znaleźć $f^{-1} * \mathcal{R}_4[t]$.

c) Znaleźć $f^{-1} * \{t^2 + 2t + 1\}$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \{t^2 + 2t + 2\}$.

e) Znaleźć $f^{-1} * (f * \{(t-1), (t^2-1)\})$.

5.47. Niech $f: \mathcal{R}[t] \to \mathcal{C}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(\varphi) = \varphi(i)$.

a) Czy f jest odwzorowaniem różnowartościowym?

b) Czy f jest odwzorowaniem „na"?

c) Znaleźć przeciwobraz liczby 0 (tj. $f^{-1} * \{0\}$).

d) Znaleźć $f^{-1} * \mathscr{R}$.

e) Znaleźć $f^{-1} * (f * \mathscr{R}[t])$.

5.48. Niech $f: \mathscr{R}[t] \times (\mathscr{N} - \{0\}) \to \mathscr{R}[t]$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f\langle\varphi, n\rangle = n\varphi$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?

b) Znaleźć $f * (\mathscr{R}_3[t] \times \{2\})$.

c) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć przeciwobraz wielomianu $t^2 + t + 1$.

5.49. Niech X będzie zbiorem wszystkich pierwiastków z jedności, tj. takich liczb zespolonych t, że dla pewnego $n \in \mathscr{N} - \{0\}$, $t^n = 1$. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną > 1, zaś $\varphi: X \to X$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(t) = t^k$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Czy odwzorowanie φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{1\}$.

d) Znaleźć obraz zbioru pierwiastków z jedności stopnia $2k$.

e) Znaleźć przeciwobraz zbioru $\{1, -1, i, -i\}$.

5.50. Niech X będzie zbiorem wszystkich macierzy $n \times n$ o elementach rzeczywistych, $n > 1$ i niech $\varphi: X \to \mathscr{R}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(T) = \operatorname{Det} T$ (gdzie $\operatorname{Det} T$ jest wyznacznikiem macierzy T).

a) Czy φ jest „na"?

b) Czy φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć obraz zbioru wszystkich macierzy T takich, że pierwszy element pierwszego wiersza jest równy 0.

5.51. Niech X będzie przestrzenią wektorową $\mathscr{R}^3$, zaś odwzorowanie $\varphi: X \to X$ będzie określone wzorem $\varphi(x) = x \times [0, 0, 1]$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Czy odwzorowanie φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{[0, 0, 0]\}$.

d) Znaleźć obraz zbioru wektorów postaci $[0, t, 0]$ $(t \in \mathscr{R})$.

e) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{[0, 0, t] : t \in \mathscr{R} - \{0\}\}$.

5.52. Niech X będzie przestrzenią wektorową $\mathscr{R}^n$, gdzie $n > 0$, zaś odwzorowanie $\varphi: X \to \mathscr{R}$ dane będzie wzorem $\varphi([x_0, \ldots, x_{n-1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Czy odwzorowanie φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{-1\}$.

d) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{0\}$.

e) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{1\}$.

5.53. Niech $\varphi: \mathscr{R} \to \mathscr{Z}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(x) = E[x]+1$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{0\}$.

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * (\mathscr{Z} - \mathscr{N})$.

d) Znaleźć $\varphi * \mathscr{R}^{+}$.

e) Znaleźć $\varphi * \{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}\}$.

5.54. Niech $\varphi: \mathscr{N}^2 \to \mathscr{N}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(\langle n, k\rangle) = n+k+1$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Czy odwzorowanie φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $\varphi * (\mathscr{N} \times \{1\})$.

d) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{0\}$.

e) Znaleźć $\varphi^{-1} *$ Par.

5.55. Niech $\varphi: \mathscr{N}^2 \to \mathscr{N}$ będzie przekształceniem zdefiniowanym wzorem $\varphi(\langle n, k\rangle) = nk$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Znaleźć $\varphi * (\mathscr{N} \times \{2\})$.

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć $\varphi^{-1} *$ Par.

e) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{2^n : n \in \mathscr{N}\}$.

5.56. Niech $\varphi: \mathscr{Z}^2 \to \mathscr{Z}$ będzie przekształceniem określonym wzorem $\varphi(\langle n, k\rangle) = n^2 k$.

a) Czy odwzorowanie φ jest „na"?

b) Czy odwzorowanie φ jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć $\varphi^{-1} * \{1\}$.

e) Znaleźć $\varphi^{-1} * \mathscr{N}$.

f) Znaleźć $\varphi * (\mathscr{Z} \times \{1\})$.

5.57. Niech $f: \mathscr{R}^2 \to \mathscr{R}^2$ będzie przekształceniem określonym wzorem $\varphi(\langle x, y\rangle) = \langle x+y, x-y\rangle$.

a) Czy φ jest odwzorowaniem „na"?

b) Czy φ jest odwzorowaniem różnowartościowym?

c) Znaleźć obraz prostej $L: y = x+1$.

d) Znaleźć $\varphi * \{\langle 0, 0\rangle\}$.

5.58. Niech $f: \mathcal{N}^2 \to \mathcal{N}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(\langle x, y\rangle) = x^2+y^2$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?

b) Czy odwzorowanie f jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \{24\}$.

5.59. Niech $f: \mathcal{N}^2 \to \mathcal{N}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f(\langle x, y\rangle) = |x^2-y^2|$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?

b) Czy odwzorowanie f jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć $f * [(\mathcal{N}-\mathrm{Par}) \times \mathrm{Par}]$.

e) Znaleźć $f * (\mathcal{N} \times \{0\})$.

5.60. Niech $f: \mathcal{N}^2 \to \mathcal{N}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(\langle x, y\rangle) = \max(x, y)$.

a) Czy przekształcenie f jest „na"?

b) Czy przekształcenie f jest różnowartościowe?

c) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \{k\}$.

e) Znaleźć $f * (\mathrm{Par} \times \mathcal{N})$.

5.61. Niech $f: \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x+yi) = x-yi$.

a) Czy przekształcenie f jest różnowartościowe?

b) Czy przekształcenie f jest „na"?

c) Znaleźć $f * \mathscr{R}$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \{x+i : x \in \mathscr{R}^+\}$. Niech X będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\mathscr{C}$. Znaleźć $f^{-1} * (f * X)$.

5.62. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem określonym wzorem $f(x) = x^2+x-2$.

a) Znaleźć $f * \mathscr{R}$.

b) Znaleźć $f * \mathscr{R}^+$.

c) Znaleźć $f^{-1} * (\mathscr{R}-\mathscr{R}^+)$.

d) Znaleźć $f^{-1} * \langle -1, 0\rangle$.

e) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

5.63. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x) = x^2-5x+4$.

a) Znaleźć $f * \mathscr{R}$.
b) Znaleźć $f * (\mathscr{R}-\mathscr{R}^+)$.
c) Znaleźć $f^{-1} * \mathscr{R}^+$.
d) Znaleźć $f^{-1} * \langle 2, 3\rangle$.
e) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.

5.64. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x) = 2^{|x|}$.

a) Znaleźć $f * \mathscr{R}$.
b) Znaleźć $f^{-1} * \langle 0, 1\rangle$.
c) Znaleźć $f * \langle 0, 1\rangle$.
d) Znaleźć $f^{-1} * \langle 2, 3\rangle$.
e) Znaleźć $f^{-1} * \{4\}$.

5.65. Niech $f: \mathscr{R} \to \langle 0, 1)$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x) = x-E(x)$.

a) Czy przekształcenie jest „na"?
b) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.
c) Znaleźć $f * \langle 0, 1)$.
d) Znaleźć $f^{-1} * (0, 1)$.

5.66. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x) = x^3-x^2-x+1$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?
b) Znaleźć $f * \langle 3, \infty)$.
c) Znaleźć $f^{-1} * \mathscr{R}$.
d) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.
e) Znaleźć $f^{-1} * \{-1, 2\}$.

5.67. Niech $f: \mathscr{W} \to \mathscr{W}$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $f(x) = x^2+1$.

a) Czy przekształcenie f jest „na"?
b) Czy $\langle 1, 2\rangle \cap \mathscr{W} \subset f * \mathscr{W}$?
c) Znaleźć $f^{-1} * \{\frac{13}{9}\}$.
d) Znaleźć $f^{-1} * \{1\}$.
e) Znaleźć $f^{-1} * \langle \frac{10}{9}, 2\rangle$.

5.68. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}^0$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem $f(x) = |x^2-5x+6|$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?
b) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.
c) Znaleźć $f * (2, \infty)$.
d) Znaleźć $f^{-1} * (0, 1)$.
e) Znaleźć $f * \{0, 1, 2, 3\}$.

5.69. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem danym wzorem $f(x) = -x^2+7x-12$.

a) Czy odwzorowanie f jest „na"?
b) Znaleźć $f^{-1} * \{0\}$.
c) Znaleźć $f^{-1} * \langle -1, 1\rangle$.
d) Znaleźć $f * \{1, 2, 3, 4\}$.
e) Znaleźć $f * \mathscr{R}$.

Niech f będzie przekształceniem zbioru X w zbiór Y $(f: X \to Y)$. Niech A, B będą podzbiorami X (zad. 5.70-5.74):

5.70. Udowodnić, że $(f * A) \cup (f * B) = f * (A \cup B)$.

5.71. Udowodnić, że $f * (A \cap B) \subset (f * A) \cap (f * B)$. Znaleźć przykład świadczący o tym, że znak inkluzji nie może być zastąpiony równością.

5.72. Udowodnić, że $(f * A)-(f * B) \subset f * (A-B)$. Znaleźć przykład świadczący o tym, że znak inkluzji nie może być zastąpiony równością.

5.73. Udowodnić, że $A \subset B \to f * A \subset f * B$.

5.74. Udowodnić, że $A \subset f^{-1} * (f * A)$. Znaleźć przykład świadczący o tym, że znak inkluzji nie może być zastąpiony równością.

Niech f będzie przekształceniem zbioru X w zbiór Y. Niech A, B będą podzbiorami Y. Udowodnić, że (zad. 5.75-5.79):

5.75. $(f^{-1} * A) \cup (f^{-1} * B) = f^{-1} * (A \cup B)$.

5.76. $(f^{-1} * A) \cap (f^{-1} * B) = f^{-1} * (A \cap B)$.

5.77. $f^{-1} * (A-B) = (f^{-1} * A)-(f^{-1} * B)$.

5.78. $A \subset B \Rightarrow f^{-1} * A \subset f^{-1} * B$.

5.79. $f * (f^{-1} * A) = A \cap (f * X)$.

5.80. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ podzbiorów zbioru X:

a) $f * (\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} (f * A_t)$.

b) $f * (\bigcap_{t \in T} A_t) \subset \bigcap_{t \in T} (f * A_t)$.

Udowodnić, że znak inkluzji we wzorze b) nie może być zastąpiony równością.

5.81. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny $\{B_t\}_{t\in T}$ podzbiorów zbioru Y:

a) $f^{-1} * (\bigcup_{t\in T} B_t) = \bigcup_{t\in T} (f^{-1} * B_t)$.

b) $f^{-1} * (\bigcap_{t\in T} B_t) = \bigcap_{t\in T} (f^{-1} * B_t)$.

5.82. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by we wzorach rozważanych w zadaniach 5.71, 5.72, 5.74, 5.80 b można było znak inkluzji zastąpić równością jest, by f było przekształceniem różnowartościowym.

5.83. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by przeciwobraz dowolnego zbioru niepustego był niepusty jest, by f było przekształceniem „na".

5.84. Udowodnić, że jeśli $f: X \to Y$, to dla dowolnego $A \subset Y$ zachodzi $f * (f^{-1} * A) = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest przekształceniem „na".

5.85. Udowodnić, że jeśli $f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$, to:

a) $f * (A \cap f^{-1} * B) = (f * A) \cap B$,

b) $A \cap f^{-1} * B \subset f^{-1} * [(f * A) \cap B]$.

5.86. Udowodnić, że zapis $f^{-1} * B$ jest poprawny, tj. jeśli $f: X \to Y$ i istnieje odwzorowanie $g: Y \to X$ odwrotne do f, to $g * B = f^{-1} * B$.

5.87. Udowodnić, że jeśli $f \subset A \times B$ jest funkcją, to Df jest najmniejszym zbiorem X takim, że $f \subset X \times B$, zaś Wf najmniejszym zbiorem Y takim, że $f \subset A \times Y$.

5.88. Rozważamy przekształcenia $f_i : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ $(i = 1, 2)$, określone wzorami

$$f_1(\langle n, k\rangle) = 2^n(2k+1)-1, \quad f_2(\langle n, k\rangle) = \tfrac{1}{2}[(x+y+1)(x+y)]+x.$$

Dowieść, że są to odwzorowania różnowartościowe.

W zadaniach 5.89-5.92 znaleźć superpozycję $f \circ g$ oraz obraz $(g \circ f) * A$, $(g \circ f) * B$.

5.89. $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określone jest wzorem $f(x) = x+1$, $g: \mathcal{R} \to \mathcal{Z}$ określone jest wzorem $g(x) = E[x-\tfrac{1}{3}]$, $A = \langle 0, 1)$, $B = \mathcal{R}^+$.

5.90. $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{C}$ określone jest wzorem $f(\langle x, y\rangle) = x+iy$, $g: \mathcal{C} \to \mathcal{R}$ określone wzorem $g(x) = |x|+1$, $A = (0, 1) \times \langle 0, 1\rangle$, $\mathcal{B} = \{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 \leqslant \leqslant 2\}$.

5.91. $f: \mathcal{N} \to \mathcal{R}$ określone jest wzorem $f(n) = \sqrt{n}$, $g: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określone wzorem $g(x) = x^4-x^2$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1\}$.

5.92. $f : \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}$ określone jest wzorem $f(k) = k^2$, $g : \mathscr{Z} \to \mathscr{R}$ określone jest wzorem $g(x) = e^x$, $A = \mathscr{N}$, $B = \{2k : k \in \mathscr{N}\}$.

5.93. Udowodnić, że a) $O \in {}^X_c Y$, b) ${}^X Y \subseteq {}^X_c Y$.

5.94. Udowodnić, że zbiór ${}^X_c Y$ jest zamknięty ze względu na działanie iloczynu teoriomnogościowego.

7.95. Udowodnić, że na to, by ${}^X_c Y$ był zamknięty ze względu na działanie sumy mnogościowej potrzeba i wystarcza, by był zamknięty ze względu na uzupełnienie.

5.96. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$. Zbadać, czy następujące relacje są funcjami częściowymi z X w Y:

a) $\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$,
b) $\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$,
c) $\{\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$,
d) $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$,
e) $\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$,
f) $\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

DZIAŁANIA NIESKOŃCZONE

Niech dana będzie funkcja f, która każdemu elementowi zbioru T przyporządkowuje zbiór A_t. Jeśli T jest zbiorem par, to zamiast pisać np. $A_{\langle n,m\rangle}$ piszemy po prostu $A_{n,m}$. Zbiór $f(T)$ nazywamy wówczas *indeksowaną rodziną zbiorów* i często oznaczamy jako $\{A_t\}_{t\in T}$. Dla indeksowanych rodzin zbiorów określa się działanie uogólnionej sumy ($\bigcup\limits_{t\in T} A_t$) i uogólnionego iloczynu ($\bigcap\limits_{t\in T} A_t$) w następujący sposób:

$$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \bigvee_{t\in T} x\in A_t, \qquad x\in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in T} x\in A_t.$$

W przypadku, gdy $T = \mathcal{N}$, zamiast $\bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}} A_n$ i $\bigcap\limits_{n\in\mathcal{N}} A_n$ piszemy niekiedy odpowiednio

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Kiedy znamy już zbiór indeksów T możemy zapis uprościć pisząc zamiast $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ po prostu $\bigcap\limits_{t} A_t$ i podobnie dla sumy $\bigcup\limits_{t} A_t$.

Dla indeksowanych rodzin zbiorów określa się też *uogólniony produkt kartezjański* $\underset{t\in T}{P}\, A_t$. Jest to mianowicie zbiór wszystkich funkcji f o argumentach z T i wartościach z $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ takich, że $f(t)\in A_t$.

6.1. Dowieść, że jeżeli $T = \{n_1, \ldots, n_k\}$ i $\{A_t\}_{t\in T}$ jest indeksowaną rodziną zbiorów, to

a) $\bigcup\limits_{t\in T} A_t = A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_k}$,

b) $\bigcap\limits_{t\in T} A_t = A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}$.

Znaleźć sumę i iloczyn zbiorów dla $t\in\mathcal{N}$, $t\in\mathcal{R}^+$, gdzie $A_t \subset \mathcal{R}$ określona jest następująco (zad. 6.2-6.15):

6.2. $A_t = \{x : t \leqslant x < t+1\}$.

6.3. $A_t = \{x : -t \leqslant x \leqslant t\}$.

6.4. $A_t = \{x : t \leqslant x\}$.

6.5. $A_t = \left\{x : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{t+1}\right\}$.

6.6. $A_t = \left\{x : -\frac{1}{t+1} < x \leqslant \frac{1}{t+1}\right\}$.

6.7. $A_t = \{x : \sqrt{t} \leqslant x \leqslant \sqrt{2t}\}$.

6.8. $A_t = \left\{x : \frac{t}{t+1} \leqslant x < \frac{t+1}{t+2}\right\}$.

6.9. $A_t = \left\{x : 1 - \frac{1}{t+1} < x < 2 + \frac{1}{t+1}\right\}$.

6.10. $A_t = \left\{x : -\frac{1}{t+1} < x < 1 - \frac{1}{t+1}\right\}$.

6.11. $A_t = \{x : t^{1/t+1} < x < (t+1)^{1/t+1}\}$.

6.12. $A_t = \left\{x : -10 - \frac{1}{t+1} < x < 2t^2 - 6t + 1\right\}$.

6.13. $A_t = \{x : t^2 < x < (t+1)^2\}$.

6.14. $A_t = \{x : -(t+1)^2 < x < 2t^2 - 5t + 5\}$.

6.15. $A_t = \{x : \sin x = t\}$.

Obliczyć sumę i iloczyn zbiorów dla $t \in \mathscr{R}$ (zad. 6.16-6.23):

6.16. $A_t = \{x : \operatorname{tg} x = t\}$.

6.17. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leqslant t^2\}$.

6.18. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \geqslant t^2\}$.

6.19. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x = t \cdot y)$.

6.20. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x = t \cdot y^2\}$.

6.21. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x + t = y\}$.

6.22. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x < t \cdot y\}$.

6.23. $A_t = \{\langle x, y\rangle : x^2 < t^2 \cdot y^2\}$.

Załóżmy, że $A_{n,m} \subset \mathscr{R}$ (zad. 6.24-6.27):

6.24. $A_{n,m} = \{x : n^2 \leqslant x < m^2\}$, $n, m \in \mathscr{N}$, znaleźć

$$\bigcup_{n,m} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n,m} A_{n,m}, \quad \bigcup_{n} \bigcap_{m} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n} \bigcup_{m} A_{n,m}.$$

6.25. $A_{n,m} = \{x : n \leqslant x < m\}$ $(n, m \in \mathscr{N})$, znaleźć

$$\bigcup_{n,m} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n,m} A_{n,m}, \quad \bigcup_{n} \bigcap_{m} A_{n,m}, \quad \bigcap_{n} \bigcup_{m} A_{n,m}.$$

6.26. $A_{n,m} = \{x : n^2 \leqslant x < m^2+(n+1)^2\}$ $(n, m \in \mathcal{N})$, znaleźć

$$\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \quad \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}, \quad \bigcup_m \bigcap_n A_{n,m}, \quad \bigcap_m \bigcup_n A_{n,m}.$$

6.27. $A_{n,m} = \{x : n^m \leqslant x\}$ $(n, m \in \mathcal{N}, n \neq 0)$, znaleźć

$$\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \quad -\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \quad \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}, \quad -\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m},$$

$$\bigcap_m \bigcup_n A_{n,m}, \quad \bigcap_m \bigcup_n -A_{n,m}, \quad \bigcup_m \bigcap_n A_{n,m}, \quad \bigcup_m \bigcap_n -A_{n,m}.$$

6.28. Dowieść, że $\bigcap_{t \in T} A_t$ jest największym (ze względu na relację inkluzji) zbiorem zawartym we wszystkich zbiorach A_t.

6.29. Dowieść, że $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest najmniejszym (ze względu na relację inkluzji) zbiorem zawierającym wszystkie zbiory A_t.

6.30. Dowieść, że przy dowolnie ustalonej przestrzeni X

a) $-\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} -A_t$,

b) $-\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} -A_t$.

Dowieść, że (zad. 6.31-6.41):

6.31. $\bigcap_{t \in T} (A_t \cap B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \cap \bigcap_{t \in T} B_t$.

6.32. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$.

6.33. $\bigcap_{t \in T} (A_t \cup B) = B \cup \bigcap_{t \in T} A_t$.

6.34. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B) = B \cap \bigcup_{t \in T} A_t$.

6.35. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subset \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$.

6.36. $\bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subset \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t)$.

6.37. $\bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$.

6.38. $\bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} = \bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{t,s}$.

6.39. $\bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{s \in S} B_s = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} (A_t \cap B_s)$.

6.40. $\bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{s \in S} B_s = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} (A_t \cup B_s)$.

6.41. $\bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} \subset \bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$.

Sprawdzić, czy prawdziwe są równości (zad. 6.42-6.44):

6.42. $\bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t$.

6.43. $\bigcup_{t\in T}(A_t\cap B_t)=\bigcup_{t\in T}A_t\cap\bigcup_{t\in T}B_t$.

6.44. $\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S}A_{t,s}=\bigcap_{s\in S}\bigcup_{t\in T}A_{t,s}$.

Dowieść, że (zad. 6.45-6.46):

6.45. $\bigcup_{s\in S}(A_s\cap B_s)\subset\bigcup_{s,t\in S}(A_s\cap B_t)=\bigcup_{s\in S}A_s\cap\bigcup_{t\in S}B_t$.

Czy znak inkluzji można zastąpić równością?

6.46. $[(\bigcap_{t\in T}A_t)\cup(\bigcap_{t\in T}B_t)]=\bigcap_{t,s\in T}(A_t\cup B_s)\subset\bigcap_{t\in T}(A_t\cup B_t)$.

Pokazać, że znaku inkluzji nie można zastąpić równością.

6.47. Zbadać, czy zachodzi inkluzja

$$\bigcup_{t\in T}(A_t-B_t)\subset[\bigcup_{t\in T}A_t-\bigcap_{t\in T}B_t].$$

Czy znak inkluzji można zastąpić równością?

Dowieść, że

6.48. $[(-\bigcup_{t\in T}A_t)\cup(\bigcap_{t\in T}B_t)]\subset\bigcap_{t\in T}(-A_t\cup B_t)$.

Czy znak inkluzji można zastąpić równością?

6.49. Dowieść, że jeżeli $A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_n\supset\ldots$ oraz $B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_n\supset\ldots$, to

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n).$$

6.50. Dowieść, że jeżeli dla każdego n mamy $A_n\subset A_0$, to

$$A_0=(A_0-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup\ldots\cup\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n.$$

6.51. Dowieść, że jeżeli $A_0\supset A_1\supset A_2\supset\ldots$, to

$$(A_1-A_2)\cup(A_3-A_4)\cup\ldots\cup\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=A_0-\bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{2n}-A_{2n+1}).$$

6.52. Dowieść następującego twierdzenia zwanego uogólnionym prawem przemienności:

Niech $f\colon T\xrightarrow[\text{na}]{1-1}T$ i niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. Wtedy

a) $\bigcup_{t\in T}A_t=\bigcup_{t\in T}A_{f(t)}$,

b) $\bigcap_{t\in T}A_t=\bigcap_{t\in T}A_{f(t)}$.

6.53. Dowieść następującego uogólnionego prawa łączności:

Jeśli $T = \bigcup_{s \in S} T_s$, to

a) $\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T_s} A_t$,

b) $\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T_s} A_t$.

6.54. Dowieść następującego uogólnionego prawa rodzielności:

Niech K będzie zbiorem wszystkich odwzorowań zbioru S w zbiór T. Dla dowolnej rodziny indeksowanej złożonej ze zbiorów $A_{s,t}$ mają miejsce równości:

a) $\bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{s,t} = \bigcup_{f \in K} \bigcap_{s \in S} A_{s,f(s)}$,

b) $\bigcup_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{s,t} = \bigcap_{f \in K} \bigcup_{s \in S} A_{s,f(s)}$.

6.55. Dowieść, że jeżeli $T = \bigcup_{s \in S} T_s$, a zbiór K jest pewną rodziną podzbiorów T, które z każdym T_s mają przynajmniej jeden element wspólny, to:

a) $\bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T_s} A_t = \bigcup_{Y \in K} \bigcap_{t \in Y} A_t$,

b) $\bigcup_{s \in S} \bigcap_{t \in T_s} A_t = \bigcap_{Y \in K} \bigcup_{t \in Y} A_t$.

6.56. Dowieść, że

a) $(\bigcup_{t \in T} A_t) \times (\bigcup_{s \in S} B_s) = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in T} (A_t \times B_s)$,

b) $(\bigcap_{t \in T} A_t) \times (\bigcap_{s \in S} B_s) = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} (A_t \times B_s)$.

Znaleźć $\underset{t \in T}{P} A_t$ dla następujących zbiorów T i A_t: (zad. 6.57-6.65):

6.57. $T = \mathcal{N}$, $A_t = \{1\}$.

6.58. $T = \mathcal{N}$, $A_t = \{0, 1\}$.

6.59. $T = \mathcal{N}$, $A_t = \{0, 1, \ldots, t\}$.

6.60. $T = \mathcal{R}$, $A_t = \langle 0, 1 \rangle$.

6.61. $T = \mathcal{R}$, $A_t = \langle 0, t \rangle$.

6.62. $T = \mathcal{R}^+$, $A_t = \langle -t, t \rangle$.

6.63. $T = \mathcal{R}$, $A_t = \{t\}$.

6.64. $T = \mathcal{R}$, $A_t = \{-t\}$.

6.65. $T = \mathcal{R}$, $A_t = \{t^2+1\}$.

6.66. Dowieść, że jeśli zbiór T jest skończony i dla każdego $t \in T$ zbiór A_t nie jest pusty, to $\underset{t \in T}{P} A_t \neq O$.

6.67. Dowieść, że jeśli $A_t \neq O$ dla każdego $t \in T$, to $\underset{t \in T}{P} A_t \neq O$.

Rozdział VII

TEORIA MOCY

Zbiory X i Y nazywamy *równolicznymi*, jeśli istnieje odwzorowanie $f\colon X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$. Piszemy wówczas $X \sim Y$ lub $X \operatorname{rl} Y$.

Można łatwo pokazać, że dla każdych zbiorów X, Y i Z jesli $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, to $X \sim Z$; jeśli $X \sim Y$, to $Y \sim X$ i w końcu $X \sim X$.

Każdemu zbiorowi przyporządkowujemy pewien obiekt zwany *liczbą kardynalną*. Liczby kardynalne oznaczamy zazwyczaj literami gotyckiego lub hebrajskiego alfabetu (ew. z indeksami). Jeśli zbiorowi X jest przyporządkowana liczba $\mathfrak{m}$, to piszemy $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$. Zbiorem równolicznym przyporządkowujemy tę samą liczbę kardynalną. Tak więc $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow X \sim Y$. Liczbę kardynalną $\overline{\overline{X}}$ nazywamy *mocą zbioru* X. W przypadku, gdy X i Y są zbiorami skończonymi, $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy ilość elementów w zbiorze X jest równa ilości elementów w zbiorze Y.

Pojęcie równoliczności traktujemy jako ścisły odpowiednik intuicyjnego pojęcia posiadania tej samej liczby elementów. W związku z tym, jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\overline{\overline{X}}$ jest po prostu liczbą jego elementów.

Dla zbiorów nieskończonych wprowadzamy nowe liczby. I tak moc zbioru liczb naturalnych określamy liczbą kardynalną $\aleph_0$ (alef zero), moc zbioru liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathfrak{c}$ (continuum).

Zbiór X jest *skończony* jeśli jest pusty lub istnieje taka liczba naturalna $k > 0$, że $X \sim \{0, \ldots, k-1\}$. Zbiór $\{0, \ldots, k-1\} = \{n\colon n < k\}$ nazywamy też *właściwym odcinkiem początkowym zbioru* $\mathcal{N}$ (por. str. 84).

Zbiory skończone lub mocy $\aleph_0$ nazywamy zbiorami *przeliczalnymi*.

Mówimy, że liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ jest większa lub równa $\mathfrak{m}$, (co zapisujemy przez $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$), jeśli istnieją takie zbiory X i Y, że

1° $X \subset Y$.

2° $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{n}$.

Piszemy natomiast $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, jeśli $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$. Można pokazać, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ mamy

1° $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}$,

2° $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_2 \wedge \mathfrak{m}_2 \leqslant \mathfrak{m}_3 \Rightarrow \mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_3$,

3° $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_2 \wedge \mathfrak{m}_2 \leqslant \mathfrak{m}_1 \Rightarrow \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$

(*twierdzenie Cantora-Bernsteina*).

W pewnych rozważaniach dotyczących mocy, zachodzi niekiedy potrzeba korzystania z tzw. *pewnika wyboru*, który można sformułować w następujący sposób:

Jeśli $A = \{A_t\}_{t \in T}$ jest rodziną zbiorów takich, że

1° $A_t \neq O$ dla dowolnego $t \in T$,

2° $A_{t_1} \cap A_{t_2} = O$ dla dowolnych $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$,

3° $T \neq O$,

to istnieje zbiór S taki, że $\overline{\overline{S \cap A_t}} = 1$ dla dowolnego $t \in T$.

Dowieść, że następujące zbiory A i B są równoliczne (zad. 7.1-7.3):

7.1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 7\}$.

7.2. $A = \{x \in \mathcal{N} : x < 7\}$, $B = \{x \in \mathcal{N} : 1 < x^2 < 70\}$.

7.3. $A = \{x \in \mathcal{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{O\}$.

7.4. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B i C mamy

a) $A \sim A$, b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, c) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

7.5. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami skończonymi, to $A \sim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają tę samą ilość elementów.

Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A i B (zad. 7.6-7.9):

7.6. Jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

7.7. Jeśli $A_1 \cap A_2 = O$, $B_1 \cap B_2 = O$ oraz $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

7.8. Jeśli $A \sim B$ i $C \cap (A \cup B) = O$, to $A \cup C \sim B \cup C$.

7.9. Jeśli $A \sim B$, to $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

Dowieść, że następujące zbiory są przeliczalne. Podać, które z nich mają moc $\aleph_0$ (zad. 7.10-7.13):

7.10. $\{x \in \mathcal{N} : 10|x\}$.

7.11. $\{x \in \mathcal{R} : \bigvee_{y \in \mathcal{N}} x = \ln y\}$.

7.12. $\{x \in \mathcal{N} : \bigvee_{y \in \mathcal{R}} x = \sin y\}$.

7.13. $\{x \in \mathcal{N} : \bigvee_{y \in \mathcal{R}} x = \operatorname{tg} y\}$.

7.14. Dowieść, że zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, jeśli jego elementy można ustawić w ciąg.

7.15. Dowieść, że zbiór A jest mocy $\aleph_0$ ($\overline{\overline{A}} = \aleph_0$) wtedy i tylko wtedy, jeśli jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony o wszystkich wyrazach różnych.

7.16. Dowieść, że jeśli A jest zbiorem przeliczalnym i $B \subset A$, to B też jest zbiorem przeliczalnym.

7.17. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami przeliczalnymi, to $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$ i $A \dot{-} B$ są też zbiorami przeliczalnymi.

7.18. Dowieść, że jeśli A i B są przeliczalne, to $A \times B$ też jest przeliczalny. Jakie należy uczynić założenie dodatkowe, by móc twierdzić, że $A \times B$ ma moc $\aleph_0$?

7.19. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} \geqslant \aleph_0$, to istnieje $X_1 \subset X$, $\overline{\overline{X_1}} = \aleph_0$ takie, że $X - X_1 \sim X$.

7.20. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów przeliczalnych, to $\bigcup\limits_{n \in \mathcal{N}} A_n$ też jest zbiorem przeliczalnym.

7.21. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów skończonych, to $\bigcup\limits_{n \in \mathcal{N}} \mathop{P}\limits_{k<n} A_k$ jest przeliczalny. Kiedy zbiór ten jest mocy $\aleph_0$? Wyprowadzić stąd wniosek, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach naturalnych jest przeliczalny.

7.22. Dowieść, że zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny.

7.23. Dowieść, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

7.24. Dowieść, że dla każdego n zbiór wielomianów stopnia n o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

7.25. Dowieść, że dla każdego n, zbiór

$$\{x \in \mathcal{R}: \bigvee_{a_0 \in \mathcal{W}} \ldots \bigvee_{a_n \in \mathcal{W}} a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0\}$$

jest przeliczalny.

7.26. Dowieść, że zbiór wszystkich pierwiastków wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

7.27. Dowieść, że każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków, jest przeliczalny.

7.28. Dowieść, że zbiór ekstremów funkcji ciągłej o wartościach rzeczywistych jest przeliczalny.

7.29. Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest funkcją monotoniczną o wartościach rzeczywistych, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

Dowieść, że każdy z następujących zbiorów jest mocy $\aleph_0$ (zad. 7.30-7.36):

7.30. Zbiór odcinków położonych na prostej, o końcach wymiernych.

7.31. Zbiór okręgów, których środki leżą w punktach o współrzędnych, wymiernych i o promieniach będących liczbami wymiernymi.

7.32. Zbiór trójkątów równobocznych o środku ciężkości w początku układu i jednym wierzchołku o współrzędnych wymiernych.

7.33. Zbiór złożony z rozłącznych sześcianów przestrzeni trójwymiarowej.

7.34. Zbiór złożony z rozłącznych kół położonych na płaszczyźnie.

7.35. Zbiór macierzy o wyrazach wymiernych.

7.36. Zbiór $\{x \in \mathscr{R}: \bigvee_{n \in \mathscr{N}-\{0\}} x^n \in \mathscr{W}\}$.

7.37. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Dowieść, że zbiór wszystkich skończonych ciągów jakie dadzą się utworzyć z elementów zbioru A jest przeliczalny. Kiedy taki zbiór ma moc $\aleph_0$?

7.38. Znaleźć moc zbioru ciągów o elementach całkowitach zbieżnych do zera.

7.39. Znaleźć moc zbioru ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca.

7.40. Dowieść, że niepusty zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g: \mathscr{N} \underset{\text{na}}{\rightarrow} A$.

7.41. Dowieść, że $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje g i f takie, że $f: A \underset{\text{na}}{\rightarrow} \mathscr{N}$ i $g: \mathscr{N} \underset{\text{na}}{\rightarrow} A$.

7.42. Dowieść, że zbiór punktów na prostej jest mocy $\mathfrak{c}$.

Dowieść bez pomocy tzw. Cantora-Bernsteina, że $A \sim B$ (zad. 7.43-7.50):

7.43. A, B — dowolne dwa odcinki otwarte.

7.44. A, B — dowolne dwa odcinki domknięte.

7.45. A — odcinek otwarty, B — odcinek z jednym końcem.

7.46. A, B — dowolne dwa okręgi.

7.47. A, B — dowolne dwa koła.

7.48. A — prosta, B — odcinek otwarty.

7.49. A — prosta, B — odcinek domknięty.

7.50. A — półprosta domknięta, B — prosta.

7.51. Dowieść, że zbiór punktów płaszczyzny jest mocy $\mathfrak{c}$.

7.52. Dowieść, że jeśli A i B są zbiorami mocy $\mathfrak{c}$, to $A \cup B$ i $A \times B$ są również zbiorami mocy $\mathfrak{c}$.

7.53. Dowieść, że jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, a B zbiorem mocy $\mathfrak{c}$, to $A \cup B$, $B - A$, $B \dot{-} A$ są zbiorami mocy $\mathfrak{c}$.

7.54. Co można powiedzieć o mocy zbioru $A \times B$ jeśli wiadomo, że $A = \mathfrak{c}$, a B jest zbiorem przeliczalnym?

7.55. Dowieść, że jeśli $\{A_t\}_{t \in \mathscr{R}}$ jest rodziną mocy $\mathfrak{c}$ zbiorów przeliczalnych, rozłącznych i niepustych, to $\bigcup\limits_{t \in \mathscr{R}} A_t$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.56. Dowieść, że jeśli moc każdego ze zbiorów A_t $(t \in \mathscr{R})$ wynosi $\mathfrak{c}$, to zbiór $\bigcup\limits_{t \in \mathscr{R}} A_t$ ma również moc $\mathfrak{c}$.

Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc $\mathfrak{c}$ (zad. 7.57-7.74):

7.57. $\{x \in \mathscr{R} : -1 < x < 1\}$.

7.58. $\{x \in \mathscr{R} : \bigvee\limits_{n \in \mathscr{N}} x^n \in \mathscr{W}\}$.

7.59. $\{x \in \mathscr{R} : 0 \leqslant x\}$.

7.60. $\{x \in \mathscr{R} : x < 0\}$.

7.61. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x^2 = y\}$.

7.62. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x = y\}$.

7.63. $\{\langle x, y\rangle : x^2+y^2 = 1 \wedge x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R}\}$.

7.64. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge y = f(x)\}$, gdzie f jest dowolną, ale ustaloną funkcją taką, że $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$.

7.65. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge \bigvee\limits_{w \in \mathscr{W}} x-y = w\}$.

7.66. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x < 1\}$.

7.67. $\{x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x^2 = 4\}$.

7.68. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{W} \wedge x^2 = 4\}$.

7.69. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge x < 0 \wedge y < 0\}$.

7.70. $\{\langle x, y\rangle : x \in \mathscr{R} \wedge y \in \mathscr{R} \wedge 0 \leqslant x < 1 \wedge 0 \leqslant y < 1\}$.

7.71. $\{\langle x, y\rangle \in \mathscr{R}^2 : x \cdot y < 1\}$.

7.72. $\{\langle x, y\rangle \in \mathscr{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.

7.73. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathscr{R}^3 : x = y = z\}$.

7.74. $\{\langle x, y, z\rangle \in \mathscr{R}^3 : 0 \leqslant x < 1 \wedge 0 \leqslant y < 1 \wedge 0 \leqslant z < 1\}$.

7.75. Dowieść, że dla dowolnego $n > 0$, zbiór $\mathscr{R}^n$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.76. Dowieść, że jeśli dla każdego $n \in \mathscr{N}$, $A_n = \{0, 1\}$, to $\underset{n \in \mathscr{N}}{P} A_n$ ma moc $\mathfrak{c}$.

7.77. Dana jest rodzina zbiorów przeliczalnych A_n taka, że wszystkie zbiory A_n z wyjątkiem skończonej ilości są skończone.

Dowieść, że $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} \leqslant \mathfrak{c}$.

7.78. Dowieść, że jeśli $X \subset Y$, to $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$.

7.79. Dowieść, że dla dowolnych liczb kardynalnych $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ i $\mathfrak{m}_3$:

a) $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_1$.

b) $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_2 \wedge \mathfrak{m}_2 \leqslant \mathfrak{m}_3 \Rightarrow \mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{m}_3$.

7.80. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki $Y_1 \subset Y$, że $X \sim Y_1$.

7.81. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje f takie, że $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

7.82. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje f takie, że f: $Y \underset{\text{na}}{\rightarrow} X$.

7.83. Dowieść, że jeśli X jest zbiorem takim, że $\overline{\overline{X}} > n$ dla dowolnego n, to $\overline{\overline{X \cup \{a\}}} = \overline{\overline{X}}$ dla dowolnego a.

7.84. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} \geqslant \aleph_0$, to dla dowolnego a mamy $\overline{\overline{X \cup \{a\}}} = \overline{\overline{X}}$.

7.85. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ jest rodziną zbiorów niepustych taką, że zbiór $\{n \in \mathcal{N} : \overline{\overline{A}}_n \leqslant \aleph_0 \wedge \overline{\overline{A}}_n \geqslant 2\}$ nie jest skończony, to $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} \geqslant \mathfrak{c}$.

Kiedy $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} = \mathfrak{c}$?

Przypomnijmy, że przez ${}^A B$ oznaczamy zbiór odwzorowań $f: A \rightarrow B$. Tak więc $f \in {}^A B \Leftrightarrow f: A \rightarrow B$. Często zbiór ten oznacza się także jako B^A. W szczególności, gdy $B = \{0, 1\}$ zamiast B^A (ew. ${}^A B$) piszemy 2^A.

7.86. Dowieść, że $2^A \sim \mathcal{P}(A)$.

7.87. Dowieść, że jeśli A skończone i $\overline{\overline{B}} \geqslant \aleph_0$, to ${}^B A \sim 2^B$.

7.88. Dowieść, że jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to ${}^{A_1} A_2 \sim {}^{B_1} B_2$.

7.89. Dowieść, że jeśli A i B są rozłączne, to dla dowolnego C mamy ${}^{(A \cup B)} C \sim ({}^A C) \times ({}^B C)$.

7.90. Dowieść, że ${}^C(A \times B) \sim {}^C(A) \times ({}^C B)$.

7.91. Dowieść, że $\overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}}} = \mathfrak{c}$.

7.92. Dowieść, że jeśli $\{A_t\}_{t \in \mathcal{R}}$ jest rodziną zbiorów takich, że $\overline{\overline{A}}_t \geqslant 2$ dla każdego $t \in \mathcal{R}$, to $\overline{\overline{\underset{t \in T}{P} A_t}} > \mathfrak{c}$.

7.93. Czy istnieje zbiór X taki, że $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = \aleph_0$?

7.94. Dowieść, że jeśli $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$, to $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = \mathfrak{c}$.

7.95. Dowieść, że nie istnieje zbiór X i funkcja f taka, że $f: X \underset{\text{na}}{\rightarrow} \mathcal{P}(X)$.

7.96. Dowieść, że $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(X)}}$.

7.97. Dowieść, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

7.98. Dowieść, że liczb kardynalnych jest nieskończenie wiele.

7.99. Dowieść, że jeśli $A_1 \subset B \subset A_2$ i $A_1 \sim A_2$, to $A_1 \sim B$ i $B \sim A_2$.

7.100. Dowieść, że jeśli istnieje taka funkcja różnowartościowa $f \subset A \times A$, że $f * A \subset B \wedge B \subset A$, to $A \sim B$.

RELACJE PORZĄDKUJĄCE

Relacją częściowo porządkującą zbiór A nazywamy relację $R \subset A^2$ spełniającą warunki:

a) *Zwrotność*

$$\bigwedge_{x \in A} (\langle x, x\rangle \in R), \quad (\bigwedge_{x \in A} (xRx)).$$

b) *Antysymetria*

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} [(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \Rightarrow x = y],$$

$$(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} [(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y]).$$

c) *Przechodniość*

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} \bigwedge_{z \in A} [(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \Rightarrow \langle x, z\rangle\rangle \in R],$$

$$(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} \bigwedge_{z \in A} [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]).$$

Jeśli relacja R spełnia dodatkowo warunek spójności:

d) *Spójność*

$$\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} (\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y),$$

$$(\bigwedge_{x \in A} \bigwedge_{y \in A} (xRy \vee yRx \vee x = y)),$$

to nazywamy ją relacją *liniowo porządkującą.*

W dawniejszej literaturze często relacją liniowo porządkującą nazywano relację asymetryczną, przechodnią i spójną (por. zad. 4.18 i 4.19).

Spośród relacji liniowo porządkujących wyróżniamy *relacje dobrze porządkujące*, to znaczy takie, które spełniają dodatkowo warunek e:

e) $\bigwedge_{X \subset A} \{X \neq O \Rightarrow \bigvee_{y} [y \in X \wedge \bigwedge_{z} (z \in X \Rightarrow \langle y, z\rangle \in R)]\}$,

$$(\bigwedge_{X \subset A} [X \neq O \Rightarrow \bigvee_{y \in X} \bigwedge_{z \in X} (yRz)]).$$

Zbiorem częściowo (liniowo, dobrze) uporządkowanym nazywamy parę $\langle A, R\rangle$ taką, że R częściowo (liniowo, dobrze) porządkuje A.

Elementy wyróżnione:

a) Element $a \in A$ nazywamy *maksymalnym* w zbiorze $\langle A, R\rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (aRx \Rightarrow x = a).$$

b) Element $a \in A$ nazywamy *minimalnym* w zbiorze $\langle A, R\rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (xRa \Rightarrow x = a).$$

c) Element $a \in A$ nazywamy *największym* w zbiorze $\langle A, R\rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (xRa).$$

d) Element $a \in A$ nazywamy *najmniejszym* w zbiorze $\langle A, R\rangle$ jeśli

$$\bigwedge_{x \in A} (aRx).$$

Łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R\rangle$ nazywamy każdy podzbiór niepusty $B \subset A$ taki, że $\langle B, R \cap B^2\rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

Zauważmy, że $R \cap B^2$ jest to po prostu relacja R ograniczona do elementów zbioru B.

Antyłańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R\rangle$ nazywamy każdy zbiór $B \subset A$ taki, że

$$\bigwedge_{x,y \in B} [x \neq y \Rightarrow \sim xRy \wedge \sim yRx].$$

A więc jeśli B jest łańcuchem, to każde dwa elementy zbioru B są *porównywalne* (w sensie relacji R), natomiast jeśli jest antyłańcuchem, to każde dwa elementy zbioru B są *nieporównywalne*.

Każdy zbiór jednoelementowy jest łańcuchem i antyłańcuchem.

Jeśli zbiór X zawiera się w A, to *ograniczeniem górnym* zbioru X nazywamy każdy taki element $a \in A$, że $\bigwedge_{x \in X} (xRa)$. Podobnie definiujemy *ograniczenie dolne* zbioru $X \subset A$.

LEMAT KURATOWSKIEGO-ZORNA: *Niech $\langle A, R\rangle$ będzie zbiorem uporządkowanym takim, że dla każdego łańcucha istnieje w A górne ograniczenie. Wtedy w A istnieje co najmniej jeden element maksymalny. Co więcej, dla każdego $x \in A$ istnieje element maksymalny a taki, że xRa.*

8.1. Niech relacja $R \subset (\mathcal{N}-\{0\})^2$ będzie określona następująco:

$$xRy \Rightarrow \bigvee_{z \in \mathcal{N}} (xz = y)$$

(tradycyjnie relację tę oznaczamy symbolem $x|y$).

a) Udowodnić, że $|$ jest relacją częściowo porządkującą,

b) znaleźć wszystkie elementy minimalne,

c) udowodnić, że w zbiorze $\langle \mathcal{N}-\{0\}, |\rangle$ nie ma elementów maksymalnych,

d) znaleźć ogólną postać łańcucha w zbiorze $\langle \mathcal{N}-\{0\}, |\rangle$,

e) znaleźć ogólną postać antyłańcucha w zbiorze $\langle \mathcal{N}-\{0\}, |\rangle$,

f) udowodnić, że relacja inkluzji w zbiorze wszystkich łańcuchów zbioru $\langle \mathcal{N}-\{0\}, |\rangle$ jest częściowym porządkiem, znaleźć postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych.

8.2. Niech X będzie zbiorem, zaś $\mathcal{P}(X)$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X. Udowodnić, że relacja $\subset$ częściowo porządkuje zbiór $\mathcal{P}(X)$. Znaleźć element najmniejszy i największy w zbiorze $\langle \mathcal{P}(X), \subset\rangle$.

8.3. Załóżmy, że zbiór X ma co najmniej dwa elementy. Rozważmy zbiór $U = \mathcal{P}(X)-\{0\}-\{X\}$, oraz relację $\subset$ ograniczoną do elementów tego zbioru, zbadać

a) czy w zbiorze $\langle U, \subset\rangle$ istnieje element najmniejszy,

b) czy w zbiorze $\langle U, \subset\rangle$ istnieje element największy,

c) znaleźć postać elementów minimalnych i maksymalnych w $\langle U, \subset\rangle$,

d) jaka jest moc zbioru elementów minimalnych i maksymalnych w $\langle U, \subset\rangle$. Rozważyć szczególny przypadek, gdy X jest zbiorem dwuelementowym.

8.4. Udowodnić, że jeśli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym i $Y \subset X$, to zbiór $\langle Y, R \cap Y^2\rangle$ także jest zbiorem częściowo uporządkowanym. Czy twierdzenie jest prawdziwe, jeśli zbiór $\langle X, R\rangle$ jest liniowo (bądź dobrze) uporządkowany? Co można powiedzieć o stosunku elementów wyróżnionych w $\langle X, R\rangle$ i $\langle Y, R \cap Y^2\rangle$?

8.5. Zbiór $\langle X, R^{-1}\rangle$ nazywamy *dualnym* do $\langle X, R\rangle$.

a) Udowodnić, że jeżeli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to $\langle X, R^{-1}\rangle$ także jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

b) Czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, jeśli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym?

c) Czy analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, jeśli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym?

d) Jaki jest związek elementów wyróżnionych w $\langle X, R\rangle$ i w $\langle X, R^{-1}\rangle$?

8.6. a) Udowodnić, że jeżeli w zbiorze częściowo uporządkowanym jest element największy, to jest on jedynym elementem maksymalnym.

b) Udowodnić, że jeżeli w zbiorze częściowo uporządkowanym jest element najmniejszy, to jest on jedynym elementem minimalnym.

c) Jaki związek pomiędzy punktami a i b sugeruje zadanie 8.5?

8.7. Czy dla danego $X \neq O$ można tak określić relację R, by równocześnie:

a) Zbiór $\langle X, R\rangle$ był częściowo uporządkowany.

b) R była relacją równoważności w X.

8.8. Czy dla danego zbioru X takiego, że $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$ można określić relację R taką, by równocześnie:

a) Zbiór $\langle X, R\rangle$ był liniowo uporządkowany.

b) R była relacją równoważności.

8.9. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór $\langle X, R^{-1}\rangle$ był także dobrze uporządkowany.

8.10. Udowodnić, że jeśli X jest zbiorem skończonym, zaś $\langle X, R\rangle$ zbiorem liniowo uporządkowanym, to zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany.

8.11. Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R\rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X, R\rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego.

8.12. Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R\rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X, R\rangle$ jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

8.13. a) Udowodnić, że jeżeli zbiór X jest skończony, to w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ istnieje co najmniej jeden element maksymalny.

b) Udowodnić analogiczne twierdzenie dla elementów minimalnych.

8.14. Udowodnić, że jeżeli zbiór X jest skończony i w $\langle X, R\rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny (minimalny), to jest on elementem największym (najmniejszym). Czy założenie skończoności zbioru X jest istotne?

8.15. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by częściowo uporządkowany zbiór $\langle X, R\rangle$ był liniowo uporządkowany jest, by każdy antyłańcuch był jednoelementowy.

8.16. Udowodnić, że w zbiorze liniowo uporządkowanym element minimalny (maksymalny), o ile istnieje, jest elementem najmniejszym (największym).

8.17. Co oznacza fakt, że A jest łańcuchem w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, R\rangle$?

8.18. Dowieść, że w zbiorze liniowo uporządkowanym każdy skończony podzbiór niepusty ma element największy i najmniejszy.

8.19. Udowodnić, że w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy skończony podzbiór niepusty posiada elementy minimalne i maksymalne.

8.20. Dla każdego $n \in \mathcal{N}$ skonstruować przykład zbioru częściowo uporządkowanego, mającego dokładnie n elementów minimalnych. Analogicznie dla elementów maksymalnych.

8.21. W zbiorze T wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do zbioru $\mathcal{N}$ (a więc w zbiorze $\bigcup_{k \in \mathcal{N}} \mathcal{N}^k$) wprowadzamy relację R jak następuje: $xRy \Leftrightarrow$ ciąg x jest odcinkiem początkowym (niekoniecznie właściwym) ciągu y.

a) Udowodnić, że relacja R jest częściowym porządkiem.

b) Czy w zbiorze $\langle T, R\rangle$ istnieje element największy?

c) Czy w zbiorze $\langle T, R\rangle$ istnieje element minimalny?

d) Jaka jest moc zbioru łańcuchów w zbiorze $\langle T, R\rangle$?

8.22. Rozpatrujemy zbiór $T = \{2^n : n \in \mathcal{N}\} \cup \{3\}$ wraz z relacją podzielności (porównaj zadanie 8.1).

a) Czy w zbiorze $\langle T, |\rangle$ są elementy minimalne, maksymalne?

b) Czy w zbiorze $\langle T, |\rangle$ jest element najmniejszy?

c) Narysować diagram relacji.

8.23. Rozważamy zbiór $T = \{2, 3, \ldots, 15\}$ wraz z relacją podzielności ograniczoną do elementów tego zbioru.

a) Narysować diagram relacji.

b) Wskazać elementy wyróżnione.

c) Wskazać wszystkie łańcuchy długości 3.

8.24. Niech T będzie zbiorem wszystkich funkcji określonych na odcinku $\langle 0,1\rangle$ o wartościach w $\mathscr{R}^+$ ($T = {}^{\langle 0,1\rangle}\mathscr{R}^+$). Definiujemy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \bigwedge_x [f(x) \leqslant g(x)].$$

a) Udowodnić, że R jest częściowym porządkiem.

b) Wskazać elementy wyróżnione w $\langle T, R\rangle$.

8.25. Dany jest zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, S\rangle$ oraz zbiór $T \neq O$. W zbiorze F wszystkich funkcji z T w X (tj. ${}^TX$) określamy relację R wzorem

$$fRg \Leftrightarrow \bigvee_{t \in T} [f(t)\, S\, g(t)].$$

a) Udowodnić, że relacja R jest częściowym porządkiem.

b) Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by w $\langle F, R\rangle$ był element minimalny (maksymalny).

c) Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by w $\langle F,R\rangle$ był element największy (najmniejszy).

8.26. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{z \in \mathscr{C} : k_t + 1 \leqslant \operatorname{im} z \leqslant t+2\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, 2, 4, \\ +1 & \text{dla } t = 1, \\ -1 & \text{dla } t = 3, 5. \end{cases}$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy istnieją elementy najmniejszy i największy?

c) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.27. Niech A_t dla $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{z \in \mathscr{C} : |z - k_t| \leqslant t\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 2 & \text{dla } t = 1, \\ 0 & \text{dla } t = 2, 3, 6, \\ -1 & \text{dla } t = 4, \\ 1 & \text{dla } t = 5. \end{cases}$$

Rozpatrujemy rodzinę tę jako częściowo uporządkowaną przez relację zawierania.

a) Znaleźć elementy wyróżnione.

b) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.28. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ będzie rodziną zbiorów określoną jak następuje:

$$A_t = \{x \in \mathcal{R} : k_t \leqslant x \leqslant t+1\},$$

gdzie

$$k_t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0, 2, \\ -1 & \text{dla } t = 1, 3, \\ -2 & \text{dla } t = 4,6, \\ -3 & \text{dla } t = 5. \end{cases}$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania znaleźć elementy wyróżnione.

b) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.29. Niech A_t dla $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\mathcal{W}$ określoną jak następuje:

$$A_t = \{x \in \mathcal{W} : t < x < t^2\}.$$

a) Rozpatrując powyższą rodzinę jako zbiór częściowo uporządkowany przez relację zawierania, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Sporządzić diagram tego częściowego porządku.

8.30. Niech $\alpha(n)$ będzie liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n. W zbiorze $\mathcal{N} - \{0, 1\}$ określamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow [\alpha(x) < \alpha(y)] \vee [\alpha(x) = \alpha(y) \wedge x \leqslant y].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0, 1\}, R \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

b) Czy jest to zbiór liniowo uporządkowany?

c) Znaleźć elementy wyróżnione.

8.31. Niech $\beta(n)$ będzie liczbą różnych dzielników liczby naturalnej n. W zbiorze $\mathcal{N} - \{0\}$ określamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow [\beta(x) < \beta(y)] \vee [\beta(x) = \beta(y) \wedge x \leqslant y].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0\}, R \rangle$ jest częściowo uporządkowany, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.32. W zbiorze $\mathcal{N}^+$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow (2|x \wedge 2|y \wedge y \leqslant x) \vee (2|x \wedge \sim 2|y) \vee (\sim 2|x \wedge \sim 2|y \wedge x \leqslant y).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathcal{N} - \{0\}, R\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.33. W zbiorze ${}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ wprowadzamy realcję R wzorem

$$\underline{a}R\underline{b} \Leftrightarrow \bigwedge_n (a_n \leqslant b_n).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle {}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}, R\rangle$ jest częściowo uporządkowany, znaleźć elementy wyróżnione.

b) Czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

8.34. W zbiorze ${}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ wprowadzamy relację S wzorem

$$\underline{a}S\underline{b} \Leftrightarrow \bigvee_k \bigwedge_{n<k} (a_n = b_n \wedge a_k < b_k) \vee (\underline{a} = \underline{b}).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle {}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}, S\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Udowodnić, że $\bigwedge_{\underline{a},\underline{b}} (\underline{a}R\underline{b} \Rightarrow \underline{a}S\underline{b})$, gdzie R jest relacją rozważaną w zadaniu 8.33.

8.35. W zbiorze $\mathscr{C}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow (\operatorname{Re} y \leqslant \operatorname{Re} x) \wedge (\operatorname{Im} y \leqslant \operatorname{Im} x).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathscr{C}, R\rangle$ jest częściowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

8.36. W zbiorze $\mathscr{C}$ wprowadzamy relację S wzorem

$$xSy \Leftrightarrow (\operatorname{Re} y < \operatorname{Re} x) \vee [(\operatorname{Re} y = \operatorname{Re} x) \wedge (\operatorname{Im} y \leqslant \operatorname{Im} x)].$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle \mathscr{C}, S\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

c) Udowodnić, że $\bigwedge_{x,y} (xRy \Rightarrow xSy)$, gdzie R jest relacją rozważaną w zadaniu 8.35.

Element $x \in X$ nazywamy (bezpośrednim) *następnikiem* elementu y w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ jeśli spełniony jest warunek

$$yRx \wedge \bigwedge_z [(yRz \wedge zRx) \Rightarrow (y = z \vee z = x)].$$

8.37. Zdefiniować pojęcie poprzednika tak, by zachodził następujący związek: x jest poprzednikiem y w zbiorze $\langle X, R\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest następnikiem y w zbiorze dualnym $\langle X, R^{-1}\rangle$ (porównaj zadanie 8.5).

8.38. Udowodnić, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

8.39. W zbiorze liniowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ każdy element posiada następnik. Czy zbiór ten jest dobrze uporządkowany?

8.40. a) Wskazać przykład zbioru częściowo uporządkowanego, w którym istnieje element najmniejszy, każdy element ma dokładnie dwa następniki i co najwyżej jeden poprzednik.

b) Jaka jest moc zbioru łańcuchów w takim zbiorze?

Zbiory częściowo uporządkowane $\langle X, R\rangle$ i $\langle Y, S\rangle$ nazywamy *podobnymi*, jeśli istnieje przekształcenie wzajemnie jednoznaczne $f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ takie, że

$$\bigwedge_{x,y} [xRy \Leftrightarrow f(x)\, S f(y)].$$

Zapisujemy to $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$.

8.41. Sprawdzić, że jeżeli $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$; to $X \sim Y$.

8.42. a) Sprawdzić, że jeżeli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym i $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$, to $\langle Y, S\rangle$ także jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

b) To samo dla dobrego porządku.

8.43. Udowodnić, że podobieństwo jest zwrotne, symetryczne i przechodnie. Dlaczego nie wolno nam zastosować zasady abstrakcji?

8.44. Udowodnić, że jeśli f ustala podobieństwo pomiędzy zbiorami $\langle X, R\rangle$ i $\langle Y, S\rangle$, to

a) f zachowuje elementy wyróżnione (tj. obraz elementu maksymalnego jest elementem maksymalnym, itd.).

b) f zachowuje łańcuchy i antyłańcuchy, innymi słowy jeśli T jest łańcuchem (antyłańcuchem) w $\langle X, R\rangle$, to $f * T$ jest łańcuchem (antyłańcuchem) w $\langle Y, S\rangle$.

c) f zachowuje poprzedniki i następniki.

Każdemu zbiorowi częściowo uporządkowanemu przyporządkowujemy przedmiot zwany jego *typem relacyjnym* $TR(\langle X, R\rangle)$ tak, że $TR(\langle X, R\rangle) = TR(\langle Y, S\rangle) \Leftrightarrow \langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$.

W przypadku zbioru liniowo uporządkowanego typ relacyjny nazywamy *typem porządkowym*, zaś w przypadku zbioru dobrze uporządkowanego — *liczbą porządkową*. Jeśli typem zbioru $\langle X, R\rangle$ jest α, to typ zbioru dualnego $\langle X, R^{-1}\rangle$ oznaczamy przez α^*.

Wyróżniamy następujące typy porządkowe: ω — typ zbioru $\langle \mathscr{N}, \leqslant\rangle$, η — typ zbioru $\langle \mathscr{W}, \leqslant\rangle$, λ — typ zbioru $\langle \mathscr{R}, \leqslant\rangle$.

Zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, R\rangle$ nazywamy *gęstym*, jeśli

$$\bigwedge_{x,y} [(xRy \wedge x \neq y) \Rightarrow \bigvee_{z} x \neq z \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy)].$$

8.45. Udowodnić, że dla każdego typu α mamy $\alpha^{**} = \alpha$.

8.46. Udowodnić, że

a) Zbiór $\langle \mathscr{W}, \leqslant\rangle$ jest gęsty.

b) Zbiór $\langle \mathscr{R}, \leqslant\rangle$ jest gęsty.

8.47. Udowodnić, że gęstość jest niezmiennikiem relacji podobieństwa, tzn. jeżeli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem gęstym i $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$, to zbiór $\langle Y, S\rangle$ też jest gęsty. Wywnioskować stąd, że możemy mówić o typach porządkowych gęstych.

8.48. Udowodnić, że jeżeli $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$ i zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany, to nie jest on gęsty.

8.49. Czy jest gęsty zbiór $\langle X, R\rangle$ rozważany

a) w zadaniu 8.33,

b) w zadaniu 8.34.

8.50. Czy jest gęsty zbiór $\langle X, R\rangle$ rozważany

a) w zadaniu 8.35,

b) w zadaniu 8.36.

8.51. Jeśli zbiór $\langle X, R\rangle$ jest gęsty, zaś $x \in X$, $y \in X$, to czy y może być następnikiem elementu x?

8.52. Udowodnić, że każdy typ gęsty, przeliczalny, bez najmniejszego ani największego elementu jest równy η.

Innymi słowy, jeśli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym przeliczalnym i gęstym, bez pierwszego i ostatniego elementu, to $\langle X, R\rangle \approx \langle \mathscr{W}, \leqslant\rangle$.

8.53. Udowodnić, że zbiór $\langle \mathscr{Z} - \mathscr{N}, \leqslant\rangle$ ma typ ω^*.

8.54. Udowodnić, że $\eta^* = \eta$, to znaczy, że $\langle \mathscr{W}, \leqslant\rangle \approx \langle \mathscr{W}, \geqslant\rangle$.

8.55. Udowodnić, że $\lambda^* = \lambda$.

8.56. Udowodnić, że każdy zbiór liniowo uporządkowany $\langle X, R\rangle$ taki, że każdy element posiada następnik i poprzednik oraz jeśli xRy, to $\{z : xRz \wedge zRy\}$ jest skończony, jest podobny do zbioru $\langle \mathscr{Z}, \leqslant\rangle$.

8.57. Czy zbiór $\langle\{1-1/n : n \in \mathcal{N}^+\} \cup \{1\}, \leqslant\rangle$ jest podobny do zbioru $\langle\mathcal{N}, \leqslant\rangle$? Jaka będzie odpowiedź, jeśli zbiór $\mathcal{N}$ uzupełnimy elementem ∞, o którym zakładamy, że jest większy od wszystkich liczb naturalnych?

8.58. Podzbiór $Y \subset X$ nazywamy gęstym w zbiorze liniowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{x,y} [xRy \wedge x \neq y \Rightarrow \bigvee_{z} (z \in Y \wedge xRz \wedge zRy)].$$

Udowodnić, że

a) X jest gęsty w $\langle X, R\rangle$,

b) $\mathcal{W}$ jest gęsty w $\langle\mathcal{R}, \leqslant\rangle$.

8.59. Udowodnić, że dla każdego zbioru $\langle X, R\rangle$ liniowo uporządkowanego posiadającego podzbiór gęsty mocy $\aleph_0$ istnieje taki podzbiór $Y \subset \mathcal{R}$, że $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, \leqslant \restriction Y\rangle$.

8.60. Udowodnić, że jeżeli zbiory $\langle X, R\rangle$ i $\langle Y, S\rangle$ są uporządkowane liniowo, to są one podobne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y$ takie, że

$$\bigwedge_{x,y \in X} [(xRy \Rightarrow f(x) S f(y)].$$

8.61. Udowodnić, że zbiór $\langle\mathcal{N}, \leqslant\rangle$ jest dobrze uporządkowany, natomiast zbiór $\langle\mathcal{N}, \geqslant\rangle$ nie jest dobrze uporządkowany.

8.62. Dowieść, że jeśli $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym i $X_1 \subset X$, to $\langle X_1, R \cap X_1^2\rangle$ jest dobrze uporządkowany.

8.63. Udowodnić, że każda relacja $R \subset X^2$ spełniająca warunki b i e spełnia też warunki a, c, d (str. 74). Udowodnić, że osłabienie założeń przez pominięcie warunku b (antysymetria) jest niemożliwe.

8.64. *Odcinkiem początkowym* zbioru liniowo uporządkowanego $\langle X, R\rangle$ nazywamy każdy podzbiór $Y \subset X$ spełniający warunek

$$\bigwedge_{x,y} (x \in Y \wedge yRx \Rightarrow y \in Y).$$

a) Jakie są odcinki zbioru $\langle\mathcal{N}, \leqslant\rangle$?

b) Jakie są odcinki zbioru $\langle\mathcal{W}, \leqslant\rangle$.

8.65. Niech Y będzie niepustym odcinkiem początkowym zbioru $\langle\mathcal{W}, \leqslant\rangle$ nie posiadającym elementu ostatniego. Udowodnić, że $\langle Y, \leqslant \restriction Y\rangle \approx \langle\mathcal{W}, \leqslant\rangle$.

8.66. Definiujemy $O_R(x) = \{y : yRx \wedge y \neq x\}$. Udowodnić, że $O_R(x)$ jest odcinkiem początkowym.

8.67. Udowodnić następującą zasadę indukcji porządkowej: Załóżmy, że zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany. Φ jest własnością (to znaczy podzbiorem zbioru X) taką, że

$$\bigwedge_{x\in X}\{\bigwedge_{y}[y\in O_R(x)\Rightarrow \Phi(y)]\Rightarrow \Phi(x)\},$$

wtedy $\bigwedge_{x\in X}\Phi(x)$.

8.68. Udowodnić, że żaden odcinek właściwy zbioru dobrze uporządkowanego nie jest podobny do całego zbioru. Innymi słowy, jeśli $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany, Y jest odcinkiem $\langle X, R\rangle$ i $Y\neq X$, to $\sim(\langle Y, R\cap Y^2\rangle \approx \langle X, R\rangle)$.

8.69. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany i odwzorowanie $f: X \xrightarrow{1-1} X$ spełnia warunek $xRy\Rightarrow f(x)\,R f(y)$. Udowodnić, że $\bigwedge x\,R f(x)$.

8.70. Korzystając z aksjomatu wyboru udowodnić lemat Kuratowskiego-Zorna.

8.71. Udowodnić, że dla każdej relacji $R\subset X^2$ takiej, że $\langle X, R\rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, istnieje relacja S taka, że $R\subset S$ i zbiór $\langle X, S\rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

8.72. Udowodnić następującą mocniejszą wersję twierdzenia z zadania 8.71: Dla każdego elementu maksymalnego a w zbiorze uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ istnieje relacja S taka, że $R\subset S$, zbiór $\langle X, S\rangle$ jest liniowo uporządkowany i a jest elementem największym w $\langle X, S\rangle$.

8.73. Sformułować i udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia z zadania 8.72 dla elementów minimalnych.

8.74. Udowodnić (korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna) następującą formę aksjomatu wyboru:

Dla każdej rodziny $\{X_t\}_{t\in T}$ zbiorów niepustych istnieje funkcja $f: T\to \bigcup_{t\in T} X_t$ taka, że $f(t)\in X_t$.

8.75. Udowodnić (korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna) następującą formę aksjomatu wyboru:

Dla każdej rodziny $\{X_t\}_{t\in T}$ zbiorów niepustych parami rozłącznych istnieje zbiór W taki, że $\overline{\overline{W\cap X_t}} = 1$.

8.76. Udowodnić, że w każdym pierścieniu z jednością istnieje ideał maksymalny.

8.77. Udowodnić istnienie bazy algebraicznej w dowolnej przestrzeni liniowej.

8.78. Udowodnić, że każdy antyłańcuch zawarty jest w maksymalnym antyłańcuchu.

8.79. Rozważmy zbiór $\langle \mathscr{P}(X), \leqslant \rangle$ oraz zbiór ${}^X\{0, 1\}$ wraz z relacją R określoną jak następuje:

$$f R g \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} [f(x) \leqslant g(x)].$$

Udowodnić, że

$$\langle \mathscr{P}(X), \leqslant \rangle \approx \langle {}^X\{0, 1\}, R \rangle.$$

8.80. Załóżmy, że $\{\langle X_t, R_t \rangle_{t \in T}$ jest rodziną zbiorów częściowo uporządkowanych i niepustych. Rozważmy zbiór

$$\langle \prod_{t \in T} X_t, R \rangle, \qquad \text{gdzie} \qquad f R g \Leftrightarrow \bigwedge_t [f(t) \, R_t \, g(t)].$$

a) Udowodnić, że zbiór ten jest częściowo uporządkowany.

b) Czy jeżeli wszystkie zbiory $\langle X_t, R_t \rangle$ są uporządkowane liniowo, to $\langle \prod_{t \in T} X_t, R \rangle$ jest uporządkowany liniowo?

ZESTAWY OGÓLNIE SPRAWDZAJĄCE

9. I. 1. Niech $\varphi : \mathscr{R}[x] \to \mathscr{R}[x]$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $\varphi(f) = f(2x^2)$:

a) Znaleźć przeciwobraz zbioru wszystkich wielomianów stałych.

b) Znaleźć obraz zbioru wielomianów stopnia co najwyżej 2.

c) Znaleźć przeciwobraz wielomianu x^3+1 oraz moc tego przeciwobrazu.

d) Znaleźć przeciwobraz wielomianu x^4+x^2+1.

2. Zbadać moc zbioru $\mathscr{R}_2[x]$, skonstruować odwzorowanie różnowartościowe tego zbioru na jeden ze zbiorów $\mathscr{N}, \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathscr{R}^2$.

3. Udowodnić, że

$$\bigcup_{s \in S} (A_s \cap B_s) \subset \bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in S} (A_s \cap B_t).$$

Podać przykład świadczący o tym, że znaku inkluzji nie można zastąpić znakiem równości.

4. Posługując się poza symbolami logicznymi wyłącznie znakami działań arytmetycznych, wartości bezwzględnej oraz symbolami $\mathscr{N}$ i $\mathscr{R}$, zapisać zdanie: Istnieją ciągi ograniczone, ale nie zbieżne.

5. W zbiorze $Z = \{3, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 32, 66, 128, 135\}$ określona jest relacja R wzorem $xRy = x|y$.

a) Udowodnić, że zbiór $\langle Z, R\rangle$ jest częściowo uporządkowany.

b) Sporządzić diagram relacji.

c) Wskazać elementy wyróżnione.

d) Znaleźć relację S taką, że $R \subset S$ i zbiór $\langle X, S\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

6. W zbiorze $\mathscr{W}[x]$ określamy relację R następująco:

$$\varphi_1 R \varphi_2 \Leftrightarrow \bigvee_{a,b,c} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = ax^2+bx+c].$$

a) Udowodnić, że relacja R jest relacją równoważności.

b) Znaleźć moc klasy abstrakcji wielomianu $\varphi(x) \equiv 0$.

c) Znaleźć moc zbioru klas abstrakcji.

9. II. 1. Niech P będzie zbiorem wszystkich formuł rachunku zdań. Wprowadzamy relację $\sim$ jak następuje $\Phi_1 \sim \Phi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ jest tautologią.

a) Udowodnić, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

b) Jakie formuły należą do klasy $\sim[p \wedge \sim p]$?

c) Jakie formuły należą do klasy $\sim[p \vee \sim p]$?

d) W zbiorze klas abstrakcji $P/_{\sim}$ wprowadzamy relację $\leqslant$ jak następuje $[\Phi_1] \leqslant [\Phi_2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ jest tautologią.

Sprawdzić, że definicja relacji jest poprawna, tj. że jeśli $\Phi_1 \sim \Psi_1$, $\Phi_2 \sim \Psi_2$ i $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ jest tautologią, to $\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2$ jest tautologią.

e) Skonstruować w $\langle P/_{\sim}, \leqslant\rangle$ łańcuch mocy $\aleph_0$.

f) Skonstruować w $\langle P/_{\sim}, \leqslant\rangle$ antyłańcuch mocy $\aleph_0$.

2. Posługując się poza symbolami logicznymi wyłącznie znakami: $\mathscr{P}$, $\times$, $\langle\ \rangle$, $\in$ zapisać zdanie: Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $\mathscr{N}$ jest równoliczny ze zbiorem $\mathscr{R}$.

3. Dany jest n-elementowy zbiór X. Ile jest zwrotnych relacji $R \subseteq X^2$?

4. Podać przykład nieskończonego zbioru częściowo uporządkowanego, który ma element pierwszy, nie ma ostatniego, w którym każdy element ma następnik i każdy — poza pierwszym — ma poprzednik, przy tym zbiór ten nie jest podobny do zbioru $\mathscr{N}$.

5. Skonstruować funkcję odwzorowującą odcinek $\langle 0, 1\rangle$ na $\mathscr{N}$ taką, że przeciwobraz każdej liczby naturalnej ma moc $\mathfrak{c}$.

6. Udowodnić, że odwzorowanie $f: \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ określone wzorem $f(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ jest różnowartościowe i „na".

9. III. 1. W Zbiorze funkcji ${}^{\langle 0,1\rangle}\langle 0, 1\rangle$ wprowadzamy relację wzorem $fRg \Leftrightarrow f \restriction \mathscr{W} \cap \langle 0, 1\rangle = g \restriction \mathscr{W} \cap \langle 0, 1\rangle$:

a) Udowodnić, że relacja R jest relacją równoważności.

b) Znaleźć moc klasy abstrakcji funkcji $f(x) \equiv 0$.

c) Znaleźć moc zbioru klas abstrakcji.

d) Czy każde dwie klasy abstrakcji są równoliczne? Jeśli tak, to znaleźć funkcję odwzorowującą klasę funkcji $f(x) = x$ na klasę funkcji $f(x) = 1-x$.

2. Posługując się poza symbolami logicznymi wyłącznie znakami $\subset$, $\in$, $\langle\ \rangle$, $-$, zapisać zdanie: Istnieje podzbiór X zbioru $\mathcal{N}$ taki, że $\mathcal{N}-X$ jest równoliczny z $\mathcal{N}$.

3. Dany jest zbiór n-elementowy X. Ile jest relacji symetrycznych $R \subset X^2$?

4. Udowodnić, że dowolny, co najmniej dwuelementowy zbiór liniowo uporządkowany i gęsty $\langle X, \leqslant\rangle$ ma moc $\geqslant \aleph_0$.

5. Skonstruować funkcję odwzorowującą odcinek $\langle 0, 1\rangle$ na $\mathcal{N}$ taką, że przeciwobraz każdej liczby parzystej ma moc $\mathfrak{c}$, zaś przeciwobraz każdej liczby nieparzystej moc 1.

6. Udowodnić, że odwzorowanie $f: \mathcal{N}\times\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dane wzorem $f(x, y) = 2^x(2y+1)-1$ jest różnowartościowe i „na".

9. IV. 1. Niech $f: X \to Y$. Przekształceniu f przyporządkowujemy relację $\sim_f$ na zbiorze X zdefiniowaną wzorem

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

a) Udowodnić, że $\sim_f$ jest relacją równoważności.

b) Udowodnić, że odwzorowanie f może być przedstawione jako $g \circ h$, gdzie h jest odwzorowaniem „na", zaś g jest odwzorowaniem różnowartościowym, przy tym $h: X \to X/_\sim$, $g: X/_\sim \to Y$.

c) Udowodnić, że g jest odwzorowaniem „na" wtedy i tylko wtedy, gdy f jest odwzorowaniem „na", zaś h jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowe. (Rozkład $f = g \circ h$ nazywa się *kanonicznym rozkładem funkcji*).

2. W zbiorze prostych na płaszczyźnie wprowadzamy relację R następująco:

$L_1 R L_2 \Leftrightarrow \bigvee_{w\in\mathcal{W}}$ (kąt pomiędzy prostymi L_1 i L_2 jest równy $w\cdot\pi$ lub $L_1 \| L_2$).

a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.

b) Znaleźć moc klasy abstrakcji wyznaczonej przez oś Ox.

c) Znaleźć moc zbioru klas abstrakcji.

3. Zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, R\rangle$ nazywa się *drzewem* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x, zbiór $O_R(x) = \{y: yRx\}$ jest dobrze uporządkowany przez relację R ograniczoną do elementów tego zbioru. Określamy typ $t(x)$ elementu x jako liczbę porządkową zbioru $O_R(x)$.

a) Udowodnić, że relacja $\sim_R$ określona wzorem $x_1 \sim_R x_2 \Leftrightarrow t(x_1) = t(x_2)$ jest relacją równoważności.

b) W zbiorze klas abstrakcji relacji $\sim_R$ wprowadzamy relację S wzorem $[x_1]S[x_2] \Leftrightarrow t(x_1) \leqslant t(x_2)$ udowodnić, że $\leqslant$ jest dobrym porządkiem.

c) Udowodnić, że każda z klas abstrakcji relacji $\sim_R$ jest antyłańcuchem.

4. Dane są rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$ oraz zbiory $U = \bigcup\limits_{t \in T} (A_t - B_t)$ $V = \bigcup\limits_{t \in T} A_t - \bigcup\limits_{t \in T} B_t$:

a) Udowodnić, że $V \subset U$.

b) Znaleźć rodziny $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, $\{B_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ takie, że nie jest prawdą, iż $U \subset V$ oraz takie, że $\bigwedge\limits_{n \in \mathcal{N}} \overline{\overline{A}}_n = \overline{\overline{B}}_n = \aleph_0$.

5. Posługując się poza symbolami logicznymi znakami $\times$, $\{,\}$, $\langle\,\rangle$, $\in$, zapisać zdanie: Zbiór wszystkich ciągów o wyrazach 0 lub 1 jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{R}$.

6. Dla danego zbioru $X \subset \mathcal{N}$ takiego, że $\overline{\overline{\mathcal{N} - X}} \neq \aleph_0$ skonstruować przekształcenie $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ o następujących własnościach:

a) przeciwobraz każdego elementu z X jest dwuelementowy,

b) przeciwobraz każdego elementu z $\mathcal{N} - X$ ma moc $\aleph_0$.

9. V. 1. Niech $R \subset X^2$, zaś $S \subset Y^2$. Definiujemy iloczyn kartezjański relacji $R \times S \subset (X \times Y)^2$ wzorem

$$\langle x_1 y_1 \rangle (R \times S) \langle x_2 y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 R x_2 \wedge y_1 S y_2.$$

a) Udowodnić, że iloczyn kartezjański relacji równoważności jest relacją równoważności.

b) Niech $\overline{\overline{[x]}}_R = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{[y]}}_S = \mathfrak{n}$, znaleźć moc $[\langle x, y \rangle]_{R \times S}$.

c) Udowodnić, że iloczyn kartezjański częściowych porządków jest częściowym porządkiem.

2. Udowodnić, że żadne dwa spośród zbiorów

$$A, 2^A, 2^{2^A}, \ldots, 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^A}}}} \quad \text{nie są równoliczne.}$$

Wyciągnąć stąd wniosek, że istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych nieskończonych.

3. W zbiorze $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definiujemy relację R wzorem $\langle k, l \rangle R \langle m, n \rangle \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \max(k, l) = \max(m, n)$:

a) Udowodnić, że relacja R jest relacją równoważności.

b) Jakiej postaci są klasy abstrakcji.

c) Czy jakiekolwiek dwie różne klasy abstrakcji są równoliczne?

4. Dane jest drzewo T (por. zestaw IV, zad. 3) złożone z ciągów skończonych o wyrazach 0 i 1, przy tym $tTs \Leftrightarrow$ ciąg t jest odcinkiem początkowym ciągu s.

a) Zbadać moc zbioru łańcuchów w drzewie T.

b) Skonstruować antyłańcuch w drzewie T, mocy $\aleph_0$.

5. Dane są rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$, $\{B_t\}_{t\in T}$ podzbiorów zbioru X oraz zbiory $U = \bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$, $V = -\bigcup_{t\in T} (A_t - B_t)$.

a) Udowodnić, że $V \subset U$.

b) Znaleźć rodziny $\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathcal{R}$ takie, że inkluzja $U \subset V$ nie zachodzi.

6. W zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$ będącym drzewem dany jest antyłańcuch $U \subset X$. Definiujemy relację S w zbiorze X wzorem $xSy \Leftrightarrow \bigvee_{u\in U} (uRx \wedge uRy) \vee (x = y)$.

a) Udowodnić, że relacja S jest relacją równoważności.

b) W zbiorze $X/_S$ definiujemy relację $\leqslant$ wzorem $[x] \leqslant [y] \Leftrightarrow xRy$, udowodnić, że definicja ta jest poprawna, tj. nie zależy od wyboru reprezentantów.

c) Udowodnić, że każda klasa $[u]$ dla $u \in U$ jest w sensie relacji $\leqslant$ elementem maksymalnym.

d) Udowodnić, że jeśli $[x]$ jest elementem maksymalnym w sensie relacji $\leqslant$ oraz $\bigwedge_{u\in U} (u \notin [x])$, to x jest elementem maksymalnym w sensie relacji R.

e) Udowodnić, że jeśli $[x]$ jest elementem minimalnym w sensie relacji $\leqslant$, to x jest elementem minimalnym w sensie relacji R.

9. VI. 1. W zbiorze ${}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ (wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych) dana jest relacja R określona wzorem

$$\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}} R \{b_n\}_{n\in\mathcal{N}} \Leftrightarrow \bigwedge_k (a_{2k} = b_{2k}).$$

a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.

b) Znaleźć moc klasy $[\{2n\}_{n\in\mathcal{N}}]$.

c) Udowodnić, że każde dwie klasy abstrakcji są równoliczne i mają moc $\mathfrak{c}$.

d) Udowodnić, że moc zbioru klas abstrakcji wynosi $\mathfrak{c}$.

2. Określamy odwzorowanie $f\colon {}^{\mathcal{N}}\mathcal{N} \to {}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ wzorem

$$f(\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}) = \{a_{2n}\}_{n\in\mathcal{N}}.$$

a) Zbadać własności relacji $\sim_f$ (por. zestaw IV, zad. 1).

b) Znaleźć zbiór X taki, że $X \not\subset f*X$.

c) Znaleźć zbiór X taki, że $X = f*X$.

3. W zbiorze ${}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ określamy relację $\leqslant$ w następujący sposób:

$$\{a_n\} \leqslant \{b_n\} \Leftrightarrow \bigvee_k [\bigwedge_m (m < k \Rightarrow (a_m = b_m) \wedge b_k \leqslant a_k) \vee \{a_n\} = \{b_n\}].$$

Udowodnić, że relacja $\leqslant$ jest porządkiem liniowym.

4. Zbiór A nazywa się nieskończonym w sensie Dedekinda (n. D) wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym:

a) Udowodnić, że każdy zbiór (n. D) zawiera podzbiór mocy $\aleph_0$.

b) Udowodnić, że jeśli A zawiera podzbiór mocy $\aleph_0$, to A jest (n. D).

5. Zbiór A jest skończony w sensie Dedekinda (s. D) wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest równoliczny z żadnym swoim podzbiorem właściwym:

a) Udowodnić, że zbiór A jest (s. D) wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podzbioru mocy $\aleph_0$.

b) Udowodnić, że suma $A \cup B$ zbiorów (s. D) jest też zbiorem (s. D).

6. Zapisać za pomocą symboliki logicznej zdanie: Zbiór ${}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ może być liniowo uporządkowany.

9. VII. 1. W zbiorze $\mathcal{N}[x]$ wprowadzamy relację R wzorem

$$(a_n x^n + \ldots + a_0)\, R\, (b_m x^m + \ldots + b_0) \Leftrightarrow n \leqslant m \wedge \bigwedge_{k \leqslant n} (a_k \leqslant b_k).$$

a) Udowodnić, że R jest relacją częściowego porządku.

b) Skonstruować w $\langle \mathcal{N}[x], R \rangle$ łańcuch mocy $\aleph_0$.

c) Skonstruować w $\langle \mathcal{N}[x], R \rangle$ antyłańcuch mocy $\aleph_0$.

d) Znaleźć elementy maksymalne i minimalne ewentualnie najmniejsze i największe.

2. W zbiorze $\mathscr{Z}[x]$ wprowadzamy relację R wzorem:
$fRg \Leftrightarrow$ wszystkie współczynniki wielomianu $f-g$ są podzielne przez 3.

a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.

b) Znaleźć moc klasy zawierającej $f(x) \equiv 3x$.

3. Dane są rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ oraz $\{B_t\}_{t \in T}$ oraz $U = \bigcap_{t \in T} (A_t - B_t)$, $V = \bigcap_{t \in T} A_t - \bigcap_{t \in T} B_t$:

a) Udowodnić, że $U \subset V$.

b) Czy $V \subset U$? Jeżeli nie, to znaleźć rodziny $\{A_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ podzbiorów zbioru $\mathcal{N}$ takie, że $U \neq V$.

4. Posługując się poza symbolami logicznymi tylko symbolami $\mathcal{N}$, R, $\in$, $\langle\ \rangle$, $|\ |$, zapisać zdanie: Każdy ograniczony ciąg liczby rzeczywistych zawiera podciąg zbieżny.

5. Dane jest odwzorowanie $\varphi : \mathscr{Z}[x]\times\mathscr{Z}[x] \to \mathscr{Z}[x]$ określone wzorem $\varphi(f, g) = f-g$.

a) Znaleźć obraz zbioru $\{\langle x, x^2\rangle, \langle x^2, x^3\rangle, \langle x^2+1, x^3+1\rangle\}$.

b) Znaleźć przeciwobraz wielomianu zerowego.

c) Znaleźć obraz $\mathscr{Z}_3[x]\times\mathscr{Z}_3[x]$.

d) Znaleźć moc przeciwobrazu zbioru $\mathscr{Z}[x]$.

6. W zbiorze $A = (\mathscr{R}[x]-\{0\})\times\mathcal{N}$ określamy relację R wzorem $\langle f, n_1\rangle R \langle g, n_2\rangle \Leftrightarrow f|g \wedge n_1|n_2$:

a) Udowodnić, że R jest częściowym porządkiem.

b) Jaka jest moc zbioru A?

c) Skonstruować antyłańcuch mocy c.

d) Jaką moc mają łańcuchy w $\langle A, R\rangle$?

9. VIII. 1. Udowodnić, że jeżeli $f : A \to \mathscr{P}(A)$, to

$$f^{-1}(\{x\in A : x\notin f(x)\}) = O.$$

(jest to tak zwane *twierdzenie o przekątnej*).

2. Niech dany będzie zbiór częściowo uporządkowany $\langle X, R\rangle$ taki, że każdy jego łańcuch i antyłańcuch jest skończony. Udowodnić, że zbiór X także jest skończony.

3. Znaleźć moc zbioru:

a) Wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathcal{N}$.

b) Wszystkich relacji liniowo porządkujących zbiór $\mathcal{N}$.

4. Niech f będzie odwzorowaniem zbioru A w siebie takim, że $f(x) = x \wedge \bigwedge_{n\in\mathcal{N}-\{0,1\}} (f^n(x) \neq x)$. Definiujemy w zbiorze A relację R wzorem

$$xRy \Leftrightarrow \bigvee_{n\in\mathcal{N}-\{0\}} f^n(x) = y.$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle A, R\rangle$ jest częściowo uporządkowany.

b) Znaleźć elementy maksymalne.

c) Co oznacza fakt, że w zbiorze $\langle A, R\rangle$ jest element największy?

d) Znaleźć łańcuchy maksymalne.

e) Dowieść, że jeśli $x\in A-(f * A)$, to x jest elementem minimalnym.

5. Niech f i A będą zbiorami rozważanymi w zadaniu 4. Udowodnić, że relacja S określona wzorem

$$xSy \Leftrightarrow \bigvee_{k,l \in \mathcal{N} - \{0\}} f^k(x) = f^l(y)$$

jest relacją równoważności.

6. Niech $R \subset A^2$ będzie relacją zwrotną i przechodnią. Definiujemy relację $I \subset A^2$ w następujący sposób:

$$x\,I\,y \Leftrightarrow (xRy \wedge yRx).$$

a) Udowodnić, że tak zdefiniowana relacja jest relacją równoważności.

b) W zbiorze klas abstrakcji relacji I wprowadzamy relację R_1 wzorem $[a]_I R_1 [b]_I \Leftrightarrow aRb$. Udowodnić, że definicja ta jest poprawna, to znaczy nie zależy od wyboru reprezentantów.

7. Posługując się poza symbolami logicznymi tylko symbolami $\mathcal{N}$, $R, \in, <, \leqslant, |\ |$, zapisać zdanie: ciągi $\{a_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ i $\{b_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ mają tę samą granicę.

ARYTMETYKA LICZB KARDYNALNYCH I PORZĄDKOWYCH

Liczbami porządkowymi nazywamy zbiory A o następujących własnościach 1-3:

1) $\bigwedge_{X} (X \in A \Rightarrow X \subset A)$,

2) $\bigwedge_{X,Y} [X, Y \in A \Rightarrow (X = Y \vee X \in Y \vee Y \in X)]$,

3) $\bigwedge_{X \subset A} [X \neq O \Rightarrow \bigvee_{Y \in X} (Y \cap X = O)]$.

Intuicyjnie rzecz biorąc, najmniejszą liczbą porządkową jest zbiór pusty. Każda *liczba porządkowa* jest zbiorem wszystkich liczb od niej mniejszych, przy czym relacją porządku jest po prostu relacja inkluzji. Dla tak określonych liczb porządkowych relacja inkluzji jest nawet relacją dobrego porządku.

Tak określone liczby porządkowe mają następującą własność:

Dla każdego zbioru dobrze uporządkowanego $\langle X, R\rangle$ istnieje liczba porządkowa A taka, że $\langle X, R\rangle \approx \langle A, \subset\rangle$. Liczba ta jest jedyna i nazywamy ją liczbą porządkową zbioru $\langle X, R\rangle$(1). Jeśli zbiory A i B są skończone, to dla wszelkich relacji liniowego porządku R i S

$$\langle A, R\rangle \approx \langle B, S\rangle \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Z tego też powodu dla zbiorów skończonych liczby porządkowe utożsamiamy z liczbami kardynalnymi (a więc z liczbami naturalnymi). Tradycyjnie liczby porządkowe oznaczamy literami greckimi $\alpha, \beta, \cdots, \xi, \ldots$ Jeśli α jest liczbą porządkową zbioru $\langle X, R\rangle$, to zapisujemy to w następujący sposób: $\alpha = \overline{\langle X, R\rangle}$. *Mocą liczby porządkowej* ξ nazywamy moc (dowolnego) zbioru uporządkowanego w typ ξ. Moc liczby ξ oznaczamy przez $\overline{\xi}$.

Jeśli $\overline{\langle A, R\rangle} = \alpha$ i $\overline{\langle B, S\rangle} = \beta$ oraz $A \cap B = O$, to $\alpha+\beta = \overline{\langle A \cup B,\ R \cup S \cup (A \times B)\rangle}$.

---

(1) W ten sposób pojęcie typu relacyjnego może być wyeliminowane w przypadku dobrych porządków, por. str. 84 i 85.

Intuicyjnie: wszystkie elementy zbioru A poprzedzają wszystkie elementy zbioru B, wewnątrz zbiorów porządek pozostaje bez zmian.

10.1. Udowodnić poprawność definicji dodawania dla liczb porządkowych.

10.2. Wskazać α, β, γ takie, że $\beta+\alpha = \gamma+\alpha$ i $\beta \neq \gamma$.

10.3. Udowodnić, że $\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

10.4. Udowodnić, że $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$.

10.5. Znaleźć przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych w typy: a) $\omega+1$, b) $\omega+\omega$, c) $\omega+\omega+1$.

10.6. Udowodnić, że $1+\omega = 2+\omega = \ldots = n+\omega = \ldots = \omega$.

10.7. Udowodnić, że $\omega+\omega \neq \omega$.

10.8. Znaleźć α i β takie, że $\alpha+\beta \neq \beta+\alpha$.

Definicja mnożenia: Jeśli $\overline{\langle A, R\rangle} = \alpha$, $\overline{\langle B, S\rangle} = \beta$, to $\alpha \cdot \beta = \overline{\langle A\times B, T\rangle}$, gdzie T jest następującą relacją:

$$\langle x, y\rangle\, T\, \langle x_1, y_1\rangle \Leftrightarrow (y\, S\, y_1 \wedge y \neq y_1) \vee (y = y_1 \wedge x\, R\, x_1).$$

10.9. Udowodnić, że definicja ta jest poprawna, to znaczy, że nie zależy od wyboru reprezentantów.

10.10. Udowodnić, że $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

10.11. Znaleźć α, β, γ takie, że $\beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha$, ale $\beta \neq \gamma$.

10.12. Znaleźć przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych w typy:
a) $\omega \cdot \omega$, b) $\omega \cdot \omega+\omega$,
c) $\omega \cdot \omega+\omega+3$, d) $\omega \cdot \omega \cdot \omega+\omega \cdot \omega \cdot 2+\omega$.

10.13. Udowodnić, że $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

10.14. Udowodnić, że $2 \cdot \omega = \omega$.

10.15. Znaleźć liczby porządkowe α i β takie, że $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.

10.16. Znaleźć liczby porządkowe nieskończone α i β takie, że $\alpha \neq \beta$ i $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

10.17. Udowodnić, że $\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta+\alpha \cdot \gamma$.

10.18. Znaleźć liczby porządkowe α, β, γ takie, że $(\alpha+\beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma+\beta \cdot \gamma$.

Relacje porządku wśród liczb porządkowych definiujemy w następujący sposób:

a) $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow$ pewien zbiór typu α jest podobny do odcinka pewnego zbioru typu β.

b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta \wedge \alpha \neq \beta$.

10.19. Udowodnić, że obydwa słowa „pewien" w powyższej definicji mogą być zastąpione przez „każdy".

10.20. Udowodnić, że $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow$ każdy zbiór typu α jest podobny do podzbioru pewnego zbioru typu β.

10.21. Udowodnić, że dla dowolnych α, β:

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow (\alpha < \beta \vee \beta < \alpha).$$

10.22. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha \leqslant \beta \wedge \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma.$$

10.23. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha \leqslant \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

10.24. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta.$$

10.25. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma.$$

10.26. Znaleźć liczby porządkowe α, β, γ takie, że

$$\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma \quad \text{ale} \quad \alpha > \beta.$$

10.27. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma \Rightarrow \beta < \gamma.$$

10.28. Udowodnić, że dla dowolnych α, β:

$$\alpha \leqslant \beta \wedge \beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta.$$

10.29. Udowodnić, że dla dowolnych liczb porządkowych α, β:
a) $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$, b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$.

10.30. Udowodnić, że dla dowolnych liczb porządkowych α, β: $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow$ istnieje dokładnie jedna liczba γ taka, że $\alpha + \gamma = \beta$.

10.31. Udowodnić następujące twierdzenie o dzieleniu z resztą:

$$\bigwedge_{\beta > 0} \bigwedge_{\alpha} \bigvee_{\gamma, \varrho} [(\alpha = \beta \cdot \gamma + \varrho) \wedge (\varrho < \beta)].$$

10.32. Udowodnić, że liczby γ i ϱ, o których mowa w zad. 10.31 są jednoznacznie wyznaczone przez α i β.

Potęgowanie liczb porządkowych definiujemy przez indukcję (dla $\alpha > 1$) jak następuje:

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha, \quad \alpha^\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^\xi.$$

10.33. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma.$$

10.34. Udowodnić, że dla dowolnych α, β, γ:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \gamma^\alpha \leqslant \gamma^\beta.$$

10.35. Udowodnić następujące twierdzenie o istnieniu rozwinięcia: Dla każdej liczby porządkowej $\mu > 1$ i każdej liczby porządkowej $\alpha > 0$ istnieje jedyne rozwinięcie

$$\alpha = \mu^{\alpha_0} \cdot \nu_1 + \ldots + \mu^{\alpha_n} \cdot \nu_n,$$

gdzie

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n, \quad 0 < \nu_i < \mu \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Liczbą porządkową graniczną nazywamy liczbę porządkową β nie posiadającą poprzednika (a więc taką, że dla każdego α mamy $\alpha + 1 \neq \beta$).

Liczbą porządkową początkową nazywamy taką liczbę porządkową β, że $\bigwedge\limits_{\alpha} (\alpha < \beta \Leftrightarrow \bar{\alpha} < \bar{\beta})$.

10.36. Co oznacza znak $<$ w poprzedniku, a co w następniku implikacji z zadania 10.35?

10.37. Udowodnić, że jeśli α jest liczbą graniczną i $\beta < \alpha$, to $\beta + 1 < \alpha$.

10.38. Udowodnić, że jeśli α jest liczbą początkową i $\beta < \alpha$, to $\beta \cdot \beta < \alpha$, $\beta \cdot \beta \cdot \beta < \alpha$ itd.

Liczby porządkowe początkowe są dobrze uporządkowane przez relację $\subset$ i wobec tego możemy je numerować kolejnymi liczbami porządkowymi, np. liczbę początkową o numerze α oznaczamy przez ω_α.

Moc liczby ω_α oznaczamy przez $\aleph_\alpha$ (*alef-alfa*). Takie liczby kardynalne nazywamy *alefami*.

10.39. Udowodnić, że dla dowolnego α istnieje β takie, że $\bar{\alpha} = \aleph_\beta$.

10.40. Znaleźć dobre uporządkowanie zbioru $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ w typ ω_α.

10.41. Udowodnić, że dla dowolnego $\alpha : \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{n}$ i $A \cap B = O$. Sumą $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ (iloczynem $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$, potęgą $\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$) liczb kardynalnych $\mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n}$ nazywamy moc zbioru $A \cup B$ ($A \times B$ i ${}^B A$).

10.42. Udowodnić, że dla dowolnego α mamy

$$\aleph_\alpha + 1 = \aleph_\alpha + \aleph_0 = \aleph_\alpha \cdot 2 = \aleph_\alpha \cdot \aleph_0 = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

10.43. Udowodnić, że dla dowolnych α, β mamy

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}.$$

10.44. Udowodnić następujące prawa arytmetyki liczb porządkowych:

a) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$,

b) $((\alpha)^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

10.45. Udowodnić, że jeżeli $\gamma > 1$, to dla dowolnego ξ mamy $\xi \leqslant \gamma^\xi$.

Funkcję o dziedzinie będącej liczbą porządkową nazywamy *ciągiem*. Niech $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\alpha}$ będzie ciągiem rosnącym liczb porządkowych (a więc $\xi < \eta \Rightarrow \varphi_\xi \leqslant \varphi_\eta$). Definiujemy granicę tego ciągu w następujący sposób:

$$\lim_{\xi<\alpha} \varphi_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha} \varphi_\xi .$$

10.46. Udowodnić, że granica ciągu liczb porządkowych jest liczbą porządkową.

10.47. Udowodnić, że granica ciągu liczb porządkowych $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\alpha}$ jest najmniejszą liczbą porządkową β taką, że

$$\bigwedge_{\xi<\alpha} \varphi_\xi \leqslant \beta.$$

10.48. Funkcję Φ określoną dla liczb porządkowych i przyjmującą wartości będące liczbami porządkowymi nazywamy *funkcją ciągłą* jeśli:

$$\Phi(\lim_{\xi<\alpha} \varphi_\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha} \Phi(\varphi_\xi).$$

Udowodnić, że każda funkcja ciągła i rosnąca φ (to znaczy spełniająca warunek $\xi < \eta \Rightarrow \varphi(\xi) < \varphi(\eta)$) ma punkt krytyczny, to jest taki, że $\xi = \varphi(\xi)$.

10.49. Podać zależności pomiędzy liczbami kardynalnymi:

a) $\overline{\alpha+\beta}$ i $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$,

b) $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ i $\overline{\alpha\cdot\beta}$,

c) $\overline{\alpha^\beta}$ i $\bar{\alpha}^{\bar{\beta}}$.

10.50. Udowodnić, że liczby porządkowe nie tworzą zbioru.

10.51. Udowodnić, że liczby kardynalne nie tworzą zbioru.

10.52. Udowodnić, że następujące zdanie: Dla każdego X istnieje relacja $R \subset X^2$, która jest dobrym porządkiem X, zwane *twierdzeniem Zermelo* jest równoważne zdaniu: Każda liczba kardynalna jest alefem (oczywiście nie korzystając z pewnika wyboru).

10.53. Udowodnić, że twierdzenie Zermelo jest równoważne aksjomatowi wyboru.

Każdej liczbie kardynalnej przyporządkowujemy zbiór $Z(\mathfrak{m}) = \{\alpha : \bar{\alpha} \leqslant \mathfrak{m}\}$.

10.54. Udowodnić, że $Z(\mathfrak{m})$ jest liczbą porządkową początkową.

10.55. Definiujemy $\aleph(\mathfrak{m}) = \overline{Z(\mathfrak{m})}$. Udowodnić, że $\sim \aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$.

10.56. Udowodnić, że $\mathfrak{m} < \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m})$.

10.57. Udowodnić (bez pomocy aksjomatu wyboru), że $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$.

10.58. Udowodnić (bez pomocy aksjomatu wyboru), że $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}^2}}$.

10.59. Udowodnić (za pomocą aksjomatu wyboru), że $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

10.60. Udowodnić, (bez pomocy aksjomatu wyboru), że jeśli $\mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \cdot \aleph(\mathfrak{m})$, to $\mathfrak{m}$ jest alefem.

10.61. Udowodnić, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ istnieje liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ taka, że $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$.

10.62. Udowodnić, że jeśli dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, to każda liczba kardynalna jest alefem.

10.63. Udowodnić następujący lemat Sierpińskiego: Jeśli $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 2^{2^{\mathfrak{m}}}$, to $\mathfrak{n} \geqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

10.64. Uogólniona hipoteza continuum oznacza zdanie: $\bigwedge\limits_{\mathfrak{m}} \bigwedge\limits_{\mathfrak{n}} \sim (\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}})$. Udowodnić, że z uogólnionej hipotezy continuum wynika aksjomat wyboru.

10.65. Udowodnić, że dla każdego α mamy $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

10.66. Udowodnić, że jeśli dla każdego $n \in \mathcal{N}$ mamy $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1}$, to $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}$.

ELEMENTARNE SYSTEMY FORMALNE I ICH PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Niech T_1, T_2, T_3 będą zbiorami parami rozłącznymi. Elementy tych zbiorów nazywamy odpowiednio *symbolami predykatywnymi*, *symbolami funkcyjnymi* oraz *zmiennymi*.

Zakładamy ponadto, że zbiór zmiennych T_3 ma nieskończenie wiele elementów oraz, że istnieje funkcja ϑ określona na elementach zbioru $T_1 \cup T_2$ o wartościach naturalnych taka, że jeśli $R \in T_1$, to $\vartheta R \neq 0$.

Mówiąc intuicyjnie, funkcja ϑ informuje nas ile argumentów ma mieć relacja, ewentualnie funkcja opisana przez symbol predykatywny, bądź przez symbol funkcyjny.

Zbiór termów określamy indukcyjnie jako najmniejszy zbiór $\mathscr{T}$ taki, że

1) $T_3 \subset \mathscr{T}$.

2) Jeśli $F \in T_2$, $\vartheta F = n$ i $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}$, to $F(t_1, \ldots, t_n) \in \mathscr{T}$.

Z definicji wynika, że jeśli $\vartheta F = 0$, to $F \in \mathscr{T}$. Takie symbole funkcyjne nazywamy *stałymi*.

Zbiór formuł określamy również indukcyjnie jako najmniejszy zbiór $\mathscr{F}$ taki, że

1) Jeśli $R \in T_1$, $\vartheta R = n$ i $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}$, to $R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathscr{F}$.

2) Jeśli $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$, to $t_1 = t_2 \in \mathscr{F}$.

3) Jeśli Φ, $\Psi \in \mathscr{F}$, to $\Phi \vee \Psi \in \mathscr{F}$, $\sim\Phi \in \mathscr{F}$, $\Phi \wedge \Psi \in \mathscr{F}$, $\Phi \Rightarrow \Psi \in \mathscr{F}$ oraz dla dowolnego $x \in T_3$ mamy $\bigwedge\limits_x \Phi \in \mathscr{F}$ oraz $\bigvee\limits_x \Phi \in \mathscr{F}$.

Językiem nazywamy zbiór $\mathbf{J} = \langle T_1, T_2, T_3, \vartheta \rangle$, a zbiory $\mathscr{T}_{\mathbf{J}}$ i $\mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ odpowiednio zbiorami jego termów i formuł.

Uwaga. Jeśli $R \in T_1$ i $\vartheta(R) = 2$, to bardzo często zamiast $R(x_1 x_2)$ piszemy $x_1 R x_2$.

Przez L będziemy oznaczali zbiór wszystkich takich formuł, które powstają z tautologii rachunku zdań, bądź rachunku kwantyfikatorów przez podstawienie dowolnych funkcji zdaniowych w miejsce zmiennych zdaniowych, bądź zmiennych predykatywnych.

Do zbioru **L** zaliczać będziemy również wszelkie wyrażenia, których prawdziwość wynika bezpośrednio z własności relacji równości, a więc np. $x_1 = x_1$, $[x = y \wedge \Phi(x)] \Rightarrow \Phi(y)$ itp. W końcu do **L** dołączamy takie zdania, których prawdziwość wynika bezpośrednio z faktu, że dany symbol jest symbolem funkcyjnym, a więc np. zdania

$$z = x \Rightarrow f(z) = f(x) \quad \text{lub} \quad \Phi[f(x), y] \Rightarrow \bigvee_z \Phi(z, y).$$

Taki zbiór L nazywać będziemy *logiką z równością i z funkcjami* lub krócej — *logiką*.

Niech dany teraz będzie pewien język **J** i niech $\mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ będzie zbiorem jego formuł. Ciąg $\langle \Phi_0, \ldots, \Phi_n \rangle$ będziemy nazywali *dowodem formuły* Ψ w oparciu o zbiór $X \subset \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ jeśli

a) $\Phi_n = \Psi$.

b) Dla każdego $m \leqslant n$, $\Phi_m \in X \cup (\mathbf{L} \cap \mathscr{F}_{\mathbf{J}})$ lub istnieją takie $k, s < m$, że $\Phi_k = (\Phi_s \Rightarrow \Phi_m)$.

Jeśli dla formuły Ψ istnieje dowód w oparciu o zbiór X, to formułę Ψ nazywamy *konsekwencją zbioru* X. Zbiór takich formuł oznaczamy przez $\mathrm{Cn}\, X$.

Systemem formalnym (*teorią*) zbudowanym w języku **J** nazywamy taki zbiór formuł S, że $S = \mathrm{Cn}\, S$.

System S nazywamy *niesprzecznym*, gdy $S \neq \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$.

System S nazywamy *zupełnym*, jeśli dla dowolnego zdania $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$, albo $\Phi \in S$, albo $\sim\Phi \in S$.

Zbiór $X \subset \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ nazywamy *zbiorem aksjomatów* dla systemu S, jeżeli $S = \mathrm{Cn}\, X$.

Z powyższych definicji wynika, że język, w którym zbudowany jest system S jest wyznaczony jednoznacznie przez zbiór formuł tego systemu. Z tego też względu często przy określaniu systemu definicję języka pomijamy.

11.1. Udowodnić, że dla danego języka $\mathbf{J} = \langle T_1, T_2, T_3, \vartheta \rangle$:
a) $\overline{\mathscr{T}}_{\mathbf{J}} = \max(\overline{\overline{T}}_2, \overline{\overline{T}}_3)$, b) $\overline{\overline{\mathscr{F}}}_{\mathbf{J}} = \max(\overline{\overline{\mathscr{T}}}_{\mathbf{J}}, \overline{\overline{T}}_1)$.

Udowodnić, że operacja $\mathrm{Cn}\, X$ określona na zbiorach formuł pewnego ustalonego języka **J** ma następujące własności (zad. 11.2-11.16):

Uwaga. W poniższych zdaniach litery alfabetu łacińskiego oznaczają zbiory zdań, a litery greckie — pojedyncze zdania.

11.2. $X \subset Y \Rightarrow \mathrm{Cn}\, X \subset \mathrm{Cn}\, Y$.

11.3. $X \subset \mathrm{Cn}\, Y \wedge Y \subset \mathrm{Cn}\, Z \Rightarrow X \subset \mathrm{Cn}\, Z$.

11.4. $\mathrm{Cn}\,\mathrm{Cn}\, X = \mathrm{Cn}\, X$.

11.5. $\mathrm{Cn}\, O = \mathbf{L} \cap \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$.

11.6. $\mathrm{Cn}\,\{\Phi, \Psi, \Theta\} = \mathrm{Cn}\,\{\Phi \wedge \Psi, \Theta\} = \mathrm{Cn}\,\{\Phi \wedge \Psi \wedge \Theta\}$.

11.7. $\mathrm{Cn}\,\{\Phi\} \cap \mathrm{Cn}\,\{\Psi\} = \mathrm{Cn}\,\{\Phi \vee \Psi\}$.

11.8. $(\Phi \Rightarrow \Psi) \in \mathrm{Cn}\, X \Leftrightarrow \Psi \in \mathrm{Cn}(X \cup \{\Phi\})$.

11.9. $(\Phi \vee \Psi) \in \mathrm{Cn}\, X \Leftrightarrow \Psi \in \mathrm{Cn}\,[X \cup (\sim \Phi)]$.

11.10. $\mathrm{Cn}\,[\Phi(x)] = \mathrm{Cn}\,[\bigwedge\limits_x \Phi(x)]$.

11.11. $\Psi(x) \in \mathrm{Cn}\, X \Rightarrow \bigvee\limits_x \Psi(x) \in \mathrm{Cn}\, X$.

11.12. $\Psi \in \mathrm{Cn}(X \cup \{\Phi\}) \wedge \Psi \in \mathrm{Cn}(X \cup \{\Theta\}) \Rightarrow \Psi \in \mathrm{Cn}(X \cup \{\Phi \vee \Theta\})$.

11.13. $\mathrm{Cn}(X \cup Y) = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}\, X \cup \mathrm{Cn}\, Y) = \mathrm{Cn}(X \cup \mathrm{Cn}\, Y)$.

11.14. $\mathrm{Cn}\, X = \bigcup\limits_{Y \in \mathrm{Fin}} \mathrm{Cn}\, Y$, gdzie $\mathrm{Fin} = \{Y \subseteq X : \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$.

11.15. $\mathrm{Cn}(X - \mathbf{L}) = \mathrm{Cn}\, X$.

11.16. $\Phi \vee \Psi \in \mathrm{Cn}\, X \wedge \Theta \in \mathrm{Cn}(Y \cup \{\Phi\}) \Rightarrow \Psi \vee \Theta \in \mathrm{Cn}(X \cup Y)$.

11.17. Dowieść, że dla dowolnego X zbiór $\mathrm{Cn}\, X$ jest systemem (teorią). Czy jest systemem zbiór $\mathscr{F}_{\mathbf{J}}$?

11.18. Czy są teoriami następujące zbiory formuł:

a) $\{\Phi, \Psi\}$, b) O, c) $\mathbf{L} \cap \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$.

11.19. Czy prawdą jest, że jeśli $X \subset \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ jest teorią, to każde Y takie, że $X \subset Y \subset \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$ też jest teorią? A co można powiedzieć o zbiorze $Y \subset X$? Podać odpowiednie przykłady.

11.20. Niech dany będzie język $\mathbf{J} = \langle T_1, T_2, T_3, \vartheta \rangle$ oraz symbole $a_1, a_2 \in T_2$ takie, że $\vartheta(a_1) = \vartheta(a_2) = 0$.
Dowieść, że $\Phi(a_1) \in \mathrm{Cn}\, O \Leftrightarrow \Phi(a_2) \in \mathrm{Cn}\, O$ dla dowolnego $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$.

11.21. Niech S_α $(\alpha < \mu)$ będzie rodziną systemów taką, że $\alpha < \beta \Rightarrow S_\alpha \subset S_\beta$. Dowieść, że $\bigcup\limits_{\alpha < \mu} S_\alpha$ jest też systemem.

11.22. Niech $S_{\mathbf{J}}$ oznacza zbiór systemów (teorii) danego języka $\mathbf{J}$. Dowieść, że

a) $\mathrm{Cn}\, X = \bigcap\limits_{X \subset Y \in S_{\mathbf{J}}} Y$.

b) Jeżeli $O \neq K \subset S_{\mathbf{J}}$, to $\bigcap\limits_{X \in K} X \in S_{\mathbf{J}}$.

11.23. Dowieść, że jeśli $X, Y \in S_{\mathbf{J}}$, to

$$X \cup Y \in S_{\mathbf{J}} \Leftrightarrow (X \cup Y = X) \vee (X \cup Y = Y).$$

11.24. Dowieść, że jeśli $X \in S_J$ oraz $\Phi, \Psi \in X$, to $X \cup \{\Phi \vee \Psi\} = X \cup \{\Phi \wedge \Psi\} = X$ oraz $X = X \cup \{\Theta \Rightarrow \Psi\}$ dla dowolnej formuły Θ.

11.25. Dowieść, że jeśli X jest systemem w języku **J**, to X jest filtrem w algebrze Lindenbauma zdań języka **J**.

Rodzinę zbiorów aksjomatów systemu S będziemy oznaczali przez Ax_S.

Uwaga. Z definicji wynika, że $U \in Ax_S \Leftrightarrow \mathrm{Cn}\, U = S$.

11.26. Dowieść, że jeśli $X \in Ax_S$, to $X - \mathbf{L} \in Ax_S$.

11.27. Dowieść, że jeśli $X \in Ax_S$, to dla dowolnego zbioru $Y \subset S$ mamy $X \cup Y \in Ax_S$.

11.28. Dowieść, że jeśli $X_1 \in Ax_{S_1}$ i $X_2 \in Ax_{S_2}$, to $X_1 \cup X_2 \in Ax_{\mathrm{Cn}(S_1 \cup S_2)}$.

11.29. Co można powiedzieć o systemie S jeśli wiadomo, że $O \in Ax_S$?

11.30. Dowieść, że jeżeli $X_1 \in Ax_S$ i $X_2 \in Ax_S$, to

$$\bigwedge_{\Phi \in \mathscr{F}} (\Phi \in X_1 \Rightarrow \Phi \in \mathrm{Cn}\, X_2) \wedge (\Phi \in X_2 \Rightarrow \Phi \in \mathrm{Cn}\, X_1).$$

11.31. Udowodnić, że jeśli X jest systemem niesprzecznym i $Y \subset X$, to $\mathrm{Cn}\, Y \neq \mathscr{F}$.

11.32. Dowieść, że jeśli $X \in S_J$, $Y \in S_J$ oraz X i Y są niesprzeczne, to $X \cap Y$ jest systemem niesprzecznym.

W dalszym ciągu zamiast pisać $\Phi \in \mathrm{Cn}\, X$ będziemy często pisali $X \vdash \Phi$ lub $\underset{X}{\vdash} \Phi$. W szczególności, jeżeli $X = O$ oznaczenie przyjmie postać $\vdash \Phi$ i oznacza to wówczas, że Φ jest po prostu tezą logiki.

11.33. Dowieść, że jeśli X jest systemem niesprzecznym, to formuły ze zbioru X tworzą filtr właściwy (patrz zad. 11.25) algebry Lindenbauma.

11.34. Dowieść, że jeśli istnieje skończony zbiór Y taki, że $Y \in Ax_X$, to formuły zbioru X tworzą filtr główny.

11.35. Dowieść, że jeśli X jest zbiorem aksjomatów sprzecznego systemu, to istnieje skończony zbiór $Y \subset X$ taki, że $\mathrm{Cn}\, Y$ jest systemem sprzecznym.

11.36. Pokazać, że jeśli X jest zbiorem aksjomatów systemu zupełnego i $\Phi \notin \mathrm{Cn}\, X$, to system o aksjomatach $X \cup \{\Phi\}$ jest sprzeczny.

Niech dany będzie język $\mathbf{J} = \langle T_1, T_2, T_3, \mathfrak{A} \rangle$ i niech $S \in S_J$. Będziemy mówili, że formuła $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ jest możliwą w S definicją symbolu funkcyjnego zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ jeżeli:

a) $\vdash_S \bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_n} \bigvee_{x_0} \Phi(x_0, \ldots, x_n)$,

b) $\vdash_S \bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_n} \bigwedge_{x_0} \bigwedge_{x'_0} [\Phi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \Phi(x'_0, \ldots, x_n) \Rightarrow x_0 = x'_0]$.

Niech $\mathscr{F}^n_J$ oznacza zbiór formuł języka **J** o n zmiennych. Jeśli $\Phi \in \mathscr{F}^1_J$ (tj. Φ jest formułą jednej zmiennej) i Φ spełnia warunek **a** i **b**, to mówimy, że Φ jest *możliwą definicją stałej* (tj. funkcji zera zmiennych).

11.37. Rozważmy system S', który powstaje z S przez dołączenie nowego symbolu funkcyjnego f i nowego aksjomatu

$$\Phi' = \bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_n} \Phi[f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n],$$

gdzie $\Phi \in \mathscr{F}^{n+1}_J$ i Φ jest możliwą w S definicją symbolu funkcyjnego.

Tak więc system S' zbudowany jest w języku

$$\langle T_1, T_2 \cup \{f\}, T_3, \vartheta\rangle, \quad \text{gdzie} \quad \vartheta = \vartheta' | T_1 \cup T_2, \quad \vartheta' f = n.$$

Dowieść, że $S = S' \cap \mathscr{F}_1$.

11.38. Dla systemu S możemy utworzyć system S' przez dodanie nowego symbolu predykatywnego R i nowego aksjomatu

$$\Phi' = [\bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_n} R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \Phi(x_1, \ldots, x_n)],$$

gdzie $\Phi \in \mathscr{F}^n_J$. Nowo utworzony system S' zbudowany jest w języku

$$\langle T_1 \cup \{R\}, T_2, T_3, \vartheta'\rangle, \quad \text{gdzie} \quad \vartheta = \vartheta' | T_1 \cup T_2, \quad \vartheta' R = n.$$

Dowieść, że $S = S' \cap \mathscr{F}_J$.

Uwaga. Systemy, które powstają na drodze dokonania pewnej ilości kolejnych rozszerzeń opisanych w zadaniach 11.37 i 11.38 nazywamy *nieistotnymi rozszerzeniami systemu S*.

11.39. Dowieść, że jeżeli S' jest nieistotnym rozszerzeniem S, to S zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy S' zupełny.

11.40. Niech $S_1 \leqslant S_2$ oznacza, że system S_2 jest nieistotnym rozszerzeniem systemu S_1. Czy relacja $\leqslant$ jest częściowym porządkiem?

11.41. Dowieść, że jeśli S_α $(\alpha < \mu)$ jest rodziną systemów taką, że $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow S_{\alpha_1} \leqslant S_{\alpha_2}$, to $\bigcup_{\alpha<\mu} S_\alpha$ jest systemem i dla każdego $\beta < \mu$ mamy $S_\beta \leqslant \bigcup_{\alpha<\mu} S_\alpha$.

11.42. Dowieść, że jeżeli $S_0 \leqslant S_1$ i $S_0 \leqslant S_2$, to istnieje S_3 takie, że $S_1 \leqslant S_3$ i $S_2 \leqslant S_3$.

11.43. Czy relacja $\leqslant$ ma elementy minimalne i maksymalne? Czy ma element najmniejszy?

11.44. Niech dany będzie system S zbudowany w języku **J** i jego nieistotne rozszerzenie — system S'. Dowieść, że $S = S' \cap \mathscr{F}_{\mathbf{J}}$.

Rozważmy pewną ilość formuł zapisanych w języku $\mathbf{J} = \langle\{\leqslant\}, O, \{x_1, \ldots\}, \vartheta\rangle$, gdzie $\vartheta(\leqslant) = 2$, a mianowicie:

a) $\bigwedge_{x_1} x_1 \leqslant x_1$,

b) $\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2}\bigwedge_{x_3} [(x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_2 \leqslant x_3) \Rightarrow (x_1 \leqslant x_3)]$,

c) $\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} [(x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_2 \leqslant x_1) \Rightarrow x_1 = x_2]$,

d) $\bigvee_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 \leqslant x_2$,

e) $\bigvee_{x_1} [\sim \bigvee_{x_2} (x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_1 \neq x_2)]$,

f) $\sim \bigvee_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_2 \leqslant x_1$,

g) $\bigwedge_{x_1}\bigvee_{x_2}\bigwedge_{x_3} [(x_1 \leqslant x_3 \wedge x_3 \leqslant x_2) \Rightarrow ((x_1 = x_3) \vee (x_3 = x_2))]$,

h) $\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_2} [x_1 \leqslant x_2) \vee (x_2 \leqslant x_1)]$,

i) $\bigvee_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_2 \leqslant x_1$,

j) $\sim \bigvee_{x_1}\bigwedge_{x_2} x_1 \leqslant x_2$,

k) $\bigwedge_{x_1}\bigwedge_{x_1} [x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \bigvee_{x_3} (x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \leqslant x_3) \wedge (x_3 \neq x_2 \wedge x_3 \leqslant x_2)]$.

11.45. Niech S będzie systemem zbudowanym w języku **J** o aksjomatach a, b, c, d. Dowieść, że formuła $\bigwedge_{x_2} x_1 \leqslant x_2$ jest możliwą definicją stałej w S.

Czy jest możliwą w tym systemie definicją formuła $\bigvee_{x_2} x_1 \leqslant x_2$?

11.46. Niech S będzie systemem takim jak w zadaniu 11.45 z dodatkowymi aksjomatami f i g. Dowieść, że formuła

$$\bigwedge_{x_3} (x_2 \leqslant x_3) \wedge (x_3 \leqslant x_1) \Rightarrow (x_2 = x_3) \vee (x_3 = x_1)$$

jest możliwą w S definicją symbolu funkcyjnego zmiennej x_2.

11.47. Dowieść, że w systemie z zadania 11.45 można zdefiniować tylko jedną stałą.

11.48. Dowieść, że system o aksjomatach a, b, c, d, f, h, k jest zupełny.

11.49. Dowieść, że system o aksjomatach a, b, c, f, j, h, k jest zupełny.

11.50. Dowieść, że system o aksjomatach a, b, c, d, h, i, k jest zupełny.

11.51. Dowieść, że system o aksjomatach a, b, c, f, h, j, k jest zupełny.

11.52. Dowieść, że w systemie z zadania 11.48 można zdefiniować tylko jedną stałą.

11.53. Dowieść, że w systemie z zadania 11.51 nie można zdefiniować żadnej stałej.

11.54. Dowieść, że w systemie z zadania 11.50 można zdefiniować tylko dwie stałe.

Niech dane będą dwa systemy S_1 i S_2 zbudowane odpowiednio w językach $\mathbf{J}^1$ i $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^1 = \langle T_1^1, T_2^1, T_3^1, \vartheta^1\rangle$, $\mathbf{J}^2 = \langle T_1^2, T_2^2, T_3^2, \vartheta^2\rangle$. Załóżmy ponadto, że $T_3^1 = T_3^2$.

Rozważmy teraz funkcję $\varphi_1 \in {}^{T_1^2}T_1^1$ oraz $\varphi_2 \in {}^{T_2^2}T_2^1$ takie, że $\varphi_i\, \vartheta^2[\varphi_i(x)] = \varphi_i[\vartheta^1(x)]$, gdzie $x \in T_i^1$ dla $i = 1, 2$. Mając dane takie funkcje możemy skonstruować funkcję $\varphi_2' \in {}^{\mathscr{T}_{\mathbf{J}^2}}\mathscr{T}_{\mathbf{J}_1}$ jak następuje:

a) Jeśli $F \in T_2^1$, $\vartheta^1(F) = n$, to $\varphi_2' F(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_2 F)(x_1, \ldots, x_n)$.

b) Jeśli $F \in T_2^1$, $\vartheta^1(F) = n$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}_{\mathbf{J}^1}$, to $\varphi_2' F(t_1, \ldots, t_n) = (\varphi_2 F)(\varphi_2' t_1, \ldots, \varphi_2' t_n)$. Obierając teraz formułę $\Theta(x) \in \mathscr{F}_{\mathbf{J}^2}$ o jednej zmiennej wolnej x możemy skonstruować funkcję φ_1' w sposób następujący:

a) Jeśli $R \in T_1^1$, $\vartheta^1(R) = n$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}_{\mathbf{J}^1}$, to $\varphi_1'[R(t_1, \ldots, t_n)] = (\varphi_1 R)(\varphi_2' t_1, \ldots, \varphi_2' t_n)$.

b) Jeśli $t_1, t_2 \in T_1^1$, to $\varphi'(t_1 = t_2) = (\varphi' t_1 = \varphi' t_2)$.

c) Jeśli $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}_{\mathbf{J}^1}$, to $\varphi_1'(\Phi \vee \Psi) = (\varphi_1'\Phi) \vee (\varphi_1'\Psi)$,

$$\varphi_1'(\Phi \wedge \Psi) = (\varphi_1'\Phi) \wedge (\varphi_1'\Psi), \qquad \varphi_1'(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\varphi_1'\Phi \Rightarrow \varphi_1'\Psi),$$

$$\varphi_1'(\sim\Phi) = \sim\varphi_1'\Phi, \quad \varphi_1' = \big(\bigwedge_x \Phi(x)\big) = \bigwedge_{\Theta(x)} \varphi_1'\Phi(x), \quad \varphi_1' = \big(\bigvee_x \Phi(x)\big) = \bigvee_{\Theta(x)} \varphi_1'\Phi(x).$$

Tak skonstruowaną funkcję φ_1' nazywamy *interpretacją języka* $\mathbf{J}^1$ w języku $\mathbf{J}^2$. Interpretacja jest więc wyznaczona przez podanie funkcji φ_1, φ_2 i formuły $\Theta(x)$. O systemie $X_1 \in S_{\mathbf{J}^1}$ mówimy, że jest *interpretowalny* w systemie X_2, jeśli istnieje takie nieistotne rozszerzenie X_2' oraz taka interpretacja φ języka $\mathbf{J}^1$ w języku $\mathbf{J}^2$ systemu X_2', że dla dowolnego Φ mamy

$$\Phi \in X_1 \Rightarrow \varphi\Phi \in X_2'.$$

Będziemy to zapisywać $X_1 \operatorname{Int} X_2$.

11.55. Udowodnić, że relacja Int jest zwrotna i przechodnia. Czy relacja Int jest słabo asymetryczna? Czy relacja Int jest symetryczna?

11.56. Niech $\{X_i : i \in I\}$ rodzina systemów zbudowanych w językach $\mathbf{J}^i = \langle T_1^i, T_2^i, T_3^i, \vartheta^i \rangle$ takich, że $T_3^i = T_3^j$ dla dowolnych $i, j \in I$, $\bigcap_{i \in I} T_1^i \neq O$. Określamy relację

$$X_i \sim X_j \Leftrightarrow X_i \operatorname{Int} X_j \wedge X_j \operatorname{Int} X_i.$$

Dowieść, że relacja $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Dowieść, że relacja $\operatorname{Int}/_{\sim}$ jest relacją częściowego porządku. Czy relacja $\operatorname{Int}/_{\sim}$ ma elementy minimalne? Czy ma ona element najmniejszy?

11.57. Niech $S_1 \in S_{\mathbf{J}^1}$, $S_2 \in S_{\mathbf{J}^2}$. Dowieść, że $S_1 \operatorname{Int} S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka interpretacja φ języka $\mathbf{J}^1$ w $\mathbf{J}^2$ oraz taki zbiór formuł $X \in Ax_{S_1}$, że $\varphi X \subset S_2$.

11.58. Udowodnić, że jeśli $X_1 \operatorname{Int} X_2$ i X_2 jest systemem niesprzecznym, to X_1 też jest niesprzeczny.

11.59. Niech S_1 będzie systemem o następujących aksjomatach:

a$_1$) $\bigwedge_{x_1} x_1 \leqslant x_1$,

b$_1$) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} (x_1 \leqslant x_2 \wedge x_2 \leqslant x_1 \Rightarrow x_2 = x_1)$,

c$_1$) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} \bigwedge_{x_2} [(x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_2 \leqslant x_3) \Rightarrow (x_1 \leqslant x_3)]$,

d$_1$) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} [(x_1 \leqslant x_2) \vee (x_2 \leqslant x_1)]$,

a S_2 — systemem o aksjomatach:

a$_2$) $\bigwedge_{x_1} \sim x_1 R x_1$,

b) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} \bigwedge_{x_3} (x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3)$,

c$_2$) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} (x_1 R x_2 \vee x_2 R x_1 \vee x_1 = x_2)$.

Dowieść, że $S_1 \operatorname{Int} S_2$ i $S_2 \operatorname{Int} S_1$.

11.60. Niech S_1 będzie systemem o następującym zbiorze aksjomatów:

a) $\bigvee_{x_1} \bigwedge_{x_2} x_1 \leqslant x_2$,

b) $\bigwedge_{x_1} x_1 \leqslant x_1$,

c) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} \bigwedge_{x_3} [(x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_2 \leqslant x_3) \Rightarrow (x_1 \leqslant x_3)]$,

d) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} [(x_1 \leqslant x_2) \wedge (x_2 \leqslant x_1) \Rightarrow (x_1 = x_2)]$,

e) $\bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} [(x_1 \leqslant x_2) \vee (x_2 \leqslant x_1)]$,

f) $\bigwedge_{x_1} \bigvee_{x_2} \bigwedge_{x_3} (x_1 \neq x_2) \wedge [(x_1 \leqslant x_3 \wedge x_3 \leqslant x_2) \Rightarrow (x_1 = x_3) \vee (x_3 = x_2)]$,

g) $\bigwedge_{x_1} [\bigvee_{x_2} x_2 \neq x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1 \Rightarrow \bigvee_{x_2} \bigwedge_{x_3} ((x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \leqslant x_3 \wedge x_3 \leqslant x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1 = x_3) \vee (x_3 = x_2))]$,

h) $\sim \bigvee_{x_1} \bigwedge_{x_2} x_2 \leqslant x_1$.

Dowieść, że S_1 jest systemem zupełnym.

11.61. Niech S_2 będzie systemem o aksjomatach b-h z zadania 11.60 i dodatkowo:

i) $\sim \bigvee_{x_1} \bigwedge_{x_2} x_1 \leqslant x_2$,

j) $\bigwedge_{x_1} x_1 \leqslant 0 \vee 0 \leqslant x_1$.

Dowieść, że S_2 jest zupełny.

11.63. Dowieść, że S_1 Int S_2.

Teorią mnogości Zermelo-Fraenkla nazywamy system (oznaczany w skrócie przez ZF) o jednym dwuargumentowym symbolu predykatywnym $\in$ i następujących aksjomatach:

a) Ekstensjonalności

$$\bigwedge_y \bigwedge_z [(\bigwedge_x x \in y \Leftrightarrow x \in z) \Rightarrow y = z].$$

b) Zbioru pustego

$$\bigvee_y \bigwedge_x x \notin y.$$

Z aksjomatu ekstensjonalności wynika, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

c) Sumy

$$\bigwedge_x \bigvee_u \bigwedge_w [w \in u \Leftrightarrow \bigvee_z (z \in x \wedge w \in z)].$$

d) Nieskończoności

$$\bigvee_x x \neq O \wedge \bigwedge_y (y \in x \Rightarrow \bigvee_z (z \in x \wedge y \neq z \wedge y \subset z)),$$

gdzie $y \subset z$ oznacza formułę $\bigwedge_u (u \in y \Rightarrow u \in z)$.

e) Wyboru

$$\bigwedge_x [x \neq O \wedge \sim O \in x \wedge \bigwedge_{y_1} \bigwedge_{y_2} [y_1 \in x \wedge y_2 \in x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bigvee_z (z \in y_1 \wedge z \in y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2)] \Rightarrow \bigvee_w (\bigwedge_z z \in x \Rightarrow \dot{\bigvee_y} y \in z \wedge y \in w)],$$

gdzie $\dot{\bigvee_y} \Phi(y)$ jest skrótem zapisu $\bigvee_y [\Phi(y) \wedge \bigwedge_z (\Phi(z) \Rightarrow z = y)]$.

f) Zbioru potęgowego

$$\bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z (z \in y \Leftrightarrow z \subset x),$$

g) Zastępowania

Jeśli Φ jest formułą, to formuła

$$\bigwedge_x \dot{\bigvee_y} \Phi(x, y, \ldots) \Rightarrow \bigwedge_u \bigvee_w \bigwedge_z [z \in w \Leftrightarrow \bigvee_x x \in u \wedge \Phi(x, z, \ldots)]$$

jest aksjomatem.

Tak więc aksjomatyka ZF składa się z nieskończenie wielu zdań.

Przez ZF' oznaczamy system powstający z ZF przez odrzucenie aksjomatu d.

Arytmetyką Peano nazywamy system oznaczany przez Ar o dwu dwuargumentowych symbolach funkcyjnych $+$ i $\cdot$, jednym symbolu funkcyjnym jednoargumentowym S, oraz jednej stałej 0 (zeroargumentowym symbolu funkcyjnym) i o następujących aksjomatach:

h) $\sim \bigvee_x S(x) = 0$,

i) $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$,

j) $x+0 = x$,

k) $x+S(y) = S(x+y)$,

l) $x \cdot 0 = 0$,

ł) $x \cdot S(y) = x+(x \cdot y)$,

m) dla każdej formuły Φ przyjmujemy następujący aksjomat:

$$\Phi(0) \wedge \bigwedge_x \{\Phi(x) \Rightarrow \Phi[S(x)]\} \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x).$$

11.64. Dowieść, że S_1 Int Ar, gdzie S_1 jest systemem z zadania 11.59.

11.65. Przyjmując, że do Ar należą wszystkie znane twierdzenia arytmetyki, które dadzą się wysłowić w języku Ar dowieść, że ZF' Int Ar.

11.66. Przyjmując, że do ZF należą wszystkie poznane dotąd twierdzenia teorii mnogości, które można sformułować w języku ZF dowieść, że Ar Int ZF.

Rozdział XII

TEORIA MODELI

Systemem relacyjnym nazywamy parę $\mathfrak{a} = \langle A, \mathfrak{o} \rangle$, gdzie $\mathfrak{o}$ jest funkcją określoną na sumie rozłącznych zbiorów T_1 i T_2 (zakładamy przy tym, że $T_1 \cup T_2 \neq O$). Funkcja $\mathfrak{o}$ przyporządkowuje każdemu elementowi t_i zbioru T_1 relację n_{t_i}-argumentową, określoną w zbiorze A (a więc podzbiór zbioru $A^{n_{t_i}}$), zaś każdemu elementowi s_j zbioru T_2 funkcję m_{s_j}-argumentową, to znaczy element zbioru ${}^{A^{m_{s_j}}}A$. W szczególności jeśli $m_{s_j} = 0$, to funkcja mu przyporządkowana jest stałą.

Może też się zdarzyć, że zbiór T_1 lub T_2 jest pusty. W pierwszym z tych przypadków system nazywamy *algebrą*.

System relacyjny $\mathfrak{a}$ wyznacza nam (porównaj rozdział XI) język $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$ mianowicie taki, w którym dla każdej relacji R_t mamy symbol relacyjny P_t (opowiednio n_t-argumentowy), zaś dla funkcji f_s symbol funkcyjny φ_s (odpowiednio m_s-argumentowy).

Prócz opisanych symboli język $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$ ma przeliczalną ilość zmiennych v_i $(i \in \mathcal{N})$ oraz zwykłe spójniki logiczne (a także symbol $=$ oznaczający identyczność).

Odwrotnie, jeśli dany jest język $\mathbf{J}$ z symbolami relacyjnymi P_t (odpowiednio n_t-argumentowymi) i symbolami funkcyjnymi φ_s (odpowiednio m_s-argumentowymi), to rozważać będziemy systemy relacyjne $\mathfrak{a} = \langle A, \ldots, R_t, \ldots, \ldots, f_s, \ldots \rangle$, gdzie $R_t \subset A^{n_t}$ i $f_s \colon A^{m_s} \to A$ i zakładać będziemy, że symbolem P_t i φ_s przyporządkowane są relacje R_t i funkcje f_s.

Mając w ten sposób ustalone przyporządkowanie symbolem odpowiednich relacji i funkcji w systemie $\mathfrak{a}$, wprowadzamy relację $\models$:

$$\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}], \quad \text{gdzie} \quad \underline{X} \in {}^{\mathcal{N}}A.$$

(Czytamy: ciąg $\underline{X}$ spełnia w systemie $\mathfrak{a}$ formułę Φ).

Uprzednio indukcyjnie definiujemy wartość $t^\mathfrak{a}[\underline{X}]$ termu t języka $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$ w systemie $\mathfrak{a}$ następująco:

a) $v_i[\underline{X}] = x_i$,

b) $(\varphi_s[t_1, \ldots, t_n])^\mathfrak{a}[\underline{X}] = f_s(t_1^\mathfrak{a}[\underline{X}], \ldots, t_n^\mathfrak{a}[\underline{X}])$.

Relację $\models$ definiujemy (dla ustalonego systemu $\mathfrak{a}$) przez indukcję ze względu na stopień komplikacji formuły Φ:

dla formuł atomowych:

$$\mathfrak{a} \models P_i(t_1, \ldots, t_n)\,[\underline{X}] \equiv R_i(t_1^{\mathfrak{a}}[\underline{X}], \ldots, t_n^{\mathfrak{a}}[\underline{X}]),$$
$$\mathfrak{a} \models t_1 = t_2[\underline{X}] \equiv t_1^{\mathfrak{a}}[\underline{X}] = t_2^{\mathfrak{a}}[\underline{X}];$$

dla formuł utworzonych za pomocą spójników zdaniowych:

$$\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \equiv \text{non}\ \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}],$$
$$\mathfrak{a} \models \Phi \wedge \Psi[\underline{X}] \equiv (\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}]\ \text{i}\ \mathfrak{a} \models \Psi[\underline{X}]);$$

dla formuł utworzonych przez dołączenie kwantyfikatora egzystencjalnego:

$$\mathfrak{a} \models \bigvee_{v_i} \Phi[\underline{X}] \equiv \text{istnieje } a \text{ takie, że } \mathfrak{a} \models \Phi\left[\underline{X}\binom{i}{a}\right],$$

gdzie $\underline{X}\binom{i}{a}$ oznacza ciąg powstały z $\underline{X}$ przez zastąpienie w nim x_i przez a.

12.1. Autorzy ułatwili sobie zadanie skracając definicję spełniania, podając ją wyłącznie dla spójników $\sim$, $\wedge$ i kwantyfikatora egzystencjalnego $\bigvee_{x_i}$. Dlaczego mogli tak uczynić?

12.2. Korzystając z tautologii $p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$ rozszerzyć definicję spełniania na wyrażenia zawierające także spójnik $\vee$.

12.3. Dlaczego autorzy piszą $\equiv$, „non", „i" zamiast $\Leftrightarrow$, $\sim$, $\wedge$?

12.4. Rozszerzyć definicję spełniania na wyrażenia zawierające spójniki: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i kwantyfikator ogólny $\bigwedge_{x_i}$. Z jakich tautologii należy skorzystać?

12.5. Rozważmy system relacyjny $\mathfrak{a} = \langle \mathcal{N}, +, \cdot, 0\rangle$ oraz formułę Φ języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ taką, że $\Phi = \bigvee_{v_3} (v_1 \cdot v_3 = v_2)$.

a) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ określony wzorem $x_n = n+2$ spełnia formułę Φ?

b) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ określony wzorem $x_n = n$ spełnia formułę Φ?

12.6. Rozważmy formułę Φ języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ (por. zadanie 12.5)

$$\Phi = \bigvee_{v_4} \bigvee_{v_3} v_4 \cdot v_3 = v_4 + v_1;$$

a) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ określony wzorem $x_n = 1$ spełnia formułę Φ?

b) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ określony wzorem $x_0 = 0$, $x_n = n-1$ (dla $n \geq 1$) spełnia formułę Φ?

12.7. W języku $\mathbf{J}_\alpha$ dane są formuły:

$$\Phi_1 = \bigwedge_{v_1} \sim [v_1+v_2 = v_3], \quad [\Phi_2 = \bigvee_{v_2} [v_1+v_2 = v_3 \cdot v_2]:$$

a) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, $x_n = n+4$ spełnia $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$.
b) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, $x_n = n^2+3$ spełnia $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2$.
c) Czy ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, $x_n = 2$ spełnia $\Phi_1, \Phi_2, \bigvee_{v_1} (\Phi_1 \wedge \Phi_2)$.

12.8. Udowodnić, że jeżeli zmienne wolne w formule Φ mają numery $i_0, \ldots, i_n$, zaś $x_{i_0} = y_{i_0}, \ldots, x_{i_n} = y_{i_n}$, to

$$\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \equiv \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{Y}].$$

12.9. Korzystając z wyniku zadania 8 udowodnić, że jeśli formuła Φ jest zdaniem, tzn. nie zawiera zmiennych wolnych, $\mathfrak{a} = \langle A, R_i, \ldots, f_j, \ldots\rangle$, $A \neq O$ i $\underline{X}, \underline{Y} \in {}^{\mathcal{N}}A$, to

$$\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \equiv \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{Y}].$$

12.10. Udowodnić, że przy założeniach zadania 12.9 mamy

$$\bigwedge_{\underline{X}\in {}^{\mathcal{N}}A} \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \equiv \bigvee_{\underline{X}\in {}^{\mathcal{N}}A} \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}].$$

Powiemy, że formuła Φ jest *prawdziwa* w systemie $\mathfrak{a}$ (przy ustalonej interpretacji symboli relacyjnych i funkcyjnych) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\underline{X} \in {}^{\mathcal{N}}A$ mamy $\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}]$. Zapisujemy to następująco: $\mathfrak{a} \models \Phi$.

12.11. Udowodnić, że jeśli Φ jest zdaniem, $A \neq O$, to

$$\mathfrak{a} \models \Phi \equiv \bigvee_{\underline{X}\in {}^{\mathcal{N}}A} \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}].$$

12.12. Niech zmienne wolne formuły Φ mają numery $i_0, \ldots, i_n$, wtedy mamy

$$\mathfrak{a} \models \Phi \equiv \mathfrak{a} \models \bigwedge_{v_{i_0}} \bigwedge_{v_{i_1}} \ldots \bigwedge_{v_{i_n}} \Phi.$$

12.13. Udowodnić, że $\mathfrak{a} \models \bigwedge_{v_0} \bigvee_{v_1} \Phi(v_0, v_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f: A \to A$ taka, że

$$\mathfrak{a} \models \Phi(v_1, v_2)\,[x_0, f(x_0), \ldots].$$

12.14. Udowodnić, że dla każdej formuły Φ i każdego ciągu $\underline{X} \in {}^{\mathcal{N}}A$

$$\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \quad \text{lub} \quad \mathfrak{a} \models \sim\Phi[\underline{X}].$$

12.15. Niech $\mathfrak{a}$ będzie systemem relacyjnym, zaś $\mathfrak{a}^*$ zbiorem tych zdań języka $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$, że $\mathfrak{a} \models \Phi$. Udowodnić, że $\mathfrak{a}^*$ jest niesprzecznym i zupełnym zbiorem zdań.

12.16. Znaleźć algebry $\mathfrak{a} = \langle A, +, 0\rangle$ i $\mathfrak{b} = \langle B, +', 0'\rangle$ takie, że

$$\mathfrak{a} \models \bigvee_x (x+x = 0) \wedge \bigvee_{x,y} (x \neq y) \wedge \bigwedge_{x,y} (x+y = y+x) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{x,y,z} [x+(y+z) = (x+y)+z]$$

oraz

$$\mathfrak{b} \models \bigwedge_x (x+x \neq 0) \wedge \bigvee_{x,y} (x \neq y) \wedge \bigwedge_{x,y} (x+y = y+x) \wedge \\ \wedge \bigwedge_{x,y,z} [x+(y+z) = (x+y)+z].$$

12.17. Udowodnić, że jeżeli $\Phi \in \operatorname{Cn} S$ i $\bigwedge_\Psi [\Psi \in S \Rightarrow \mathfrak{a} \models \Psi]$, to $\mathfrak{a} \models \Phi$.

12.18. Korzystając z wyniku zadań 12.16 i 12.17 udowodnić, że zdanie $\bigwedge_x (x+x = 0)$ ani jego negacja nie mogą być wyprowadzone ze zbioru zdań

$$\bigvee_{x,y} (x \neq y), \quad \bigwedge_{x,y} (x+y = y+x), \quad \bigvee_{x,y,z} [x+(y+z) = (x+y)+z].$$

Zdanie Φ nazywamy *niesprzecznym* ze zbiorem zdań S, jeżeli istnieje system relacyjny $\mathfrak{a}$ taki, że $S \cup \{\Phi\} \subset \mathfrak{a}^*$ (por. zadanie 12.15).

Zdanie nazywamy *niezależnym* od zbioru zdań S, jeśli zarówno Φ jak i $\sim\Phi$ są niesprzeczne ze zbiorem S.

12.19. Uzasadnić następującą metodę dowodu niezależności: Jeśli istnieją dwa systemy relacyjne $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ takie, że $S \subset \mathfrak{a}^*$ i $S \subset \mathfrak{b}^*$ oraz $\mathfrak{a} \models \Phi$ i $\mathfrak{b} \models \sim\Phi$, to zdanie Φ jest niezależne od zbioru zdań S.

12.20. Udowodnić, że zdanie

$$A_3 = \bigvee_{v_0,v_1,v_2} \bigwedge_{v_3} \{[(v_3 = v_0) \vee (v_3 = v_1) \vee (v_3 = v_2)] \wedge \\ \wedge (v_0 \neq v_1) \wedge (v_1 \neq v_2) \wedge (v_0 \neq v_2)\}$$

jest niezależne od aksjomatyki ciał.

12.21. Zbadać, czy zdanie

$$A_6 = \bigvee_{v_0,v_1,\ldots,v_5} \bigwedge_{v_6} \{[(v_6 = v_0) \vee \ldots \vee (v_6 = v_5)] \wedge \\ \wedge (v_0 \neq v_1) \wedge \ldots \wedge (v_0 \neq v_5) \wedge (v_1 \neq v_2) \wedge \ldots \wedge (v_4 \neq v_5)\}$$

jest niezależne od aksjomatyki ciał.

12.22. Zbadać, czy zdanie

$$A_4 = \bigvee_{v_0, v_1, v_2, v_3} \bigwedge_{v_4} [(v_4 = v_0) \vee \ldots \vee (v_4 = v_3)]$$

jest niezależne od aksjomatyki ciał.

12.23. Udowodnić, że zdanie

$$\bigwedge_{v_0, v_1} (v_0 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_0) \quad \text{(przemienność działania)}$$

jest niezależne od aksjomatyki grup.

12.24. Udowodnić, że zdanie

$$\bigwedge_{v_0, v_1} \{(v_0 \neq v_1 \wedge v_0 \leqslant v_1) \Rightarrow \bigvee_{v_2} [(v_2 \neq v_0 \wedge v_2 \neq v_1 \wedge v_0 \leqslant v_2 \wedge v_2 \leqslant v_1)]\}$$

jest niezależne od aksjomatyki porządku liniowego.

12.25. Zbadać, czy zdanie stwierdzające istnienie elementu najmniejszego jest zależne od aksjomatyki porządku częściowego.

System relacyjny $\mathfrak{b} = \langle B, S_i, \ldots, g_j, \ldots \rangle$ nazywamy *podsystemem* systemu $\mathfrak{a} = \langle A, R_i, \ldots, f_j, \ldots \rangle$, jeśli $R_i \cap B^{n} = S_i$, $g_j = f_j \upharpoonright B$ (a więc w szczególności funkcje f_s muszą dla argumentów z B przyjmować wartości z B, zaś wszystkie stałe należą do B). W takiej sytuacji piszemy $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ i jednocześnie mówimy, że $\mathfrak{a}$ jest *rozszerzeniem* systemu $\mathfrak{b}$.

12.26. W zadaniu tym rozważamy wyłącznie formuły znajdujące się w kwantyfikatorowej postaci normalnej (por. zadanie 3.197 i 3.198).

Formułę Φ nazywamy *otwartą*, jeśli nie zawiera kwantyfikatorów, *uniwersalną* — jeśli wszystkie kwantyfikatory w niej występujące są ogólne, *egzystencjalną* — jeśli wszystkie kwantyfikatory w niej występujące są szczegółowe.

a) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, formuła Φ jest otwarta lub uniwersalna i $\mathfrak{a} \models \Phi$, to $\mathfrak{b} \models \Phi$.

b) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, formuła Φ jest egzystencjalna i $\mathfrak{b} \models \Phi$, to $\mathfrak{a} \models \Phi$.

12.27. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a}$ jest pierścieniem i $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ jest także pierścieniem.

12.28. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a}$ jest grupą i $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b}$ także jest grupą.

12.29. Dowieść, że jeśli formuła Φ jest równoważna formule otwartej lub uniwersalnej, to także ma własność opisaną w zadaniu 12.26 a. Udowodnić, że zdanie A_4 (por. zadanie 12.22) nie jest równoważne zdaniu uniwersalnemu.

Systemy $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nazywamy *elementarnie równoważnymi*, co zapisujemy $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, jeśli $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$ (por. zadanie 12.15), czyli dla każdego zdania Φ mamy $\mathfrak{a} \models \Phi \equiv \mathfrak{b} \models \Phi$ (w szczególności $\mathbf{J}_\mathfrak{a} = \mathbf{J}_\mathfrak{b}$).

12.30. Udowodnić, że relacja $\equiv$ jest relacją równoważności, tj.:

a) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$,

b) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}$,

c) $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c}$.

12.31. Udowodnić, że system $\langle \mathscr{W}, \leqslant \rangle$ jest elementarnie równoważny systemowi $\langle \mathscr{R}, \leqslant \rangle$, gdzie $\mathscr{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych.

12.32. Udowodnić, że jeśli relacja R porządkuje liniowo zbiór T w typ $\omega + (\omega^* + \omega)$, to $\langle \mathscr{N}, \leqslant \rangle \equiv \langle T, R \rangle$.

Podsystem $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ nazywamy *elementarnym podsystemem systemu* $\mathfrak{a}$, co zapisujemy $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{a}$, jeśli

$$\bigwedge_{\underline{X} \in {}^{\mathscr{N}}A} \bigwedge_{\Phi} (\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}] \equiv \mathfrak{b} \models \Phi[\underline{X}]).$$

Mówimy wtedy też, że $\mathfrak{a}$ jest *elementarnym rozszerzeniem systemu* $\mathfrak{b}$.

12.33. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a} \neq O$, to $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

12.34. Znaleźć $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ takie, że $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, ale non $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$.

12.35. Udowodnić, że relacja $\prec$ jest relacją częściowego porządku, tj:

a) $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{a}$,

b) $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b} \prec \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

c) $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{b} \prec \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} \prec \mathfrak{c}$.

12.36. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$ i $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{c}$ oraz $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{c}$, to $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$.

12.37. Dla danego ciągu $\underline{X} \in {}^{\mathscr{N}}B$ oznaczmy przez $\underline{X}\binom{k}{t}$ ciąg powstały z $\underline{X}$ przez zastąpienie wyrazu x_k przez t.

Udowodnić następujące kryterium Tarskiego:

Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Wtedy $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b} \Leftrightarrow$ dla każdej formuły Φ i każdego ciągu $\underline{X} \in {}^{\mathscr{N}}A$ jeśli $\mathfrak{b} \models \bigvee_{x_k} \Phi[\underline{X}]$, to istnieje $a \in A$ takie, że $\mathfrak{b} \models \Phi\left[\underline{X}\binom{k}{a}\right]$.

12.38. Niech $\{\mathfrak{a}_\xi\}_{\xi<\alpha}$ będzie rodziną systemów relacyjnych spełniających warunek $\eta \leqslant \xi \Rightarrow \mathfrak{a}_\eta \prec \mathfrak{a}_\xi$. Niech $\mathfrak{b}$ będzie sumą rodziny $\{\mathfrak{a}_\xi\}_{\xi<\alpha}$ (w szczególności $B = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$, $S_i = \bigcup_{\xi<\alpha} R_i^\xi$, $g_j = \bigcup_{\xi<\alpha} f_j^\xi$). Udowodnić, że $\bigwedge_{\xi<\alpha} \mathfrak{a}_\xi \prec \mathfrak{b}$.

12.39. Uogólnić zadanie 12.38 na dowolne zbiory skierowane.

Niech $\mathfrak{a} = \langle A, R_i, \ldots, f_j, \ldots \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle B, S_i, \ldots, g_j, \ldots \rangle$ będą systemami relacyjnymi. Niech $\varphi : A \xrightarrow{1-1} B$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym.

Odwzorowanie φ nazywamy *izomorfizmem „w"* i zapisujemy $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$R_i(a_i, \ldots, a_n) \Leftrightarrow S_i(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n),$$

$$\varphi[f_j(a_1, \ldots, a_n)] = g_j(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n).$$

Jeśli przy tym φ jest odwzorowaniem „na", to nazywamy go *izomorfizmem*.

12.40. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, to odwzorowanie identycznościowe $\mathfrak{a}$ w $\mathfrak{b}$ jest izomorfizmem „w".

Niech $\mathfrak{a}_t = \langle A_t, R_{ti}, \ldots, g_{tj}, \ldots \rangle$ będzie rodziną systemów relacyjnych indeksowaną elementami zbioru I, zaś F — ultrafiltrem na zbiorze I. W zbiorze $\prod_{i \in I} A_i$ rozważamy relację $\sim_F$ (przypomnijmy, że elementami $\prod_{i \in I} A_i$ są funkcje określone na zbiorze I takie, że $f(t) \in A_t$).

$$f \sim_F g \Leftrightarrow \{t : f(t) = g(t)\} \in F.$$

Relacja $\sim_F$ jest relacją równowartości (por. zadanie D2.61). Rozważamy $B = \prod_{i \in I} A_i/F$. Na zbiorze B wprowadzamy relacje $S_i\,(i \in T_1)$ oraz funkcje $g_j\,(j \in T_2)$ jak następuje:

$$S_i([f_1], \ldots, [f_{n_i}]) \Leftrightarrow \{t : R_{t_i}(f_1(t), \ldots, f_{n_i}(t))\} \in F,$$

$$g_j([f_1], \ldots, [f_{n_j}]) = h \Leftrightarrow \{t : g_{t_j}(f_1(t), \ldots, f_{n_j}(t)) = h(t)\} \in F.$$

System relacyjny $\mathfrak{b} = \langle B, S_i, \ldots, g_j, \ldots \rangle$ nazywamy *produktem rodziny* $\mathfrak{a}_i$ *zredukowanym modulo* F, albo w skrócie *ultraproduktem*. Zapisujemy to wzorem $\mathfrak{b} = \prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$.

12.41. Udowodnić że definicja funkcji i relacji w ultraprodukcie jest poprawna.

12.42. Udowodnić, że jeżeli ultrafiltr F jest główny, tzn. $\bigcap F = \{i_0\}$, to produkt $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$ jest izoformiczny z $\mathfrak{a}_{i_0}$.

12.43. Udowodnić następujące twierdzenie Łosia: Niech $\Phi(v_0, \ldots, v_n)$

będzie dowolną formułą, zaś $[f_0], \ldots, [f_n], \ldots$ dowolnym ciągiem elementów $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$. Wówczas

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F \models \Phi(v_0, \ldots, v_n)[[f_0], [f_1], \ldots]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{t : \mathfrak{a}_t \models \Phi(v_0, \ldots, v_n)[f_0(t), f_1(t), \ldots]\} \in F.$$

12.44. Niech $X \subset I$. *Śladem ultrafiltru* F na zbiorze X nazywamy zbiór $\{X \cap U : U \in F\} = F \upharpoonright X$. Jeśli $X \in F$, to $F \upharpoonright X$ jest ultrafiltrem na X. Udowodnić, że jeśli $X \in F$, to $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$ jest izomorficzny z systemem $\prod_{j \in X} \mathfrak{a}_j/F \upharpoonright X$. Jaki jest związek tego twierdzenia z zadaniem 12.42?

12.45. Niech dla każdego $i \in I$ $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$. Przez $\mathfrak{a}^I_{/F}$ oznaczmy $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$. Udowodnić, że odwzorowanie $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^I_{/F}$ określone wzorem $\varphi(a) = [\underline{a}]$, gdzie $\underline{a}$ jest funkcją stałą, przyjmującą wartość a jest izomorfizmem „w". Udowodnić, że $\varphi * \mathfrak{a} \prec \mathfrak{a}^I_{/F}$.

12.46. Niech $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ będzie izomorfizmem „w" takim, że $\varphi * \mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$. Udowodnić, że $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

12.47. Udowodnić, że jeśli system $\mathfrak{a}$ jest skończony, to dla każdego I i F zbiór $\mathfrak{a}^I_{/F}$ jest zbiorem skończonym i izomorficznym z $\mathfrak{a}$.

12.48. Udowodnić, że jeśli wszystkie systemy $\mathfrak{a}_i$ $(i \in I)$ są skończone, i dla pewnego n mamy $\{i : \overline{\overline{A_i}} = n\} \in F$, to $\prod \mathfrak{a}_i/F$ jest zbiorem skończonym.

12.49. Znaleźć rodzinę $\mathfrak{a}_i$ systemów relacyjnych skończonych, zbiór I i ultrafiltr F na I takie, że $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F$ nie jest systemem skończonym.

W zadaniach 12.50-12.56 badamy własności ultrafiltrów.

12.50. Niech S będzie podrodziną zbioru $\mathscr{P}(I)$, mającą własność skończonych przecięć, tj. $\bigwedge_{a_1, \ldots, a_n \in S} a_1 \cap, \ldots, \cap a_n \neq O$ (dla każdego $n \in \mathscr{N}$). Udowodnić, że istnieje ultrafiltr F na zbiorze I taki, że $S \subset F$.

12.51. Ultrafiltr F na zbiorze I nazywamy *głównym*, jeśli $A_F = \bigcap F \neq O$. Udowodnić, że istnieje wtedy $i_F \in I$ takie, że $A_F = \{i_F\}$.

12.52. Udowodnić, że rodzina $\mathscr{N}_\infty = \{X \subset \mathscr{N} : \overline{\overline{\mathscr{N} - X}} < \aleph_0\}$ może być rozszerzona do ultrafiltru niegłównego.

12.53. Niech $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$, zaś $F \subset \mathscr{P}(\mathscr{N})$ będzie ultrafiltrem niegłównym. Dowieść, że $\overline{\overline{A^{\mathscr{N}}/F}} = 2^{\aleph_0}$.

12.54. Niech dana będzie rodzina $\{A_i\}_{i\in I}$ zbiorów parami rozłącznych, niepustych. Dla każdego zbioru A_i niech dany będzie ultrafiltr F_i na zbiorze A_i oraz ultrafiltr G na zbiorze I. Udowodnić, że rodzina

$$\bigcup_{i\in I} F_i/G = \{X \subset \bigcup_{i\in I} A_i : \{i : X \cap A_i \in F_i\} \in G\}$$

jest ultrafiltrem.

12.55. Niech mocą zbioru I będzie $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Udowodnić, że moc zbioru wszystkich ultrafiltrów na zbiorze I równa jest $2^{\mathfrak{m}}$.

12.56. Niech F i G będą ultrafiltrami na zbiorze I. Mówimy, że F jest izomorficzne z G jeśli istnieje permutacja φ (tj. przekształcenie różnowartościowe i „na") zbioru I takie, że $G = \{\varphi * X : X \in F\}$.

a) Udowodnić, że każde dwa ultrafiltry główne są izomorficzne.

b) Udowodnić, że dla dowolnego zbioru nieskończonego X istnieją ultrafiltry F i G na X nieizomorficzne.

12.57. Załóżmy, że $\bigwedge_{i\in I} \mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{b}_i$. Udowodnić, że $\prod_{i\in I} \mathfrak{a}_i/F \equiv \prod_{i\in I} \mathfrak{b}_i/F$.

Jak można osłabić założenia takiego zadania nie osłabiając tezy?

Systemy $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ nazywamy *podobnymi*, jeśli $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}} = \mathbf{J}_{\mathfrak{b}}$. Klasa K systemów relacyjnych podobnych wyznacza zbiór zadań K^* w następujący sposób: $K^* = \bigcap_{\mathfrak{a}\in K} \mathfrak{a}^*$ (por. zadanie 12.15) innymi słowy $\Phi \in K^* \Leftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{a}\in K} \mathfrak{a} \models \Phi$.

Podobnie, zbiór zadań S wyznacza klasę S^* systemów relacyjnych podobnych, mianowicie $\mathfrak{a} \in S^* \Leftrightarrow S \subset \mathfrak{a}^*$, a więc $\mathfrak{a} \in S^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zdania ze zbioru S są spełnione w $\mathfrak{a}$. Powiemy wtedy, że $\mathfrak{a}$ jest *modelem* dla zbioru zdań S.

12.58. Udowodnić, że dla każdego K mamy $K \subset K^{**}$.

12.59. Udowodnić, że jeśli zbiór S ma model, to $S \subset S^{**}$.

Klasa K nazywa się *elementarną w węższym sensie* (w skrócie $K \in EC$), jeśli istnieje Φ takie, że $K = \{\Phi\}^*$. Podobnie K jest *elementarne w szerszym sensie* ($K \in EC_{\Delta}$), jeśli istnieje S takie, że $K = S^*$.

Twierdzenie Gödla o pełności:

$$S \vdash \Phi \Leftrightarrow \bigwedge_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \in S^* \Rightarrow \mathfrak{a} \models \Phi).$$

Twierdzenie to mówi, że formuła Φ jest logiczną konsekwencją zbioru formuł S wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest prawdziwe we wszystkich modelach zbioru S.

12.60. Udowodnić następujące twierdzenie o niesprzeczności: Zbiór zdań S jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $S^* \neq O$.

12.61. Udowodnić następujące twierdzenie o zwartości: Niech S będzie zbiorem zdań. Jeśli dla każdego skończonego podzbioru $S_0 \subset S$ mamy $S_0^* \neq O$, to $S^* \neq O$. Innymi słowy, jeśli każdy skończony podzbiór zbioru S ma model, to S ma model.

12.62. W zbiorze A wszystkich skończonych podzbiorów zbioru T rozważamy podrodziny $B_U = \{W : U \subset W\}$.

a) Udowodnić, że $B_{U_1} \cap B_{U_2} = B_{U_1 \cup U_2}$.

b) Udowodnić, że rodzina $\{B_U : U$ jest skończonym podzbiorem zbioru $T\}$ może być rozszerzona do ultrafiltru na zbiorze A.

c) Użyć wyniku uzyskanego w punkcie b do dowodu twierdzenia o zwartości.

12.63. Udowodnić następujące twierdzenie Frayne'go:

Niech $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. Wtedy istnieje zbiór I, ultrafiltr F na zbiorze I oraz izomorfizm „w" $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}^I_{/F}$ takie, że $\varphi * \mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}^I_{/F}$.

12.64. Udowodnić, że jeżeli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są skończonymi systemami relacyjnymi i $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, to $\mathfrak{a}$ jest izomorficzne z $\mathfrak{b}$.

12.65. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, R_t \rangle_{t \in T}$ będzie systemem relacyjnym, w którym wszystkie relacje są jednoargumentowe (to znaczy $R_t \subset A$) i wyczerpują wszystkie podzbiory A (a więc w szczególności $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$). Niech $\mathfrak{a}' = \langle A', R_t' \rangle_{t \in T}$ będzie rozszerzeniem elementarnym właściwym systemu $\mathfrak{a}$. Niech wreszcie $x \in A' - A$. Udowodnić, że zbiór $F_x = \{R_t : x \in R_t'\}$ jest ultrafiltrem niegłównym na zbiorze A.

12.66. Niech X będzie klasą wszystkich systemów ustalonego typu. Udowodnić, że jeśli $K \subset X$, to $K \in EC \Leftrightarrow X - K \in EC$.

12.67. Niech X jak w zadaniu 12.66. Dowieść, że jeśli $K \in EC_\Delta$ i $X - K \in EC_\Delta$, to $K \in EC$.

12.68. Udowodnić, że jeżeli $K \in EC_\Delta$, to istnieją klasy $K_1, \ldots, K_t \in EC$ takie, że $K = \bigcap_{t \in T} K_t$.

12.69. Udowodnić, że każda klasa elementarna w szerszym sensie jest zamknięta ze względu na:

a) operację brania ultrapotęgi swych elementów,
b) operację brania ultraproduktu swych elementów,
c) elementarną równoważność.

12.70. Udowodnić, że jeśli klasa K jest zamknięta ze względu na operację brania ultraproduktu i ze względu na elementarną równoważność, to $K \in EC_{\Delta}$.

12.71. Udowodnić, że jeśli klasy K i $X-K$ są zamknięte ze względu na operację brania ultraproduktu oraz obrazu izomorficznego, zaś K jest zamknięte ze względu na elementarną równoważność, to $K \in EC$.

Klasa K nazywana jest *uniwersalną* (w ustalonym języku **J**) ($K \in UC_{\Delta}$), jeśli $K = S^*$ dla pewnego S złożonego z formuł uniwersalnych tego języka (por. zadanie 12.26).

12.72. Udowodnić, że jeżeli $K \in UC_{\Delta}$, $\mathfrak{a} \in K$ i $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, to $\mathfrak{b} \in K$.

12.73. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $K \in UC_{\Delta}$ jest, by zachodziła koniunkcja a i b i c, gdzie

a) K jest zamknięte ze względu na izomorfizm,

b) K jest zamknięte ze względu na branie podsystemu,

c) K jest zamknięte ze względu na branie ultraproduktu.

12.74. a) Czy klasa wszystkich grup jest UC_{Δ}?

b) Czy klasa wszystkich pierścieni jest UC_{Δ}?

c) Czy klasa wszystkich ciał jest UC_{Δ}?

12.75. a) Czy klasa K wszystkich systemów relacyjnych $\langle A, A^2 \rangle$, gdzie A jest zbiorem skończonym jest EC_{Δ}?

b) Czy klasa K wszystkich systemów relacyjnych $\langle A, A^2 \rangle$, gdzie A jest zbiorem nieskończonym jest EC_{Δ}?

c) Czy klasa wszystkich systemów relacyjnych $\langle A, R \rangle$, gdzie R jest relacją liniowo porządkującą zbiór A jest EC_{Δ}?

d) Czy klasa wszystkich systemów relacyjnych $\langle A, R \rangle$, gdzie R jest relacją dobrze porządkującą zbiór A jest EC_{Δ}?

TWIERDZENIE SKOLEMA-LÖWENHEIMA-TARSKIEGO:

1) Górne: Niech $\mathfrak{a}$ będzie systemem relacyjnym nieskończonym, $\mathfrak{m}$ mocą języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m} + \overline{\overline{\mathfrak{a}}}$. Wtedy istnieje $\mathfrak{b}$ takie, że $\overline{\overline{\mathfrak{b}}} = \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$.

2) Dolne: Niech $\mathfrak{a}$ będzie systemem relacyjnym, $\mathfrak{m}$ mocą języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$, $\overline{\overline{\mathfrak{a}}} \geqslant \mathfrak{m}$. Wtedy dla każdego $\mathfrak{n}$ takiego, że $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{a}}}$ istnieje $\mathfrak{b}$ takie, że $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{a}$ i $\overline{\overline{\mathfrak{b}}} = \mathfrak{n}$. Można zakładać ponadto, że $\mathfrak{b}$ zawiera żądany podzbiór A_0 zbioru A o ile $\overline{\overline{A_0}} \leqslant \mathfrak{n}$.

12.76. Udowodnić górne twierdzenie Skolema-Löwenheima-Tarskiego za pomocą dolnego twierdzenia i konstrukcji odpowiedniej ultrapotęgi.

12.77. Zbiór zdań X nazywa się *kategoryczny*, jeśli dowolne dwa jego modele są izomorficzne. Udowodnić, że jeśli zbiór zdań X ma model nieskończony, to nie jest kategoryczny.

12.78. Udowodnić następujące *kryterium Łosia-Vaughta zupełności* zbioru zdań: Jeśli dla pewnej liczby kardynalnej $\mathfrak{m} \geqslant \overline{\overline{\mathbf{J}}}$ każde dwa modele zbioru zdań S języka $\mathbf{J}$ mocy $\mathfrak{m}$ są izomorficzne, zaś S posiada modele nieskończone, to zbiór S jest zupełny.

12.79. Udowodnić, że teoria gęstego liniowego porządku bez pierwszego i ostatniego elementu jest zupełna.

12.80. Udowodnić, że teoria ciał algebraicznie domkniętych ustalonej charakterystyki jest zupełna.

12.81. Udowodnić, że teoria przestrzeni liniowych ustalonego wymiaru n nad ciałem algebraicznie domkniętym ustalonej charakterystyki p jest zupełna.

12.82. Udowodnić, że zbiór zdań S jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\mathfrak{a} \in S^*} \bigwedge_{\mathfrak{b} \in S^*} \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}.$$

12.83. Ciąg zdań $\{\Phi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ nazywamy *rosnącym*, jeśli

a) $n \leqslant m$ pociąga za sobą, że $\Phi_m \Rightarrow \Phi_n$ jest zdaniem prawdziwym,

b) $n \leqslant m$ pociąga za sobą, że $\sim(\Phi_n \Rightarrow \Phi_m)$ jest zdaniem prawdziwym.

Udowodnić, że jeśli ciąg $\{\Phi_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ jest rosnący, to nie istnieje zdanie Ψ takie, że $\{\Phi_n : n \in \mathcal{N}\}^* = \{\Psi\}^*$.

12.84. Udowodnić, że klasa wszystkich ciał o charakterystyce 0 nie jest skończenie aksjomatyzowalna.

12.85. Wykorzystać wynik zadania 12.83 do dowodu faktu, że są takie klasy EC_Δ, które nie są EC.

12.86. Udowodnić, że klasa wszystkich systemów $\langle A, A^2 \rangle$, gdzie $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$ nie jest skończenie aksjomatyzowalna.

12.87. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, R_i, \ldots, f_j, \ldots \rangle$ będzie systemem relacyjnym. Dla każdego $a \in A$ wprowadzimy nową stałą c_a (rozszerzając język o te stałe) z interpretacją c_a jako a. Powiększamy w ten sposób zbiór T_2, otrzymując nowy system relacyjny $\mathfrak{a}'$, różniący się od $\mathfrak{a}$ tylko nowymi stałymi. Dowieść, że $\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a}'^*$.

Zbiór $D(\mathfrak{a})$ — *wykres systemu* $\mathfrak{a}$, jest to zbiór zdań języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}'}$, złożony ze zdań $P_i(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, jeśli $R_i(a_1, \ldots, a_n)$, oraz ze zdań $\sim P_i(c_{a_1} \ldots c_{a_n})$, jeśli non $R_i(a_1, \ldots, a_n)$ i analogicznie dla równości termów.

Zbiór zdań X nazywamy modelowo zupełnym, jeśli dla każdego $\mathfrak{a} \in X$ zbiór $X \cup D(\mathfrak{a})$ jest zupełnym zbiorem zdań.

12.88. Znaleźć zbiór zdań modelowo zupełny, ale niezupełny.

12.89. Znaleźć zbiór zdań zupełny, ale nie modelowo zupełny.

12.90. Udowodnić, że na to, by zbiór zdań był modelowo zupełny potrzeba i wystarcza, by

$$\bigwedge_{\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in X^*} (\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}).$$

12.91. System relacyjny $\mathfrak{a}_0$ nazywa się *modelem pierwszym* dla zbioru zdań S wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathfrak{b} \in S^*$ istnieje φ będące izomorfizmem $\mathfrak{a}$ w $\mathfrak{b}$. Udowodnić, że $\langle \mathcal{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ jest modelem pierwszym dla arytmetyki.

12.92. Udowodnić, że $\langle \mathscr{W}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ jest ciałem pierwszym o charakterystyce 0.

12.93. Udowodnić, że $\langle \mathscr{Z}_p, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ jest ciałem pierwszym o charakterystyce p.

12.94. Udowodnić, że $\langle \mathscr{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant \rangle$ jest pierścieniem pierwszym uporządkowanym z jednością.

12.95. Udowodnić, że jeśli zbiór zdań X jest modelowo zupełny i ma model pierwszy $\mathfrak{a}_0$, to

a) X jest zupełny,

b) $\mathrm{Cn}\, X = (\mathfrak{a}_0)^*$.

12.96. Podać przykład teorii, nie posiadającej modelu pierwszego.

12.97. Izomorfizm $\varphi : \mathfrak{a} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathfrak{a}$ nazywamy *automorfizmem*. Załóżmy, że $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ oraz, że dla każdego skończonego podzbioru $A' \subset A$ i dowolnego $b \in B$ istnieje automorfizm $f_{A',b}$ systemu $\mathfrak{b}$ taki, że $f_{A',b} \upharpoonright A = I, f_{A',b}(b) \in A$. Dowieść, że wtedy $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$.

12.98. Niech zbiór zdań X będzie modelowo zupełny i niech dla dowolnych $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in X^*$ istnieje $\mathfrak{c} \in X^*$, φ_1 i φ_2 izomorfizmy „w" takie, że $\varphi_1 : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$, $\varphi_2 : \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$. Dowieść, że wtedy X jest zbiorem zupełnym.

12.99. Dla danego $\Phi \in \mathbf{J}$ niech U_Φ będzie zbiorem tych niesprzecznych zupełnych zbiorów zdań języka $\mathbf{J}$, że $\Phi \in S$.

Niech w zbiorze $\mathscr{Z}$ wszystkich zupełnych niesprzecznych zbiorów zdań zadana będzie topologia za pomocą bazy $\{U_\Phi : \Phi \in \mathbf{J}\}$.

a) Udowodnić, że rozważana przestrzeń jest 0-wymiarową.

b) Udowodnić, że rozważana przestrzeń jest zwartą przestrzenią Hausdorffa.

c) Zbadać, czym są zbiory domknięte w tej przestrzeni.

Uwaga. Nie rozróżniamy zdań Φ i Ψ takich, że $\vdash \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

12.100. Udowodnić, że twierdzenie Skolema-Löwenheima jest równoważne pewnikowi wyboru (na gruncie aksjomatyki Zermelo-Fraenkela, por. aksjomatyka opisana w [3]).

12.101. Udowodnić, że jeżeli $K_1 \in EC$ i $K_2 \in EC$, to $K_1 \cap K_2 \in EC$, $K_1 \cup K_2 \in EC$.

12.102. Udowodnić, że jeżeli $K_1 \in EC_\Delta$ i $K_2 \in EC_\Delta$, to $K_1 \cap K_2 \in EC_\Delta$, $K_1 \cup K_2 \in EC_\Delta$.

12.103. Jaką interpretację topologiczną mają zadania 12.101 i 12.102 (porównaj zadanie 12.99).

12.104. Udowodnić metodami teorii modeli, że każdy częściowy porządek może być rozszerzony do liniowego.

Rozdział XIII

FUNKCJE REKURENCYJNE

Niech $f: A_1 \times \ldots \times A_n \to \mathcal{N}$. Jeśli $A_i \subset \mathcal{N}$ dla $i \leqslant n$, to mówimy, że f jest określona na liczbach naturalnych. W szczególności, jeśli $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \mathcal{N}$, to mówimy, że f jest określona na całym zbiorze liczb naturalnych.

W rozdziale tym zajmować się będziemy wyłącznie funkcjami określonymi na liczbach naturalnych.

Mówimy, że zbiór funkcji F jest zamknięty ze względu na n-argumentową operację ϑ jeśli z faktu, że $f_i \in F$ dla $i \leqslant n$ wynika, że $\vartheta(f_1, \ldots, f_n) \in F$.

Niech teraz f będzie dowolną $n+1$ argumentową funkcją. Funkcję $g(x_1, \ldots, x_n)$ określoną w sposób następujący:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \text{najmniejsze } x \text{ takie, że } f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

oznaczamy przez $(\mu x)[f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0]$.

Tak więc zdefiniowana została pewna operacja na funkcjach zwana *operacją minimum.*

Jeżeli funkcja f jest taka, że $\bigwedge\limits_{x_1} \ldots \bigwedge\limits_{x_n} \bigvee\limits_{x} f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0$, to o operacji minimum zastosowanej do funkcji f mówimy, że jest *efektywna.* Operację minimum ograniczoną jedynie do funkcji mających powyższą własność nazywamy *operacją minimum efektywnego.*

Pewną modyfikacją operacji minimum jest *operacja minimum ograniczonego,* która funkcji $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ przyporządkowuje funkcję $g = (\mu x \leqslant y)[f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0]$ określoną w następujący sposób:

$$g(y, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (\mu x)[f(x, x_1, \ldots, x_n) = 0 \wedge x \leqslant y], & \text{jeśli takie } x \text{ istnieje,} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Inną operacją określoną na tej samej klasie funkcji jest operacja zwana *definiowaniem przez indukcję*. Często też nazywa się tę operację *rekursją prostą*.

Mając dane dwie funkcje $f(x_1, \ldots, x_n)$ i $g(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ możemy mianowicie zdefiniować funkcję h następująco:

$$h(0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$h(n+1, x_1, \ldots, x_n) = g[x_1, \ldots, x_n, n, h(n, x_1, \ldots, x_n)].$$

Szczególnym przypadkiem tej operacji jest tzw. *schemat czystej iteracji*, który prowadzi od funkcji $g(x)$ do funkcji $f(x)$ określonej przez równości

$$f(0) = 0,$$

$$f(n+1) = g[f(n)].$$

Zbiór funkcji *pierwotnie rekurencyjnych* jest to najmniejszy zbiór funkcji, który zawiera funkcje

$$S(x) = x+1, \quad I(x) = x, \quad I_2(x, y) = y, \quad 0(x) = 0$$

i jest zamknięty ze względu na operację rekursji prostej i superpozycji.

Zbiór funkcji rekurencyjnych (*obliczalnych*) określamy jako najmniejszy zbiór zawierający te same funkcje wyjściowe, tj. funkcje $S(x)$, $I(x)$, $I_2(x, y)$ i $0(x)$ oraz zamknięty ze względu na operacje superpozycji, rekursji prostej i minimum efektywnego.

Zbiór funkcji częściowo rekurencyjnych jest to najmniejszy zbiór zawierający funkcje $S(x)$, $I(x)$, $I_2(x, y)$ i $0(x)$ oraz zamknięty ze względu na operacje superpozycji, rekursji prostej i minimum.

Relację R o polu $\mathcal{N}$ nazywamy *pierwotnie rekurencyjną* (*rekurencyjną*, względnie *obliczalną*), jeśli istnieje funkcja f pierwotnie rekurencyjna (obliczalna) taka, że

$$R(m_1, \ldots, m_n) \Leftrightarrow f(m_1, \ldots, m_n) = 0.$$

W szczególności *zbiór* $A \subset \mathcal{N}$ nazywamy *pierwotnie rekurencyjnym* (*obliczalnym*), jeżeli istnieje taka funkcja f pierwotnie rekurencyjna (obliczalna), że

$$m \in A \Leftrightarrow f(m) = 0.$$

Zbiór $A \subset \mathcal{N}$ jest natomiast *zbiorem rekurencyjnym przeliczalnym*, jeśli istnieje taka funkcja obliczalna f, że $f*\mathcal{N} = A$.

13.1. Dowieść, że każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest określona dla wszystkich liczb naturalnych.

13.2. Dowieść, że każda funkcja obliczalna jest określona dla wszystkich liczb naturalnych.

13.3. Dowieść, że każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest funkcją obliczalną.

13.4. Dowieść, że każda funkcja obliczalna jest funkcją częściowo rekurencyjną.

13.5. Dowieść, że zbiory funkcji pierwotnie rekurencyjnych i częściowo rekurencyjnych mają moc $\aleph_0$.

Dowieść, że następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne (zad. 13.6-13.11):

13.6. $f(x, y) = x+y$.

13.7. $f(x, y) = x \cdot y$.

13.8. $f_n(x) = n$.

13.9. $f(x, y) = x^y$.

13.10. $f(x) = (x+1)!$

13.11. $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, & \text{gdy } x \geqslant y. \\ 0, & \text{gdy } x < y. \end{cases}$

Dowieść, że niżej wypisane relacje są pierwotnie rekurencyjne (zad. 13.12-13.14):

13.12. $x \leqslant y$.

13.13. $x = y$.

13.14. $x < y$.

13.15. Dowieść, że jeśli $R_1(x)$ i $R_2(x)$ są relacjami pierwotnie rekurencyjnymi (obliczalnymi), to $R_1(x) \vee R_2(x)$, $R_1(x) \wedge R_2(x)$ oraz $\sim R_1(x)$ są też relacjami pierwotnie rekurencyjnymi (obliczalnymi).

13.16. Dowieść, że jeśli $R(x, y)$ jest relacją obliczalną, to $\bigwedge_{x<n} R(x, y)$ i $\bigvee_{x<n} R(x, y)$ też są relacjami obliczalnymi.

13.17. Dowieść, że $A \subset \mathcal{N}$ jest zbiorem pierwotnie rekurencyjnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja pierwotna rekurencyjna f, że $f: \mathcal{N} \to \{0, 1\}$ i $n \in A \Leftrightarrow f(n) = 1$.

13.18. Dowieść, że gdy A i B są zbiorami obliczalnymi, to $A \cup B$, $A \cap B$ i $\mathcal{N} - A$ są też zbiorami obliczalnymi.

13.19. Dowieść, że jeżeli f i g są funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi a $R(x)$ jest relacją pierwotnie rekurencyjną, to funkcja $h(x)$ określona jak następuje:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } R(x), \\ g(x), & \text{gdy } \sim R(x) \end{cases}$$

jest funkcją pierwotnie rekurencyjną.

13.20. Dowieść, że każdy zbiór skończony jest pierwotnie rekurencyjny.

13.21. Dowieść, że każdy zbiór obliczalny jest rekurencyjnie przeliczalny.

13.22. Dowieść, że jeśli $f(x)$ jest taką funkcją, że $f(x) \neq n_0$ dla skończenie wielu wartości x, gdzie n_0 jest dowolną, ale ustaloną liczbą naturalną, to f jest funkcją pierwotnie rekurencyjną.

13.23. Dowieść, że każdy zbiór rekurencyjnie przeliczalny i nieskończony zawiera nieskończony podzbiór rekurencyjny.

13.24. Dowieść, że nieskończony zbiór $A \subset \mathcal{N}$ jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rosnąca f taka, że f jest rekurencyjna i $f * \mathcal{N} = A$.

13.25. Dowieść, że jeśli $f : \mathcal{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{N}$ i f jest obliczalna, to f^{-1} też jest obliczalna.

13.26. Dowieść, że jeśli A jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym, a f jest funkcją obliczalną, to $f^{-1} * A$ jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

13.27. Dowieść, że jeśli $R(x, y)$ jest relacją obliczalną taką, że

$$\bigwedge_x \bigvee_y R(x, y), \quad \text{to} \quad f(x) = (\mu y) R(x, y)$$

jest funkcją obliczalną.

13.28. Dowieść, że jeżeli $R(x, y)$ jest relacją obliczalną taką, że $\bigwedge_x \bigvee_y R(x, y)$, a $g(x,)$ jest funkcją obliczalną, to $f(x) = (\mu y)\, R\,[g(x), y]$ jest funkcją obliczalną, natomiast $h(x) = (\mu y)\, R\,[x, g(y)]$ jest funkcją częściowo rekurencyjną.

Dowieść, że następujące funkcje i relacje są pierwotnie rekurencyjne (zad. 13.29-13.32):

13.29. $E\left[\dfrac{x}{y}\right]$.

13.30. $x | y$.

13.31. $E[\sqrt{x}]$.

13.32. $x-E[\sqrt{x}]^2$.

13.33. Dowieść, że zbiór funkcji pierwotnie rekurencyjnych jest zamknięty ze względu na operację minimum ograniczonego.

13.34. Dowieść, że jeżeli $R(x, y)$ jest relacją pierwotnie rekurencyjną, to relacje

$$\bigwedge_{x \leqslant n} R(x, y) \quad \text{i} \quad \bigvee_{x \leqslant n} R(x, y)$$

też są pierwotnie rekurencyjne.

13.35. Dowieść, że dla każdego $n \geqslant 2$ istnieją takie pierwotnie rekurencyjne funkcje $J_n, J_n^1, \ldots, J_n^n$, że

a) $J_n: \mathcal{N}^n \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{N}$; b) $J_n^i: \mathcal{N} \xrightarrow{1-1} \mathcal{N}$, c) $J_n[J_n^i(x), \ldots, J_n^n(x)] = x$.

13.36. Dowieść, że jeśli $R(x, x_1, \ldots, x_n)$ jest relacją pierwotnie rekurencyjną, to istnieje relacja pierwotnie rekurencyjna $R'(x, y)$ taka, że

$$\bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} R(x, x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \bigvee_{y} R'(x, y),$$

$$\bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_n} R(x, x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{y} R'(x, y).$$

13.37. Dowieść, że zbiór funkcji rekurencyjnych może być określony jako najmniejszy zbiór zawierający funkcje $0(x)$, $S(x)$, $I(x)$, $I_2(x, y)$ oraz J_n, J_n^i i zamknięty ze względu na superpozycję oraz uproszczony schemat rekursji, który funkcji $g(x)$ przyporządkowuje funkcję $f(x, y)$ określoną równościami:

$$f(x, 0) = x,$$

$$f(x, n+1) = g[f(x, y)].$$

Niech S będzie najmniejszym zbiorem funkcji zmiennej naturalnej zamkniętym ze względu na operacje dodawania, funkcji superpozycji i czystej iteracji. Dowieść, że następujące funkcje należą do S (zad. 13.38-13.43):

13.38. $sq(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \text{ jest kwadratem liczby naturalnej,} \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$

13.39. x^2.

13.40. $E\left[\dfrac{x}{2}\right]$.

13.41. $E[\sqrt{x}]$.

13.42. $x \cdot y$.

13.43. $x \dot{-} y$.

13.44. Dowieść, że zbiór funkcji pierwotnie rekurencyjnych jednej zmiennej może być określony jako najmniejszy zbiór zawierający funkcje $S(x) = x+1$ i $Q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$ i zamknięty ze względu na operacje dodawania funkcji, superpozycji i czystej iteracji.

13.45. Funkcję $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *uniwersalną* dla n argumentowych funkcji zbioru F, jeśli dla każdego $g \in F$ istnieje takie u, że $g(x_1, \ldots, x_n) = f(u, x_1, \ldots, x_n)$ dla każdego $x_1, \ldots, x_n$. Dowieść, że istnieje funkcja uniwersalna dla zbioru jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych, która jest funkcją obliczalną.

13.46. Dowieść, że jeżeli zbiór funkcji F jest zamknięty ze względu na superpozycję i zawiera funkcję $S(x)$, to nie zawiera swojej funkcji uniwersalnej.

13.47. Dowieść, że istnieją funkcje obliczalne, które nie są pierwotnie rekurencyjne.

13.48. Dowieść, że dla każdej funkcji obliczalnej f istnieją takie relacje pierwotnie rekurencyjne R_1 i R_2, że

$$f(m) = n \Leftrightarrow \bigvee_x R_1(m, n, x) \Leftrightarrow \bigwedge_x R_2(m, n, x).$$

13.49. Dowieść, że dla każdej funkcji obliczalnej f istnieje relacja pierwotnie rekurencyjna R taka, że

$$f(n) = J_2^1[(\mu x) R(x, n)].$$

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Zasadę indukcji matematycznej formułuje się w następujący sposób: Niech Z będzie zbiorem takim, że

1) $0 \in Z$.

2) Dla dowolnego naturalnego n, jeśli $n \in Z$, to $n+1 \in Z$. Wówczas Z zawiera wszystkie liczby naturalne.

W szczególności jeżeli Z jest zbiorem złożonym z liczb naturalnych, to $Z = \mathcal{N}$.

Sumę $a_1 + \ldots + a_n$ oznacza się przez $\sum_{i=1}^{n} a_i$, iloczyn $a_1 \ldots a_n$ przez $\prod_{i=1}^{n} a_i$.

Oto kilka dalszych definicji:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

D1.1. Udowodnić, że w każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza (jest to tzw. *zasada minimum*).

D1.2. Udowodnić, że w każdym niepustym ograniczonym od góry zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba największa (jest to tzw. *zasada maksimum*).

D1.3. Udowodnić następującą tzw. *zasadę indukcji uogólnionej*:

Jeśli Z jest zbiorem takim, że

1) $k \in Z$.

2) Dla dowolnego naturalnego $n \geqslant k$ jeśli $n \in Z$, to $n+1 \in Z$, to $Z \supset \mathcal{N} - \{0, \ldots, k-1\}$.

D1.4. Udowodnić następującą tzw. *zasadę indukcji porządkowej*:

Jeśli Z jest zbiorem liczb takim, że jeśli dla wszystkich $m \geqslant k$ i $m < n$, $m \in Z$, to $n \in Z$, to $Z \supset \mathcal{N} - \{0, \ldots, k-1\}$.

D1.5. Udowodnić zasadę indukcji za pomocą zasady minimum.

D1.6. Udowodnić zasadę maksimum za pomocą zasady minimum.

D1.7. Udowodnić zasadę indukcji uogólnionej za pomocą zasady minimum.

D1.8. Udowodnić, że w każdym ograniczonym od dołu zbiorze liczb całkowitych istnieje liczba najmniejsza.

D1.9. Udowodnić, że w każdym ograniczonym od góry zbiorze liczb całkowitych istnieje liczba największa.

D1.10. Udowodnić, że jeśli Z jest zbiorem liczb całkowitych takim, że
1) $0 \in Z$,

2) dla dowolnego całkowitego n jeśli $\in Z$, to $n+1 \in Z$ i $n-1 \in Z$, to Z jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych.

Udowodnić, że (zad. D1.11–D1.15):

D1.11. $1+2+3+ \ldots +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

D1.12. $1^2+2^2+3^2+ \ldots +n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

D1.13. $1^3+2^3+3^3+ \ldots +n^3 = (1+2+ \ldots +n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

D1.14. $1^2-2^2+3^2-4^2+ \ldots +(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$.

D1.15. $1 \cdot 2+2 \cdot 3+ \ldots +n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

D1.16. Jakie musi być k, żeby dla wszystkich n spełniony był wzór

$$1 \cdot 4+2 \cdot 7+ \ldots +n(3n+1) = n(n+1)(n+k).$$

D1.17. Jakie musi być k, żeby dla wszystkich n spełniony był wzór

$$2 \cdot 1^2+3 \cdot 2^2+ \ldots +n(n-1)^2+(n+1) \cdot n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+k)}{12}.$$

Dowieść, że (zad. D1.18–D1.33):

D1.18. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

D1.19. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

D1.20. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$

D1.21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a+i-1)(a+i)} = \frac{n}{a(a+n)}, \qquad a > 0.$

D1.22. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$

D1.23. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$

D1.24. $\displaystyle\prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (i+j-1) = \frac{n^2(n+k+1)}{2}.$

D1.25. $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$

D1.26. $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1).$

D1.27. $\sum\limits_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1).$

D1.28. $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = 2+(n-1)\cdot 2^{n+1}.$

D1.29. $\sum\limits_{i=1}^{n} 2 \cdot 3^{i-1} = 3^n-1.$

D1.30. $\displaystyle(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} \cdot y^i.$

D1.31. $\displaystyle\binom{k}{l} + \binom{k}{l+1} = \binom{k+1}{l+1}.$

D1.32. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

D1.33. $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

D1.34. Udowodnić, że jeśli $f(n)$ jest funkcją rosnącą o wartościach całkowitych, a zbiór Z ma następujące własności:

1) $f(n) \in Z$ dla każdego $n \in \mathcal{N}$.

2) Dla każdego k całkowitego jeśli $k \in Z$, to $k-1 \in Z$,

to zbiór Z zawiera wszystkie liczby całkowite.

Dowieść, że (zad. D1.35–D1.45):

D1.35. $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

D1.36. $$\sum_{i=0}^{n} \cos i\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin (n+\frac{1}{2})\,\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\,\theta}.$$

D1.37. $$\sum_{i=1}^{n} \cos (2i-1)\,\theta = \frac{\sin 2n\,\theta}{2 \sin \theta}.$$

D1.38. $x^n - 1 = (x-1) \sum_{i=0}^{n-1} x^i$.

D1.39. $$\sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{1+x^{2^i}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad \text{dla} \quad x \neq 1.$$

D1.40. $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^{2^{i-1}}}{1-x^{2^i}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}} \quad \text{dla} \quad |x| \neq 1.$$

D1.41. $$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{x-(n+1)\,x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \quad \text{dla} \quad x \neq 1.$$

D1.42. $\prod_{i=1}^{n} (n+i) = 2^n \cdot \prod_{i=1}^{n} (2i-1)$.

D1.43. $\prod_{i=1}^{n} (1+x^{2^{i-1}}) = 1 + \prod_{i=1}^{n} x^{2^{i-1}}$.

D1.44. $\prod_{i=0}^{n} \cos(2^i \cdot \theta) = \dfrac{\sin(2^{n+1} \cdot \theta)}{2^{n+1} \cdot \sin\theta}$.

D1.45. $1 + \dfrac{1}{a_1} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\prod_{i=1}^{j}(a_i+1)}{\prod_{i=1}^{j+1} a_i} = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(a_i+1)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$.

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n (zad. D1.46-D1.53):

D1.46. $2^n > n$.

D1.47. $n! > n$, $n > 2$.

D1.48. $2|n^2+n$.

D1.49. $6|n^3-n$.

D1.50. $30|n^5-n$.

D1.51. $42|n^7-n$.

D1.52. $43|6^{n+2}+7^{2n+1}$.

D1.53. $k^2+k+1|k^{n+2}+(k+1)^{2n+1}$.

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby pierwszej p (zad. D1.54-D1.60):

D1.54. $p|n^p-n$.

D1.55. $6|n^3+5n$.

D1.56. $120|n^5-5n^3+4n$.

D1.57. $24|n^6-3n^5+6n^4-7n^3+5n^2-2n$.

D1.58. $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$.

D1.59. $25|2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$.

D1.60. $64|3^{2n+1}+40n-67$.

Dla jakich liczb naturalnych n prawdziwe są nierówności (zad. D1.61-D1.68):

D1.61. $2n+1 < 2^n$.

D1.62. $n^2 < 3^{n-1}$.

D1.63. $n^3 < 2^n$.

D1.64. $n^3 < n!$.

D1.65. $(n+1)^n < n^{n+1}$.

D1.66. $n^2 \cdot 2^n < n^2+n-2$.

D1.67. $3^n < n^2+2n-4$.

D1.68. $n^2+1 < 2^{n-1}$.

D1.69. Dowieść, że dla naturalnych $n > 2$

$$2^{\frac{1}{2}n\cdot(n-1)} > n!.$$

Dowieść, że dla naturalnych $n > 1$ (zad. D1.70-D1.71):

D1.70. $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

D1.71. $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Dowieść, że dla dowolnego $x \geqslant 0$, dowolnego naturalnego n i $k \leqslant n$ (zad. D1.72-D1.73):

D1.72. $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

D1.73. $1+\frac{k}{n} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2$.

Dowieść, że (zad. D1.74-D1.76):

D1.74. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ dla $n \geqslant 2$.

D1.75. $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} < 1$ dla $n > 1$.

D1.76. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} > \frac{13}{24}$ dla $n > 1$.

D1.77. Dowieść, że jeżeli $a_1 \geqslant 0, \ldots, a_n \geqslant 0$, to

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

D1.78. Dowieść, że dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ mamy

$$\frac{a_n}{a_1}+\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_{i+1}} \geqslant n.$$

D1.79. Udowodnić, że dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

D1.80. Dowieść, że $\sin 2nx+\cos 2nx \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

*D1.81. Udowodnić (bez pomocy zadania D1.77), że dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$

$$\text{jeśli } \prod_{i=1}^{n} a_i = 1, \text{ to } \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n.$$

Kiedy zachodzi równość?

*D1.82. Dowieść, że dla nieujemnych $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}.$$

Wykazać, że równość zachodzi tylko wówczas, gdy $a_i = a_j$ dla wszystkich $i, j \leqslant n$.

D1.83. Dowieść, że dla a i b takich, że $a+b > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

D1.84. Dowieść, że dla każdego n naturalnego $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ jest liczbą naturalną.

D1.85. Dowieść, że jeśli wyrazy ciągu a_n spełniają następujące warunki: $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n-2a_{n-1}$, to $a_n = 2^n+1$.

D1.86. Dowieść, że jeżeli wyrazy ciągu a_n spełniają następujące warunki: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$, to $a_n < (\frac{7}{4})^n$.

D1.87. Dowieść, że jeżeli wyrazy ciągu a_n spełniają warunek:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}, \quad \text{to} \quad a_n = \frac{a_0}{2na_0+1}.$$

D1.88. Dane są dwa ciągi a_n i b_n takie, że $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n+2b_n$, $b_{n+1} = a_n+b_n$. Dowieść, że

$$a_n = \tfrac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n], \qquad b_n = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n].$$

D1.89. Dane są ciągi a_n i b_n takie, że $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n+2b_n$, $b_{n+1} = a_n+b_n$. Nie korzystając z zadania D1.88 dowieść, że $a_n^2-2b_n^2 = 1$.

D1.90. Dany jest ciąg a_n taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n+a_{n-1}$. Dowieść, że jeśli $n > 0$, to

a) $a_{n+1} = 1+\sum_{i=0}^{n-1} a_i$,

b) $a_n^2 = 1+a_{n-1}a_{n+1}$,

c) $a_{2n+1} = a_n^2+a_{n+1}^2$.

D1.91. Wyrazy ciągu a_n spełniają następujące warunki: $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n+1}+1$. Znaleźć $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

D1.92. Wyrazy ciągu a_n spełniają następujący warunek $a_{n+1}-2a_n+ +a_{n-1} = 1$.
Warazić a_n za pomocą a_1, a_2 oraz n.

D1.93. Wyrazy ciągów a_n i b_n spełniają następujące warunki: $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n+5b_n$, $b_{n+1} = a_n+2b_n$.
Wyrazić a_n i b_n w zależności od n.

D1.94. Dowieść, że każdy n kąt można podzielić na $n-2$ trójkąty nie przecinającymi się przekątnymi.

D1.95. Dowieść, że obszary wyznaczone przez n prostych na płaszczyźnie można pokolorować dwoma kolorami tak, by żadne dwa o tym samym kolorze nie miały wspólnego boku.

D1.96. Dowieść, że n kwadratów można zawsze pociąć prostymi w ten sposób, by z uzyskanych kawałków można było złożyć jeden nowy kwadrat.

KRATY I ALGEBRY BOOLE'A

System relacyjny $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywamy *kratą* (ang. *lattice*), jeśli działania $\wedge$, $\vee$ są działaniami dwuargumentowymi o następujących własnościach:

L1 a) $a\wedge a = a$, b) $a\vee a = a$.

L2 a) $a\wedge b = b\wedge a$, b) $a\vee b = b\vee a$.

L3 a) $a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c$, b) $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$.

L4 a) $a\wedge(a\vee b) = a$, b) $a\vee(a\wedge b) = a$.

Jeśli działania $\wedge$ i $\vee$ mają dodatkowo własności:

L5 a) $a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,

b) $a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$,

to kratę nazywamy *rozdzielną*.

Krata bywa też nazywana *strukturą*.

D2.1. Udowodnić, że w dowolnej kracie

$$(a = a\vee b) \Leftrightarrow (a\wedge b = b).$$

D2.2. Wprowadzamy relację dwuargumentową $\leqslant$ wzorem $a\leqslant b \Leftrightarrow a\vee b = b$. Udowodnić, że relacja $\leqslant$ jest częściowym porządkiem.

D2.3. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ będzie kratą, zaś $\leqslant$ częściowym porządkiem określonym w zadaniu D2.2. Udowodnić, że system relacyjny $\langle L, \leqslant\rangle$ jest zbiorem skierowanym, innymi słowy, że spełnia on warunek $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} (a\leqslant c\wedge b\leqslant c)$.

D2.4. Rozważmy podobnie jak w zadaniu D2.3 system relacyjny $\langle L, \leqslant\rangle$. Udowodnić, że w zbiorze L każde dwa elementy mają kres dolny i górny, to znaczy, że

a) $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} \bigwedge_{d} [(d\leqslant a\wedge d\leqslant b) \Leftrightarrow d\leqslant c]$,

b) $\bigwedge_{a,b} \bigvee_{c} \bigwedge_{d} [(a\leqslant d\wedge b\leqslant d) \Leftrightarrow c\leqslant d]$.

D2.5. Udowodnić, że w dowolnej kracie:

a) $a \wedge b \leqslant a$,

b) $(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a \wedge c \leqslant b \wedge d)$,

c) $a \leqslant a \vee b$,

d) $(a \leqslant b \wedge c \leqslant d) \Rightarrow (a \vee c \leqslant b \vee d)$.

D2.6. Rozważmy system relacyjny $\langle \mathcal{N} - \{0\}, \wedge, \vee \rangle$, gdzie $x \wedge y = \mathrm{NWD}(x, y)$, zaś $x \vee y = \mathrm{NWW}(x, y)$. Udowodnić, że system ten jest kratą. Czy krata ta jest rozdzielna?

D2.7. Udowodnić, że jeśli $\langle X, \leqslant \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym, to można w nim wprowadzić działania $\wedge$ oraz $\vee$ w ten sposób, że $\langle X, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą, a porządek (por. zadanie D2.2) wyznaczony przez te działania jest identyczny z $\leqslant$.

D2.8. Jeśli $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ jest kratą, to *kresem dolnym zbioru* $X \subset L$ nazywamy $t \in L$, spełniające warunek

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [(y \in X \Rightarrow x \leqslant y) \Leftrightarrow x \leqslant t].$$

Udowodnić, że dla każdego skończonego podzbioru zbioru L istnieje kres dolny.

D2.9. Sformułować (analogicznie do zadania D2.8) pojęcie *kresu górnego*. Udowodnić analogiczne twierdzenie.

D2.10. Znaleźć kratę $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ oraz zbiór $X \subset L$ taki, że X nie posiada kresu dolnego. Czy można znaleźć przykład, w którym zbiór L byłby skończony?

D2.11. Niech $\bigcap X$, $\bigcup X$ oznaczają odpowiednio kres górny i dolny zbioru $X \subset L$ (o ile istnieją). Niech X i Y będą skończonymi podzbiorami zbioru L. Udowodnić, że:

a) $\bigcap X \wedge \bigcap Y = \bigcap (X \cup Y)$, b) $\bigcup X \vee \bigcup Y = \bigcup (X \cup Y)$.

D2.12. W zbiorze $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ wprowadzamy relację $\sim$ wzorem $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(X - Y) \cup (Y - X)$ jest zbiorem skończonym. Jest to relacja równoważności, w zbiorze jej klas abstrakcji wprowadzamy relację $\leqslant$ wzorem $[A] \leqslant [B] \Leftrightarrow A - B$ jest zbiorem skończonym. Udowodnić, że w zbiorze $\mathcal{N}/_\sim$ można wprowadzić działania $\wedge$ i $\vee$ tak, że otrzymamy kratę, a częściowy porządek wyznaczony przez działania $\wedge$ i $\vee$ jest identyczny z $\leqslant$. Udowodnić, że definicja relacji $\leqslant$ jest poprawna, to znaczy, że nie zależy od wyboru reprezentantów.

D2.13. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ będzie kratą. W zbiorze L określamy działania $\wedge'$ i $\vee'$ wzorami $a\wedge' b = a\vee b$, $a\vee' b = a\wedge b$. Udowodnić, że $\mathfrak{L}' = \langle L, \wedge', \vee'\rangle$ jest kratą.

D2.14. Niech $\langle X, D\rangle$ będzie przestrzenią topologiczną, D — rodziną domkniętych podzbiorów X. W zbiorze D określamy działania $\wedge$ i $\vee$ wzorami $A\wedge B = A\cap B$, $A\vee B = A\cup B$. Udowodnić, że system relacyjny $\langle D, \wedge, \vee\rangle$ jest kratą rozdzielną.

D2.15. Krata $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywa się kratą modularną, jeśli spełniony jest w niej warunek: L 4 1/2 $a\leqslant c \Rightarrow a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge c$. Udowodnić, że każda liczba rozdzielna jest modularna.

D2.16. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by krata była modularna jest, by nie zawierała podkraty pięcioelementowej $\langle\{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee\rangle$, w której porządek $\leqslant$ posiada diagram (rys. 45, str. 253).

D2.17. Wskazać przykłady kraty rozdzielnej, kraty nierozdzielnej. Jaka własność aksjomatu L5 jest w ten sposób udowodniona?

D2.18. Wskazać przykłady:

a) kraty niemodularnej,

b) kraty modularnej ale nierozdzielnej.

D2.19. W zbiorze $\mathscr{P}(X^2)$, tj. wszystkich relacji w zbiorze X relacja $\subset$ jest częściowym porządkiem. Udowodnić, że w zbiorze tym można tak określić działania $\wedge$ i $\vee$, by wyznaczona przez nie relacja $\leqslant$ była identyczna z $\subset$.

D2.20. W zbiorze T wszystkich relacji równoważności o polu X relację $\subset$ wyznacza częściowy porządek. Udowodnić, że można tak określić działania $\wedge$ i $\vee$ w zbiorze T, by wyznaczony przez nie porządek $\leqslant$ był identyczny z $\subset$.

D2.21. Udowodnić, że układ aksjomatów L1-L5 jest zbyt obszerny, na przykład:

a) L1 jest zależne od pozostałych,

b) L5 a i L1 b jest zależne od pozostałych,

c) L5 b jest zależne od pozostałych.

D2.22. Załóżmy, że $O \neq X\subset L$ ma oba kresy. Udowodnić, że

a) $\bigcap X\leqslant x$ dla $x\in X$,

b) $x\leqslant \bigcup X$ dla $x\in X$,

c) $\bigcap X\leqslant \bigcup X$.

D2.23. Udowodnić, że jeżeli niepusty zbiór $X\subset L$ ma kres górny, to zbiór elementów w postaci $a \vee x$ (gdzie a jest ustalonym elementem, $x \in X$) też ma kres górny i zachodzi równość

$$a \vee \bigcup X = \bigcup \{a \vee x : x \in X\}.$$

D2.24. Przy analogicznych założeniach jak w zadaniu D2.22 udowodnić, że

$$a \wedge \bigcap X = \bigcap \{a \wedge x : x \in X\}.$$

D2.25. Niech $\{a_t : t \in T\}$, $\{b_t : t \in T\}$ będą rodzinami elementów zbioru L. Niech $\bigwedge_{t \in T} a_t \leqslant b_t$ i niech istnieją kresy dolne i górne obu zbiorów, wtedy

a) $\bigcap_{t \in T} a_t \leqslant \bigcap_{t \in T} b_t$, b) $\bigcup_{t \in T} a_t \leqslant \bigcup_{t \in T} b_t$,

gdzie $\bigcap_{t \in T} a_t = \bigcap \{a_t : t \in T\}$, zaś $\bigcup_{t \in T} a_t = \bigcup \{a_t : t \in T\}$.

D2.26. Przy założeniach zadania D2.25 udowodnić, że jeżeli rodziny $\{a_t \vee b_t : t \in T\}$, $\{a_t \wedge b_t : t \in T\}$ mają odpowiednie kresy górny i dolny, to:

a) $\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t) = \bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t$,

b) $\bigcap_{t \in T} (a_t \wedge b_t) = \bigcap_{t \in T} a_t \wedge \bigcap_{t \in T} b_t$,

c) $\bigcap_{t \in T} a_t \vee \bigcap_{t \in T} b_t \leqslant \bigcap_{t \in T} (a_t \vee b_t)$.

D2.27. Krata $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywa się *zupełną* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej podzbiór niepusty posiada kres górny i dolny. Znaleźć przykład kraty zupełnej i kraty niezupełnej. Udowodnić, że każda krata skończona jest zupełna.

D2.28. Element $a \in L$ nazywa się *zerem* (*jednością*) w kracie $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ jeśli spełnia on warunek

$$\bigwedge_x (a \wedge x = a) \; [\bigwedge_x (a \vee x = a)].$$

a) Udowodnić, że w kracie jest co najwyżej jedno zero.

b) Udowodnić, że w kracie jest co najwyżej jedna jedność.

c) Znaleźć kratę z jednością, ale bez zera.

d) Znaleźć kratę z zerem, ale bez jedności.

e) Czy w kracie zero może być równocześnie jednością?

D2.29. Niech krata $\mathfrak{L}'$ będzie kratą określoną w zadaniu D2.13.

a) Udowodnić, że jeśli krata ma zero, to krata $\mathfrak{L}'$ ma jedność.

b) Udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia a.

c) Udowodnić analogiczne do a twierdzenie w przypadku, gdy krata $\mathfrak{L}$ ma jedność.

d) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{L}$ ma zero i jedność, to $\mathfrak{L}'$ także je posiada.

e) Czy jeśli $\mathfrak{L}$ jest kratą rozdzielną, to $\mathfrak{L}'$ także jest kratą rozdzielną?

f) Czy jeśli $\mathfrak{L}$ jest kratą modularną, to $\mathfrak{L}'$ także jest kratą modularną?

D2.30. *Idealem* w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy niepusty podzbiór $I \subset L$ spełniający warunki:

I1 $a \in I \wedge b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$,

I2 $a \in I \wedge b \leqslant a \Rightarrow b \in I$.

Udowodnić, że L jest ideałem w $\mathfrak{L}$.

D2.31. Udowodnić, że warunki I1 i I2 mogą być zastąpione jednym I1$^1/_2$

$$a \in I \wedge b \in I \Leftrightarrow a \vee b \in I.$$

D2.32. Udowodnić, że jeśli 0 jest zerem w kracie $\mathfrak{L}$, to

a) $\{0\}$ jest ideałem w $\mathfrak{L}$.

b) 0 należy do każdego ideału w $\mathfrak{L}$.

c) $\{0\}$ jest częścią wspólną wszystkich ideałów w $\mathfrak{L}$.

D2.33. Udowodnić, że jeśli $a \in L$, to zbiór $(a) = \{b : b \leqslant a\}$ jest ideałem w kracie $\mathfrak{L}$. Nazywamy go *ideałem głównym* wyznaczonym przez a.

D2.34. Udowodnić, że na to, by w kracie $\mathfrak{L}$ istniało zero potrzeba i wystarcza, by część wspólna wszystkich ideałów w $\mathfrak{L}$ była niepusta.

D2.35. *Filtrem* w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy podzbiór niepusty $F \subset L$ spełniający warunki:

F1 $a \in F \wedge b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$,

F2 $a \in F \wedge a \leqslant b \Rightarrow b \in F$.

Udowodnić, że L jest filtrem w $\mathfrak{L}$.

Co oznacza znak $\wedge$ w poprzedniku zdania F1, a co w następniku?

D2.36. Udowodnić, że warunki F1, i F2 mogą być zastąpione jednym F1$^1/_2$

$$a \in F \wedge b \in F \Leftrightarrow a \wedge b \in F.$$

D2.37. Udowodnić, że jeśli 1 jest jednością w kracie $\mathfrak{L}$, to

a) $\{1\}$ jest filtrem w $\mathfrak{L}$.

b) 1 należy do każdego filtru w $\mathfrak{L}$.

c) $\{1\}$ jest częścią wspólną wszystkich filtrów w $\mathfrak{L}$.

D2.38. Udowodnić, że jeśli $a \in L$, to zbiór $[a] = \{b : a \leqslant b\}$ jest filtrem w $\mathfrak{L}$. Nazywamy go *filtrem głównym* wyznaczonym przez a.

D2.39. Udowodnić, że w kracie skończonej każdy ideał i każdy filtr są główne.

D2.40. Udowodnić, że jeśli w kracie zupełnej $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ porządek $\leqslant$ wyznaczony przez działania $\wedge$ i $\vee$ jest porządkiem liniowym, to każdy ideał w $\mathfrak{L}$ jest główny. Wskazać przykład dowodzący, że warunek zupełności jest istotny.

D2.41. Udowodnić, że w kracie zupełnej istnieje zero i jedność. Wywnioskować stąd, że w każdej kracie skończonej istnieje zero i jedność.

D2.42. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ będzie kratą, a $\leqslant$ porządkiem wyznaczonym przez działania. Udowodnić, że jeżeli dla każdego podzbioru $X \subset L$, $\langle X, \leqslant \rangle$ jest kratą (to znaczy kresy par elementów z X są w X), to $\leqslant$ jest porządkiem liniowym. Udowodnić, że wystarczy, by wymienioną własność posiadały podzbiory skończone (a nawet dwuelementowe).

D2.43. Udowodnić, że jeśli w kracie rozdzielnej z zerem i jednością $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ spełniony jest warunek

$$\bigvee_b [(a \wedge b = 0) \wedge (a \vee b = 1)],$$

to element b jest wyznaczony przez a jednoznacznie.

Algebrą Boole'a nazywamy system relacyjny $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ taki, że $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ jest kratą rozdzielną z zerem i jednością, zaś działanie $\sim$ jest działaniem jednoargumentowym i spełnia warunki:

$$a \wedge \sim a = 0, \quad a \vee \sim a = 1.$$

D2.44. Udowodnić, że jeżeli $a \vee b = 1$ i $a \wedge b = 0$, to $b = \sim a$.

D2.45. Udowodnić, że $\sim \sim a = a$, $p \leqslant q \Leftrightarrow \sim q \leqslant \sim p$.

D2.46. Udowodnić prawa de Morgana:

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q, \quad \sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q.$$

D2.47. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$. Dla kraty $\mathfrak{a}_0 = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ przeprowadzamy konstrukcję opisaną w zadaniu D2.13. Jak należy zdefiniować działania $\sim'$, stałe $0'$ i $1'$, by system $\mathfrak{a}' = \langle A, \wedge', \vee', \sim', 0', 1' \rangle$ był algebrą Boole'a? Jeśli I był ideałem w $\mathfrak{a}$, czym będzie w $\mathfrak{a}'$? Czym w $\mathfrak{a}'$ będzie zbiór F, który w $\mathfrak{a}$ był filtrem?

D2.48. W zbiorze $2 = \{0, 1\}$ wprowadzamy działania $\wedge, \vee$ i $\sim$ wzorami:

$$x \wedge y = \min(x, y) \quad x \vee y = \max(x, y) \quad \sim x = 1 - x.$$

Udowodnić, że system $\mathbf{2} = \langle 2, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.49. Niech $\langle X, O\rangle$ będzie przestrzenią topologiczną, O rodziną zbiorów otwartych w X, Cl operacją domknięcia, zaś Int operacją wnętrza w tej topologii.

Zbiorem *regularnym* otwartym nazywamy zbiór A taki, że $A = \mathrm{Int}[\mathrm{Cl}(A)]$. W rodzinie wszystkich zbiorów regularnych otwartych wprowadzamy działania

$$A \wedge B = A \cap B, \quad A \vee B = \mathrm{Int}[\mathrm{Cl}(A \cup B)], \quad \sim A = X - \mathrm{Cl}\, A,$$
$$0 = O, \quad 1 = X.$$

Udowodnić, że zdefiniowaliśmy algebrę Boole'a.

D2.50. Algebra Boole'a $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ jest *zupełna* jeśli krata $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ jest zupełna. Udowodnić, że jeśli kres górny i dolny w algebrze rozważanej w zadaniu D2.49 określimy jako:

$$\bigcap_{t \in T} X_t = \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}(\bigcap_{t \in T} X_t), \qquad \bigcup_{t \in T} X_t = \mathrm{Int}[\mathrm{Cl}\,(\bigcup_{t \in T} X_t)],$$

gdzie znaki $\bigcap$ i $\bigcup$ po lewej stronie oznaczają kresy, zaś po prawej zwyczajne działania mnogościowe, to rozważana algebra jest zupełna.

D2.51. Udowodnić, że jeśli kres górny $\bigcup_{t \in T} a_t$ istnieje, to kres dolny $\bigcap_{t \in T} (\sim a_t)$ także istnieje i $\sim \bigcup_{t \in T} a_t = \bigcap_{t \in T} (\sim a_t)$. Analogicznie dla kresu górnego.

D2.52. Filtr F w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywamy pierwszym, jeśli $a \vee b \in F \rightarrow a \in F \vee b \in F$. Udowodnić, że w algebrze Boole'a warunek ten jest równoważny następującemu: $a \in F$ lub $\sim a \notin F$. Wprowadzić pojęcie ideału pierwszego i udowodnić analogiczne twierdzenie.

D2.53. Filtrem (ideałem) właściwym w kracie $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee\rangle$ nazywamy taki filtr (ideał), który jest różny od L. Filtr F (ideał I) nazywamy *maksymalnym*. Filtr maksymalny nazywamy też *ultrafiltrem*, jeśli nie istnieje taki właściwy filtr F' (ideał I'), że $F \subset F'$ i $F \neq F'$ ($I \subset I'$ i $I \neq I'$).

Udowodnić, że w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ filtr pierwszy właściwy jest maksymalny. Udowodnić twierdzenie odwrotne.

D2.54. Udowodnić, że dla każdego filtru właściwego istnieje maksymalny filtr właściwy zawierający go.

D2.55. Udowodnić, że dla ustalonego elementu $a \in A$, dla każdego filtru F, nie zawierającego a istnieje maksymalny filtr G nie zawierający a i taki, że $F \subset G$.

D2.56. *Homomorfizmem Boole'a* nazywamy odwzorowanie $f: A \to A_1$, gdzie $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i $\mathfrak{a}^* = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$ są algebrami Boole'a i spełniające warunki:

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee_1 f(b),$$
$$f(\sim a) = \sim_1 f(a), \quad f(0) = 0_1, \quad f(1) = 1_1.$$

Udowodnić, że jeśli f jest homomorfizmem Boole'a, to $f^{-1} * \{1_1\}$ jest filtrem, a $f^{-1} * \{0_1\}$ ideałem w A.

Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i $\mathfrak{a}_1 = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$ będą algebrami Boole'a. Mówimy, że $\mathfrak{a}$ izomorficzne z $\mathfrak{a}_1$ ($\mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}_1$) jeśli istnieje homomorfizm Boole'a $f: A \xrightarrow[1-1]{\text{na}} A_1$.

Taki homomorfizm nazywamy *izomorfizmem*.

D2.57. Udowodnić, że jeśli F jest filtrem maksymalnym właściwym w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, zaś odwzorowanie h zbioru A w 2 jest określone wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in F, \\ 0, & \text{jeśli } x \notin F, \end{cases}$$

to jest homomorfizmem Boole'a.

Udowodnić twierdzenie odwrotne.

D2.58. Udowodnić, że każda algebra Boole'a $\mathfrak{a}$ zawiera podalgebrę izomorficzną z **2**.

D2.59. Niech φ będzie wyrażeniem rachunku zdań, zaś T_φ zbiorem zmiennych zdaniowych w φ. Odwzorowanie v zbioru T_φ w algebrę Boole'a rozszerzamy przez indukcję jak następuje:

$$v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q), \quad v(p \vee q) = v(p) \vee v(q), \quad v(\sim p) = \sim v(p),$$
$$v(p \Rightarrow q) = \sim v(p) \vee v(q), \quad v(p \Leftrightarrow q) = (v(p) \wedge v(q)) \vee (\sim v(p) \wedge \sim v(q)).$$

Udowodnić, że formuła φ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy przy dowolnym wartościowaniu v w dowolnej algebrze Boole'a przybiera wartość 1.

D2.60. Udowodnić, że jeżeli I jest ideałem w $\mathfrak{a}$, to $\{x : \sim x \in I\}$ jest filtrem i na odwrót.

Udowodnić, że analogiczne twierdzenie zachodzi dla filtrów pierwszych.

D2.61. Niech F będzie filtrem w $\mathfrak{a}$, definiujemy relację $\sim_F$ w A jak następuje:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow [(x \vee \sim y) \wedge (y \vee \sim x)] \in F.$$

Udowodnić, że $\sim_F$ jest relacją równoważności.

Zdefiniować działania w $A/_{\sim F}$ tak, by otrzymać algebrę Boole'a.

D2.62. Udowodnić, że jeśli h jest epimorfizmem Boole'a (tj. homomorfizmem „na"), to $h(\mathfrak{a}) \approx \mathfrak{a}/_{\sim F}$, gdzie F jest przeciwobrazem jedności.

D2.63. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, $\mathfrak{a}_1 = \langle A_1, \wedge_1, \vee_1, \sim_1, 0_1, 1_1\rangle$ będą dwiema algebrami Boole'a. W produkcie $A \times A_1$ definiujemy działania $\wedge'$, $\vee'$, $\sim'$, $0_1'$, $1'$ jak następuje:

$$\langle a, a_1\rangle \wedge' \langle b, b_1\rangle = \langle a \wedge b, a_1 \vee_1 b_1\rangle,$$

$$\langle a, a_1\rangle \vee' \langle b, b_1\rangle = \langle a \vee b, a_1 \wedge_1 b_1\rangle, \qquad \sim'\langle a, a_1\rangle = \langle \sim a, \sim_1 a_1\rangle,$$

$$0' = \langle 0, 1_1\rangle, \qquad 1' = \langle 1, 0_1\rangle.$$

Udowodnić, że $\langle A \times A_1, \wedge', \vee', \sim', 0', 1'\rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.64. Niech $\{\mathfrak{a}_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną algebr Boole'a $\mathfrak{a}_t = \langle A_t, \wedge_t, \vee_t, \sim_t, 0_t, 1_t\rangle$.

Definiujemy $\prod_{t \in T} \mathfrak{a}_t = \langle \underset{t \in T}{P} A_t, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$, gdzie działania $\wedge$, $\vee$, $\sim$, 0, 1 są określone wzorami:

$$f \wedge g = h \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} h(t) = f(t) \wedge_t g(t),$$

$$f \vee g = h \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} h(t) = f(t) \vee_t g(t),$$

$$\sim f = g \Leftrightarrow \bigwedge_{t \in T} g(t) = \sim_t f(t),$$

$$0 = \{\langle t, 0_t\rangle : t \in T\}, \qquad 1 = \{\langle t, 1_t\rangle : t \in T\}.$$

Udowodnić, że $\prod_{t \in T} \mathfrak{a}_t$ jest algebrą Boole'a.

D2.65. Element $a \in A$ nazywamy *atomem*, jeśli

$$\bigwedge_x [a \wedge x \neq a \Rightarrow a \wedge x = 0].$$

Algebra Boole'a nazywa się *atomowa*, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje atom a taki, że $a \leqslant x$.

Udowodnić, że dla każdego zbioru X algebra Boole'a $\langle \mathscr{P}(X), \cap, \cup, -, 0, X\rangle$ jest atomowa.

Podać przykład nieatomowej algebry Boole'a.

D2.66. Udowodnić, że każda skończona algebra Boole'a jest atomowa.

D2.67. Niech $\mathfrak{a}$ będzie zupełną atomową algebrą Boole'a, zaś At zbiorem wszystkich atomów algebry $\mathfrak{a}$. Udowodnić, że odwzorowanie $h : A \to \mathscr{P}(At)$ określone w następujący sposób: $h(a) = \{x \in At : x \leqslant a\}$ jest izomorfizmem $\mathfrak{a}$ i $\langle \mathscr{P}(At), \cap, \cup, -, At \rangle$.

D2.68. Udowodnić, że jeżeli $\mathfrak{a}$ jest skończoną algebrą Boole'a, to istnieje liczba naturalna n taka, że $\overline{\overline{A}} = 2^n$.

D2.69. Udowodnić, że a jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy filtr $[a]$ jest pierwszy.

D2.70. Udowodnić, że a jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa filtry F_1 i F_2 takie, że $a \in F_1 \cap F_2$ są równe.

D2.71. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ będzie algebrą Boole'a, zaś X będzie zbiorem wszystkich filtrów właściwych w $\mathfrak{a}$. Każdemu $a \in A$ przyporządkowujemy zbiór $X_a \subset X$ filtrów pierwszych zawierających a.

Udowodnić, że

a) $X_a \cap X_b = X_{a \wedge b}$,

b) $X_a \cup X_b = X_{a \vee b}$,

c) $X - X_a = X_{\sim a}$.

D2.72. Udowodnić, że definiując w X topologię przez zadanie bazy, której elementami są zbiory postaci X_a dla $a \in A$, otrzymujemy zwartą i zerowymiarową przestrzeń Hausdorffa.

D2.72. Udowodnić następujące twierdzenie: Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z algebrą wszystkich podzbiorów otwartodomkniętych pewnej przestrzeni topologicznej.

D2.74. Algebra $\mathfrak{a}$ nazywana jest *gęstą* wtedy i tylko wtedy, gdy $\leqslant$ jest gęstym porządkiem. Udowodnić, że algebra gęsta jest zawsze bezatomowa.

D2.75. *Pierścieniem Boole'a* nazywamy pierścień przemienny z jednością, w którym każdy element jest idempotentny, to znaczy $\bigwedge\limits_a a^2 = a$. Udowodnić, że jeśli działanie $\dot{-}$ w algebrze Boole'a $\mathfrak{a} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ jest zdefiniowane wzorem $a \dot{-} b = (\sim a \wedge b) \vee (\sim b \wedge a)$, to system relacyjny $\langle A, \wedge, \dot{-}, 0, 1 \rangle$ jest pierścieniem Boole'a.

Co jest odejmowaniem w tym pierścieniu? Sprawdź, że w pierścieniu Boole'a dla każdego a mamy $a \dot{-} a = 0$.

D2.76. Niech $\mathscr{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ będzie pierścieniem przemiennym z jednością. Udowodnić, że zbiór W elementów idempotentnych pierścienia

$\mathscr{P}$ z działaniami $\cdot'$ i $+'$, gdzie $a\cdot' b = a\cdot b$, $a+'b = a+b-2ab$ jest pierścieniem Boole'a.

D2.77. Niech $\mathscr{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ będzie pierścieniem Boole'a. Definiujemy działania $\wedge, \vee, \sim$, wzorami:

$$a\wedge b = a\cdot b, \quad a\vee b = a+b+a\cdot b, \quad \sim a = 1+a.$$

Udowodnić, że $\mathfrak{a} = \langle P, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ jest algebrą Boole'a.

D2.78. *Zbiór wielomianów Boole'a* definiujemy przez indukcję jak następuje:

a) Każda zmienna jest wielomianem; 0, 1 są wielomianami.

b) Jeśli f i g są wielomianami, to $f\wedge g, f\vee g, \sim f$ są także wielomianami.

c) Każdy wielomian powstaje ze zmiennych 0, 1 poprzez skończoną ilość zastosowań operacji z punktu b. Wielomian f nazywamy *normalnym*, jeśli ma on postać $f = u_1\vee\ldots\vee u_n$, gdzie $u_i = v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}$, zaś każde z v_j jest postaci x_j bądź $\sim x_j$, gdzie x_j jest zmienną.

Udowodnić, że dla każdego wielomianu f istnieje wielomian normalny f_1 taki, że dla dowolnej algebry Boole'a $\mathfrak{b} = \langle B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ i dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in B$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n).$$

D2.79. Jaki jest związek zadania D2.78 i zadania 1.80?

D2.80. Niech $\mathfrak{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ będzie kratą rozdzielną z zerem i jednością. Element $a\in L$ nazywamy *boolowskim*, jeśli istnieje $b\in L$ takie, że $a\wedge b = 0$, $a\vee b = 1$.

Udowodnić, że podkrata złożona z elementów boolowskich tworzy algebrę Boole'a.

D2.81. Niech $\mathfrak{b} = \langle B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ będzie algebrą Boole'a $\mathfrak{b}^n = \underbrace{\mathfrak{b}\times\ldots\times\mathfrak{b}}_{n}$, wreszcie $P = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_1 \geqslant x_2 \geqslant, \ldots, \geqslant x_n\}$.

Udowodnić, że P wraz z działaniami wziętymi z $\mathfrak{b}^n$ jest kratą rozdzielną z zerem i jednością.

Udowodnić, że algebra Boole'a elementów boolowskich kraty $\mathfrak{p}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{b}$.

D2.82. Czy podkrata algebry Boole'a musi być algebrą Boole'a?

ODPOWIEDZI, WSKAZÓWKI, ROZWIĄZANIA

DO ROZDZIAŁU I

1.1. Rozważymy formułę $\sim(\sim p \vee \sim q)$, udowodnimy, że może ona służyć za definicję funktora B_1, w tym celu zbadamy wartości przyjmowane przez tę formułę w zależności od wartości p oraz q; mamy

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1

Formuła $\sim(\sim p \vee \sim q)$ przyjmuje więc przy dowolnym wartościowaniu wartość taką samą jak $p \wedge q$ i może służyć za definicję $\wedge$ w terminach $\sim$ i $\vee$.

1.2. $p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

1.3. $p \vee q \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$.

1.4. Rozpatrzyć wszystkie funktory, które można zdefiniować za pomocą funktorów $\wedge$ i $\vee$.

1.5. Zbadać wszystkie własności wyrażeń $p \Leftrightarrow q$ oraz $p \Leftrightarrow \sim q$.

1.6. Udowodnić, że $\sim p \Leftrightarrow (p \Rightarrow A_0 p)$, a następnie skorzystać z wyniku zadań 1.3 i 1.2 oraz z faktu, że $p \Leftrightarrow q$ równoważne jest $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

1.7. Zauważyć, że $\sim p \Leftrightarrow B_8(p, p)$, jak również $B_8(p, q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, a zatem $p \wedge q \Leftrightarrow B_8[B_8(p, p),\ B_8(q, q)]$. Ponieważ zaś (por. zadanie 1.2) alternatywa może być zdefiniowana za pomocą koniunkcji i negacji, podobnie implikacja $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q))$ i równoważność, zatem B_8 wystarcza do zdefiniowania spójników: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, a stąd i pozostałych funktorów. Podobnie $\sim p \Leftrightarrow B_{14}(p, p)$, $p \vee q \Leftrightarrow B_{14}[B_{14}(p, p),\ B_{14}(q, q)]$ itd.

1.8. Wskazówka. Dowód definiowalności dowolnego funktora

n argumentowego przeprowadzamy przez indukcję. Przypuśćmy, że dla liczby naturalnej n potrafimy już zdefiniować wszystkie funktory n-argumentowe. Niech $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ będzie funktorem $n+1$ argumentowym. Wtedy $f(x_1, \ldots, x_n, 0)$ oraz $f(x_1, \ldots, x_n, 1)$ są funktorami n-argumentowymi. Niech odpowiednio $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$ i $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$ będą definicjami dla funktorów $f(x_1, \ldots, x_n, 1)$ i $f(x_1, \ldots, x_n, 0)$, wtedy $[x_{n+1} \wedge \Phi_1(x_1, \ldots, x_n)] \vee \vee [\sim x_{n+1} \wedge \Phi_2(x_1, \ldots, x_n)]$ jest definicją dla $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Ponieważ zaś za pomocą B_8 (bądź też B_{14}) potrafimy zdefiniować spójniki $\sim$, $\vee$, $\wedge$, a zatem także $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Autorzy spodziewają się, że resztę dowodu czytelnik już będzie umiał przeprowadzić.

1.9. 2^n.

1.19. Gdyby rozważane wyrażenie nie było tautologią, to istniałoby wartościowanie, przy którym wartości obu stron równoważności byłyby różne. Wystarczy zatem udowodnić, że jeżeli $w(p \Rightarrow q) = 0$, to $w(\sim q \Rightarrow \sim p) = 0$ i na odwrót. Jeśli $w(p \Rightarrow q) = 0$, to $w(p) = 1$ i $w(q) = 0$, a zatem

$$w(\sim q) = 1, \quad w(\sim p) = 0 \quad \text{i} \quad w(\sim q \Rightarrow \sim p) = 0.$$

Odwrotnie $w(\sim q \Rightarrow \sim p) = 0$ pociąga za sobą $w(\sim q) = 1$ i $w(\sim p) = 0$, czyli $w(p) = 1$ i $w(q) = 0$, a zatem $w(p \Rightarrow q) = 0$.

1.22. Gdyby przy wartościowaniu w było $w[(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p] = 0$, to $w(p) = 0$ i $w(\sim p \Rightarrow p) = 1$, ale jeśli $w(p) = 0$, to $w(\sim p) = 1$ i $w(\sim p \Rightarrow p) = 0$, co jest niemożliwe.

1.33. Tak. Jeśli $w(q) = 0$, to $w[(p \vee q) \wedge \sim p] = w[(p \vee 0) \wedge \sim p] = = w(p \wedge \sim p) = 0$, a stąd przy żadnym wartościowaniu formuła nasza nie przyjmuje wartości 0.

1.34. Tak.

1.35. Tak.

1.36. Nie. Zbadać wartościowanie w takie, że $w(p) = 1$, $w(q) = 0$.

1.37. Nie. Zbadać wartościowanie w takie, że $w(p) = 0$, $w(q) = 1$.

1.38. Tak.

1.39. Tak. Skorzystać z tautologii $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

1.40. Tak. Skorzystać z tego, że dla dowolnego wartościowania w mamy $w(q \wedge \sim q) = 0$.

1.41. Nie. Skorzystać z następującej własności wartościowań: $w(p \vee q) = = 0 \Leftrightarrow w(p) = 0 \wedge w(q) = 0$.

1.42. Nie. Rozważyć wartościowanie w takie, że $w(p) = 1$, $w(q) = 0$.

1.43. Tak. Jeśli $w(p \Rightarrow q) = 0$, to $w(p) = 1$ i $w(q) = 0$, ale wtedy $w(p \wedge q) = 0$.

1.44. Tak.

1.45. Tak. Jeśli $w(p \vee r \Rightarrow q \vee s) = 0$, to $w(q) = 0$, $w(s) = 0$ i albo $w(p) = 1$ albo $w(r) = 1$, ale wtedy $w(p \Rightarrow q) = 0$ lub $w(r \Rightarrow s) = 0$.

1.46. Tak.

1.47. Tak. Przeprowadzić rozumowanie analogicznie jak w zadaniu 1.45.

1.48. Nie. Rozważyć wartościowanie w takie, że $w(p) = w(q) = w(r) = 0$.

1.49. Tak. Skorzystać z wyniku zadania 1.26 i tautologii $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

1.50. Tak. Porównać rozważane wyrażenie z tautologią $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$.

1.51. Tak. Mamy $p \wedge q \Rightarrow p$; $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

1.52. Tak. Należy zauważyć, że jeśli $w(q \vee r) = 0$, to $w(q) = w(r) = 0$, zaś $w(p \wedge s) = 1$ pociąga za sobą $w(p) = w(s) = 1$, a stąd $w(p \Rightarrow q) = 0$.

1.53. Tak.

1.54. Tak. Jeśli $w(p \Rightarrow q) = 0$, to $w(p) = 1$ i $w(q) = 0$, a wtedy $w(p \wedge q) = 0$ i $w(p \wedge q \Leftrightarrow p) = 0$. Jeśli $w(p \wedge q \Leftrightarrow p) = 0$, to $w(p) = 1$ i $w(q) = 0$ itd.

1.55. Tak.

1.56. Tak.

1.57. Nie. Rozpatrzmy wartościowanie w takie, że $w(p) = w(q) = 0$, $w(r) = 1$. Zauważmy, że szukając kontrprzykładu musimy szukać takiego wartościowania, by $w(p \wedge q) = 0$, zaś $w(r) = 1$.

1.58. Tak.

1.59. Nie. Należy rozważyć wartościowanie w, przy którym $w(p) = w(s) = 1$, $w(q) = w(r) = 0$.

1.60. Tak.

1.61. Tak.

1.62. Tak. Rozważyć tautologię $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$.

1.63. Tak.

1.64. Tak.

1.65. Nie. Wyrażenie $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ nie jest tautologią.

1.66. Tak. Skorzystać z tautologii $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

1.67. Tak.

1.68. Tak.

1.69. Tak. Skorzystać z tautologii $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

1.70. Tak. Skorzystać z tautologii $p \Leftrightarrow \sim\sim p$.

1.71. Nie.

1.75. Interpretacja funktorów jest następująca:

$$\sim p = 1-p, \quad p \vee q = p \cdot q, \quad p \wedge q = p+q-pq, \quad p \Rightarrow q = (1-p)q.$$

1.76. Dowód może być przeprowadzony przez indukcję ze względu na n, bądź przez prostą obserwację, że stosując interpretację opisaną w zadaniu 1.75 otrzymujemy wartość rozważanego wyrażenia $(1-w\Phi_1)\ldots$ $\ldots(1-w\Phi_n)w\Psi$. Ponieważ zaś Ψ jest stale równa 0, zatem i całe wyrażenie przybiera stale wartość 0, a zatem jest tautologią.

1.77. Można zastosować interpretację z zadania 1.75.

1.78. Dla n parzystych. Należy zastosować dowód przez indukcję bądź interpretację z zadania 1.75.

1.79. Zastosować interpretację z zadania 1.75.

1.80. Skorzystać z tautologii:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)], \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q),$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)], \quad \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q),$$

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q).$$

1.82. Skorzystać z tautologii:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p),$$

$$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$$

oraz z faktu, że jeśli Φ jest tautologią, to $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy Ψ jest tautologią.

1.83. a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p \wedge r)$ (można uprościć do $(p \wedge q)$),

b) $(q \wedge \sim p) \vee p$,

c) $\sim p \vee (q \wedge \sim p)$,

d) $p \vee \sim q \vee \sim p \vee (q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge p)$ (wyrażenie to jest tautologią).

1.84. a) $p \wedge q$,

b) $(q \vee p) \wedge (\sim p \vee p)$ (może być uproszczone do $(q \vee p)$),

c) $(\sim p \vee q) \wedge \sim p$ (może być uproszczone do $\sim p$),

d) jest wiele prostych formuł równoważnych, jedną z nich jest $p \vee \sim p$.

1.85. Porównać z zadaniem 1.82.

1.86. Dowód przeprowadzić przez indukcję ze względu na stopień komplikacji formuły Φ korzystając z praw de Morgana, tj. zadań 1.17 i 1.18.

1.87. Należy zastosować rozumowanie indukcyjne.

1.88. $[x-3 > 0] \vee [(x+3) < 0] \vee [(x+2) \geqslant 0 \wedge (x-2) \leqslant 0]$.

Korzystając z prawa $a/b \geqslant 0 \Leftrightarrow (a \cdot b \geqslant 0 \wedge b \neq 0)$ stwierdzamy, że nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$(x^2-4)(x^2-9) \geqslant 0 \wedge x^2-9 \neq 0,$$

czyli

$$(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \geqslant 0 \wedge (x-3) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0.$$

Korzystając z własności $ab \geqslant 0 \Leftrightarrow [(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0) \vee (a \leqslant 0) \wedge (b \leqslant 0)]$ otrzymujemy następującą funkcję zdaniową:

$$\{[(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2)(x-3)(x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2)(x-3)(x+3) \vee \leqslant 0]\} \wedge (x-3) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0.$$

Przekształcając kolejno otrzymujemy funkcję zdaniową

$$\{[(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3)(x+3) \geqslant 0] \vee [(x-2) \geqslant 0 \wedge$$
$$\wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3)(x+3) \leqslant 0] \vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge$$
$$\wedge (x-3)(x+3) \geqslant 0] \vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3)(x+3) \leqslant 0]\} \wedge$$
$$\wedge (x-3) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0$$

i wreszcie

$$\{[(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \leqslant 0 \wedge (x+3) \leqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \leqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3) \leqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \leqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \leqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3) \leqslant 0 \wedge (x+3) \leqslant 0]\} \wedge$$
$$\wedge (x-3) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0.$$

Drugi, trzeci, czwarty, piąty i siódmy człon alternatywny są sprzeczne; np. trzeci; warunek $x-2 \geqslant 0$ pociąga za sobą $(x+3) \geqslant 0$. Stąd też korzystając z wyniku zadania 1.72 a i b wnioskujemy, że rozważana funkcja zdaniowa równoważna jest następującej funkcji zdaniowej:

$$\{[(x-2) \geqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \geqslant 0 \wedge (x-3) \geqslant 0 \wedge (x+3) \geqslant 0] \vee$$
$$\vee [(x-2) \leqslant 0 \wedge (x+2) \leqslant 0 \wedge (x-3) \leqslant 0 \wedge (x+3) \leqslant 0]\} \wedge$$
$$\wedge (x-3) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0.$$

Korzystając teraz wielokrotnie z tautologii rozważanej w zadaniu 1.52 otrzymujemy funkcję zdaniową

$$\{(x-3) \geqslant 0 \vee (x+3) \leqslant 0 \vee [(x+2) \geqslant 0 \wedge (x-2) \leqslant 0]\} \wedge$$
$$\wedge (x+3) \neq 0 \wedge (x-3) \neq 0.$$

Po zastosowaniu praw rozdzielności (zad. 1.48, 1.49) i prawa z zadania 1.72 otrzymujemy rozwiązanie nierówności: $3 < x \vee -2 \leqslant x \leqslant 2 \vee \vee x < -3$.

1.89. $(x+2) \leqslant 0 \vee (x-1) \geqslant 0$.

1.90. Nierówność zachodzi dla każdego x.

1.91. $(x+2) < 0 \vee [(x-1) \geqslant 0 \wedge (x-2) < 0] \vee (x-5) \geqslant 0$.

1.92. $[(x+1) > 0 \wedge (x-1) < 0] \vee (x-\sqrt[3]{2}) \geqslant 0$.

1.93. $(x+\sqrt{7}) \leqslant 0 \vee [(x-2) \geqslant 0 \wedge (x-\sqrt{7}) \leqslant 0]$.

1.94. $(x+3) \leqslant 0 \vee [(x+1) > 0 \wedge (x-3) \leqslant 0] \vee (x-4) \geqslant 0$.

1.95. $(x+4) \geqslant 0 \wedge (x-4) \leqslant 0$. **1.96.** Cała prosta.

1.97. $[(x+1) > 0 \wedge (x-2) < 0] \vee (x-3) > 0$.

Rozumowanie przeprowadzone w zadaniach 1.88-1.97 może być zastosowane dla uzasadnienia postępowania zwanego *siatką znaków*.

1.98. Skoro $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ jest zdaniem prawdziwym, zatem istnieje co najmniej jedno p_i, które jest zdaniem prawdziwym. Niech i_0 będzie najmniejszym takim i, że p_i jest zdaniem prawdziwym. Ponieważ implikacja $p_{i_0} \Rightarrow q_{i_0}$ jest zdaniem prawdziwym, zatem (porównaj zadanie 1.60) q_{i_0} jest zdaniem prawdziwym. Wnioskujemy stąd, że dla $i \neq i_0$ zdanie q_i jest zdaniem fałszywym. Wobec założenia $p_i \Rightarrow q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ mamy więc, że dla $i \neq i_0$ p_i jest zdaniem fałszywym. Zatem $q_{i_0} \Rightarrow p_{i_0}$ jest zdaniem prawdziwym, bo p_{i_0} i q_{i_0} są zdaniami prawdziwymi, a $q_i \Rightarrow p_i$, dla $i \neq i_0$, też jest zdaniem prawdziwym, ponieważ obie strony implikacji są zdaniami fałszywymi.

1.99. Zastosować następujące pozorne wzmocnienie zadania 1.98; przy tych samych założeniach $p_i \Leftrightarrow q_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

1.101. a) p, b) $p \vee q$, c) $p \Leftrightarrow q$, d) $r \wedge s$.

1.102. a) CpDqINpr. Istotnie $p \wedge (q \vee (\sim p \Rightarrow r) = p \wedge (q \vee (\mathrm{N}p \Rightarrow r) = = p \wedge (q \vee \mathrm{IN}pr) = p \wedge \mathrm{D}q\mathrm{IN}pr = \mathrm{C}p\mathrm{D}q\mathrm{IN}pr$,

b) IpIqIrp, c) EpCpNENqq, d) IIpqIIqrINrNp,
e) ICDpqNpq, f) CDpqINpq.

1.103. a) $[(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)]\vee[(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]$. Istotnie,

DDCpqCpNqDCNpqCNpNq =

$$\begin{aligned}&= \mathrm{DDC}pq\mathrm{C}p(\sim q)\mathrm{DC}(\sim p)q\mathrm{C}(\sim p)(\sim q) =\\ &= \mathrm{DD}(p\wedge q)(p\wedge\sim q)\mathrm{D}(\sim p\wedge q)(\sim p\wedge\sim q) =\\ &= \mathrm{D}[(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)][(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)] =\\ &= [(p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)]\vee[(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)].\end{aligned}$$

b) $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$, c) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\sim q\Rightarrow\sim p)$,
d) $(p\wedge q)\vee\sim\sim(q\vee\sim r)$, e) $\sim(p\wedge q)\Rightarrow(\sim p\wedge q)$.

1.104. Zbadać wszystkie przypadki. Tylko wtedy, jeśli po przekształceniu na symbolikę nawiasową formuła ma postać $\sim\Phi$.

1.105. Tautologia jest wyrażeniem prawdziwym dla wszelkich wartości zmiennych zdaniowych. Korzystając więc z reguły podstawiania otrzymujemy z tautologii 13 przez podstawienie p zamiast r

$$(*)\qquad [p\Rightarrow(q\Rightarrow p)]\Rightarrow[(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow p)].$$

Teraz korzystamy z reguły odrywania. Wiemy, że zachodzi $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$, bo jest to jedna z wyjściowych tautologii, otrzymaliśmy też w wyniku podstawienia tautologię (*), więc na mocy reguły odrywania uzyskujemy

$$(**)\qquad (p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow p).$$

Korzystamy znów z reguły podstawiania podstawiając do (**) $q\Rightarrow p$ w miejsce q i otrzymujemy $[p\Rightarrow(q\Rightarrow p)]\Rightarrow(p\Rightarrow p)$, skąd po ponownym zastosowaniu reguły odrywania dostajemy $p\Rightarrow p$.

1.106. Wskazówka. Podstawić do tautologii 1.11 zamiast p całe wyrażenie z tautologii 1.13, zamiast q podstawić $q\Rightarrow r$ i po zastosowaniu reguły odrywania ponownie dokonać podstawień $q/(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$, $p/(q\Rightarrow r)$, $r/(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$.

DO ROZDZIAŁU II

2.1. *a, b, c*. **2.2.** *a, b*. **2.3.** *a*. **2.4.** Nie ma.
2.5. $\{a\}$. **2.6.** O. **2.7.** $\{a, b\}, \{a\}$. **2.8.** $\{\{a\}\}, \{a\}, a$.
2.9. $\{a, b, c\}, c$. **2.10.** $\{a, b\}, \{\{a, b\}\}, 0$. **2.11.** 0, 1, 2.

2.12. 0, 1, 2. **2.13.** 0, 1, 2. **2.14.** 2. **2.15.** 2, 3.
2.16. Nie ma. **2.17.** Nie ma. **2.18.** 0, 1, 2, 3, ... **2.19.** 2.
2.20. -2, 2. **2.21.** Nie ma.

2.22. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Wskazówka. Rozwiązać nierówność $x^2-8x+1 < 0$, a następnie ze zbioru rozwiązań wybrać liczby naturalne.

2.23. 1, 2, 3, 4, 5. **2.24.** -2. **2.25.** $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **2.26.** -1.
2.27. Wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
2.28. Wszystkie liczby rzeczywiste.

2.29. Pokażemy, że $\sim(A \subset B)$. Niech bowiem $A \subset B$. Wówczas, zgodnie z definicją, każdy element zbioru A musi być elementem zbioru B. Weźmy więc element $b \in A$. Przy założeniu $A \subset B$ mamy $b \in B$, skąd $(b = a) \vee (b = c) \vee (b = d)$. Żaden człon alternatywy nie jest jednak prawdziwy, gdyż różne litery oznaczają z założenia różne elementy i otrzymana sprzeczność świadczy o błędności założenia $A \subset B$.

Dla tak zdefiniowanych zbiorów zachodzi $B \subset A$.

2.30. $\sim(A \subset B)$, $\sim(B \subset A)$.

2.31. Pokażemy, że $A \subset B$. W związku z tym dowiedziemy implikacji

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

W tym celu wystarczy na mocy tautologii $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim\beta \Rightarrow \sim\alpha)$ i reguł wnioskowania dowieść, że

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A.$$

Ta ostatnia implikacja jest jednak zawsze prawdziwa, bo zawsze prawdziwy jest jej następnik $(A = O)$.

Z drugiej strony $\sim(B \subset A)$, gdyż np. $b \in B$ ale $b \notin A = O$.

2.32. $A \subset B$, $\sim(B \subset A)$. Uwaga. Z metody dowodu inkluzji $A \subset B$ w zadaniach 2.31 i 2.32 wynika, że dla każdego zbioru B, mamy $O \subset B$. Ponadto, jeśli $B \neq O$, to $\sim(B \subset O)$.

2.33. Pokażemy, że $\sim(A \subset B)$. Przypuśćmy bowiem, że $A \subset B$. Wówczas każdy element zbioru A musiałby być elementem zbioru B. Rozpatrzmy $\{a\} \in A$. Z założenia, że $A \subset B$ mamy więc $\{a\} \in B$ i dalej $\{a\} = a$. Jest to jednak niemożliwe, bo wynika stąd, że $a \in a$, co nie jest możliwe. Łatwo jednak przekonać się, że $B \subset A$.

2.34. $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$. **2.35.** $\sim(A \subset B)$, $\sim(B \subset A)$.
2.36. $A \subset B$, $B \subset A$. Uwaga. Wynika stąd oczywiście, że $A = B$.
2.37. $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$. **2.38.** $A \subset B$, $B \subset A$.
2.39. $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$. **2.40.** $B \subset A$, $\sim(A \subset B)$.

Wskazówka. Do dowodu inkluzji $\sim(A \subset B)$, skorzystać z twierdzenia o tożsamościowej równości wielomianów.

2.41. $A \subset B$, $B \subset A$. **2.42.** $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$.

2.43. $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$.

Wskazówka. Rozwiązać równanie $2x^3-5x^2+4x-1 = 0$.

2.44. $\sim(B \subset A)$, $\sim(A \subset B)$. Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia, że pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych są liczbami całkowitymi i dzielnikami wyrazu wolnego.

2.45. $\sim(A \subset B)$, $\sim(B \subset A)$. **2.46.** $\sim(A \subset B)$, $\sim(B \subset A)$.

Wskazówka. Skorzystać z faktu, że A jako zbiór rozwiązań równania nieparzystego stopnia nie jest pusty i z twierdzenia cytowanego we wskazówce do zadania 2.44.

2.47. $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$. **2.48.** $A \subset B$, $\sim(B \subset A)$.

2.49. $A \subset B$, $\sim(B \subset A)$. **2.50.** $\sim(A \subset B)$, $B \subset A$.

2.51. $d = b$ lub $d = c$.

2.52. Równość zachodzi przy wszelkich a i b.

2.53. Pokażemy, że równość zachodzi jedynie wówczas, gdy $a = c$ i $b = d$. Istotnie, rozważmy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ i jego element $\{a\}$. Z równości zbiorów wynika, że $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, skąd $\{a\} = \{c\}$ lub $\{a\} = \{c, d\}$.

Jeśli $\{a\} = \{c\}$, to $a = c$. Z kolei jeśli $\{a\} = \{c, d\}$, to $c = d$, gdyż inaczej zbiór po lewej stronie równości miałby jeden element, a po prawej dwa. Wówczas jednak także $a = c = d$, a więc zawsze $a = c$.

Z kolei z założonej równości zbiorów wynika również, że $\{a, b\} \in \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$, skąd $\{a, b\} = \{c\}$ lub $\{a, b\} = \{c, d\}$. Ponieważ wiemy już, że $a = c$ mamy więc, że $\{c, b\} = \{c\}$ lub $\{c, b\} = \{c, d\}$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $b \neq c$. Wówczas oczywiście $\{c, b\} \neq \{c\}$, a więc $\{c, b\} = \{c, d\}$, skąd $b = c$ lub $b = d$ i wobec przyjętego założenia, że $b \neq c$ otrzymujemy $b = d$.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $b = c$. Rozpatrzmy element $\{c, d\}$. Musi on być też elementem zbioru $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, skąd $\{c, d\} = \{a\}$ lub $\{c, d\} = \{a, b\}$. Ponieważ jak pokazaliśmy uprzednio $a = c$, mamy więc $a = c = b$ i równość $\{c, d\} = \{a\}$ pociąga za sobą równość $\{b, d\} = \{b\}$, skąd wynika natychmiast $d = b$. Podobnie, jeśli $\{c, d\} = \{a, b\}$, to wobec $a = c = b$ otrzymujemy $\{b, d\} = \{b, b\}$, skąd też wynika $d = b$. Tak więc ostatecznie mamy

$$a = c \quad \text{i} \quad b = d.$$

2.54. $b = a$. **2.55.** $a = b = d$.

2.56. Równość między danymi zbiorami nie może zachodzić.

2.57. $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cap B = \{c\}$, $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{d\}$.

2.58. $A \cup B = \{\{a, b\}, c, d\}$, $A \cap B = \{c\}$, $A - B = \{\{a, b\}\}$, $B - A = \{d\}$.

2.59. $A \cup B = \{x, y, \{z\}, a\}$, $A \cap B = \{x, y\}$, $A - B = \{\{z\}\}$, $B - A = \{a\}$.

2.60. $A \cup B = \{\{a, \{a\}\}, a, \{a\}\}$, $A \cap B = \{a\}$, $A - B = \{\{a, \{a\}\}\}$, $B - A = \{\{a\}\}$.

2.61. $A \cup B = \{a, \{a\}, \{b\}\}$, $A \cap B = B$, $A - B = \{a\}$, $B - A = O$.

2.62. Łatwo sprawdzić, że $A \cup B = \{\{a, \{b\}\}, c, \{c\}, \{a, b\}, \{b\}\}$. Pokażemy, że

$$A \cap B = \{\{a, b\}, c\}.$$

Rozważmy po kolei elementy zbioru A. Gdyby do iloczynu $A \cap B$ należał element $\{a, \{b\}\}$ musiałby on być elementem zbioru B, a więc jednym z elementów $\{a, b\}$, c, $\{b\}$. Przy przyjętych w zadaniu założeniach mamy $\{a, \{b\}\} \neq c$, bo c nie może być zbiorem. Dalej, $\{a, \{b\}\} \neq \{b\}$, gdyż w przeciwnym razie $b = a$, bądź też $b = \{b\}$. Pierwsza ewentualność nie jest możliwa ze względu na założenie zadania, druga prowadzi natychmiast do wniosku, że $b \in b$, co też nie jest możliwe. Analogicznie rozumując można wykazać, że $\{a, \{b\}\} \neq \{a, b\}$. Z kolei $\{c\} \in A \cap B$. Jeśli bowiem $\{c\} = \{a, b\}$, to albo $c = a$, albo $c = b$, co nie jest możliwe. Podobnie $\{c\} \neq \{b\}$ (bo $c \neq b$) i w końcu $\{c\} \neq c$, bo jeśli $\{c\} = c$, to $c \in c$.

Natomiast

$$A - B = \{\{a, \{b\}\}, c\},$$

bo powtarzając podane wyżej rozważania można łatwo wykazać, że żaden z elementów podanego zbioru nie należy do B.

W końcu

$$B - A = \{\{b\}\},$$

co wynika stąd, że $\{b\} \neq \{a, \{b\}\}$, $(a \neq b)$ $\{b\} \neq c$ (c nie jest zbiorem), $\{b\} \neq \{c\} (b \neq c)$, wreszcie $\{b\} \neq \{a, b\}$ $(b \neq a)$.

2.63. $A \cup B = \mathcal{N}$, $A \cap B = O$, $A - B = A$, $B - A = B$.

2.64. $A \cup B = \{2\}$, $A \cap B = O$, $A - B = O$, $B - A = B$.

2.65. $A \cup B = A$, $A \cap B = B$, $A - B$ jest to zbiór liczb rzeczywistych mniejszych od 1, z wyjątkiem 0, $B - A = O$.

2.66. $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = O$, $B - A = \langle 1, 2)$.

2.67. a) $(A \cap B) \cap C = O$,

b) $(A \cap -B) \cap C =$ zbiór trójkątów o kątach $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$,

c) $(-A) \cap (B \cap C) = O$,

d) $(-A) \cap (C \cap -B) =$ zbiór trójkątów o jednym kącie $\frac{1}{2}\pi$ i pozostałych różnych od $\frac{1}{4}\pi$,

e) $(A \cap B) \cap -C =$ zbiór trójkątów o kątach $\frac{1}{3}\pi$.

2.81. Z definicji równości zbiorów wynika, że wystarczy udowodnić równoważność

$$x \in (A \cup B) - C \Leftrightarrow x \in (A - C) \cup (B - C).$$

Korzystając z definicji działań na zbiorach otrzymujemy kolejno:

$$x \in (A \cup B) - C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \sim x \in C,$$
$$x \in (A - C) \cup (B - C) \Leftrightarrow x \in A - C \vee x \in B - C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee$$
$$\vee (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \sim x \in C) \vee (x \in B \wedge \sim x \in C).$$

Rozpatrzmy teraz następującą formułę rachunku zdań:

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma).$$

Łatwo możemy sprawdzić, że jest to tautologia. Zauważmy jednak, że podstawiając w miejsce α, β, γ odpowiednio $x \in A$, $x \in B$, $\sim x \in C$ otrzymujemy równoważność

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge \sim x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge \sim x \in C) \vee (x \in B \wedge \sim x \in C),$$

co kończy dowód.

2.90. Tak. **2.91.** Tak.

2.92. Nie. Niech np. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, wówczas

$$A \cap (A \cup B) = \{1, 2\} \neq \{1\} = B.$$

2.93. Nie. Niech np. $A = C = \{1, 2\}$, $B = O$, wówczas

$$(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = O \neq C.$$

2.94. Niech $A \subset B$ i $C \subset D$ (w przeciwnym razie poprzednik implikacji jest fałszywy, co sprawia, że cała implikacja jest w sposób oczywisty prawdziwa). Wobec tego dla dowolnego x mamy

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{i} \quad x \in C \Rightarrow x \in D.$$

Wystarczy oczywiście udowodnić, że dla dowolnego x mamy

$$x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap D.$$

Skorzystajmy w tym celu z następującej tautologii rachunku zdań:

$$[(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\gamma \Rightarrow \delta)] \Rightarrow [\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \wedge \delta].$$

Po podstawieniu za α, β, γ i δ odpowiednio $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ i $x \in D$ otrzymujemy

$$[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in C \Rightarrow x \in D)] \Rightarrow [(x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow (x \in B \wedge x \in D)].$$

Ze względu na założenia wiemy, że poprzednik implikacji jest prawdziwy, a więc prawdziwy musi być i następnik (reguła *modus ponens*), stąd $x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in D$. Korzystając z definicji mnożenia zbiorów możemy poprzednik i następnik tej implikacji zapisać ostatecznie w żądanej postaci:

$$x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap D.$$

2.101. Dana równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x \in (A \cap B) \cup (C \cap B) \Leftrightarrow x \in B.$$

Zauważmy, że jeśli $x \in (A \cap B) \cup (C \cap B)$, to $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in B)$, a więc w każdym wypadku $x \in B$.

Wobec tego należy tylko zbadać, kiedy implikacja w stronę przeciwną zachodzi. Przyjmujmy więc, że x jest dowolnym ale ustalonym elementem zbioru B. Jeśli x nie należy ani do A, ani do C, to $x \notin A \cap B$ i $x \notin C \cap B$, a więc

$$\sim(x \in A \cap B \vee x \in B \cap C).$$

Wynika stąd, że dowolne $x \in B$ musi należeć do A lub do C. Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że równość będzie zachodzić wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subset A \cup C$,

2.102. $C \cap A \subset B$. **2.103.** $C \cap A \subset B$.

2.104. $B \cap C = O$.

2.105. $A \cup B \subset C$, $A \cap B = O$. **2.106.** $A \cap B \subset C \subset A$.

2.110. Ilość zbiorów w rodzinie A jest nie większa od 2^n-1. Jeśli żaden ze zbiorów A_i nie jest pusty i wszystkie one są rozłączne, to rodzina A ma dokładnie 2^n-1 elementów.

Wskazówka. Skorzystać z kombinatorycznej interpretacji $\binom{n}{k}$ i ze wzoru

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

2.111. Ilość zbiorów w rodzinie A jest nie większa od 2^{2^n-1}. Jeśli żaden ze zbiorów A_i nie jest pusty i wszystkie one są rozłączne, to rodzina A ma dokładnie 2^{2^n-1} elementów.

Wskazówka. Zauważyć, że $X - Y$ można przedstawić jako $X \cap (V - Y)$, gdzie $V = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, wobec czego zadanie to można zredukować do zadania 2.108.

2.119. Tak. **2.120.** Tak.

2.121. Nie. Niech np. $A = C \neq O$, $B = O$, wtedy

$$A \cup (B \dot{-} C) = A, \quad (A \cup B) \dot{-} (A \cup C) = O.$$

2.122. Wskazówka. Przyporządkować każdej składowej $A_1^{i_1} \cap \ldots \cap A_n^{i_n}$ ciąg zerojedynkowy $i_1, \ldots, i_n$ i skorzystać z prostego twierdzenia, że ilość takich ciągów wynosi 2^n.

2.124. Sumą składowych jest zbiór X.

2.127. Wskazówka. Przeprowadzić dowód indukcyjny (ze względu na n).

2.128. $A \times B = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$,
$B \times A = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

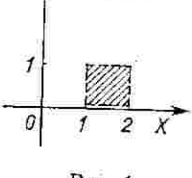
2.129. $A \times B = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$.

2.130. $A \times B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle\}$.
$B \times A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 5, 1\rangle\}$.

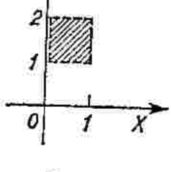
2.131. $A \times B = O, \quad B \times A = O$.

2.134. $A \times (B \times C) = \{\langle 0, \langle 1, 2\rangle\rangle, \langle 0, \langle 1, 3\rangle\rangle, \langle 1, \langle 1, 2\rangle\rangle, \langle 1, \langle 1, 3\rangle\rangle\}$.
$(A \times B) \times C = A \times B \times C = \{\langle 0, 1, 2\rangle, \langle 0, 1, 3\rangle, \langle 1, 1, 2\rangle, \langle 1, 1, 3\rangle\}$.
Uwaga. $A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$.

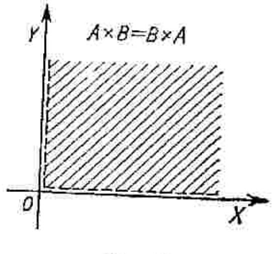
2.135. Rys. 1 i rys. 2. **2.136.** Rys. 3.



Rys. 1

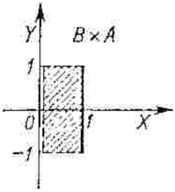


Rys. 2

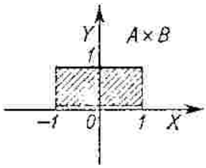


Rys. 3

2.137. Rys. 4 i rys. 5.

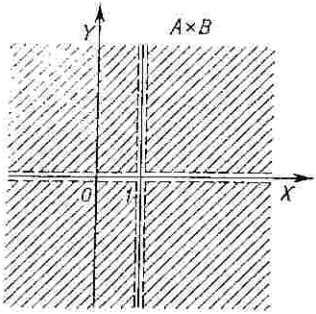


Rys. 4

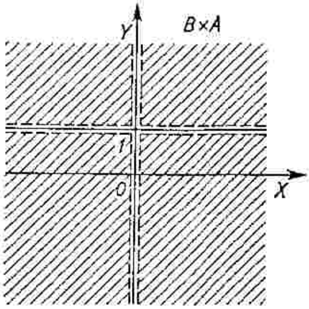


Rys. 5

2.138. Rys. 6 i rys. 7.

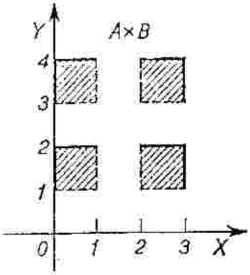


Rys. 6

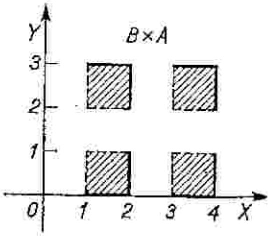


Rys. 7

2.139. Rys. 8 i rys. 9.

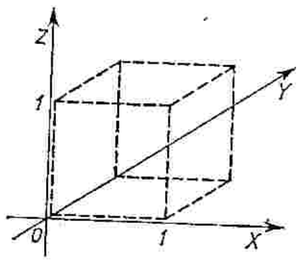


Rys. 8

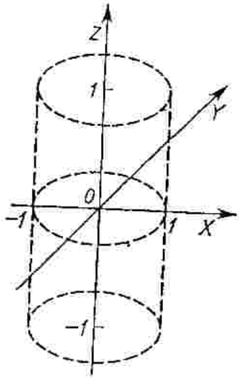


Rys. 9

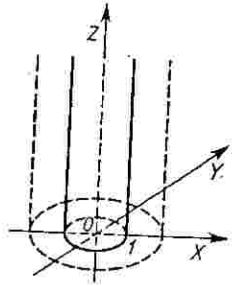
2.140. Rys. 10. **2.141.** Rys. 11. **2.142.** Rys. 12.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

2.143. Niech $\langle x, y\rangle \in A\times(B\cup C)$. Wtedy $x\in A\wedge y\in B\cup C$, skąd $x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$. Z tego wynika, że $(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$, a więc

$$\langle x, y\rangle \in A\times B \quad \text{lub} \quad \langle x, y\rangle \in A\times C,$$

tzn. $\langle x, y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$.

Odwrotnie

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C) &\Rightarrow \langle x, y\rangle\in A\times B\vee\langle x, y\rangle\in A\times C \Rightarrow\\ &\Rightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\Rightarrow\\ &\Rightarrow (x\in A\wedge y\in B\cup C)\Rightarrow\\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C).\end{aligned}$$

Zatem równość jest prawdziwa.

2.144. Tak. **2.145.** Nie. **2.146.** Nie.

2.147. $\mathscr{P}(A) = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2.158. $\mathscr{P}(A) = \{O\}$. **2.159.** $\mathscr{P}(A) = \{O, \{O\}\}$.

2.160. $\mathscr{P}(A) = \Big\{O, \{a\}, \{\{a\}\}, \big\{\{\{a\}\}\big\}, \{a, \{a\}\}, \big\{a, \{\{a\}\}\big\}, \big\{\{a\}, \{\{a\}\}\big\}, \big\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\big\}\Big\}$.

2.163. Z definicji $\mathscr{P}(A)$ wynika, że $A \in \mathscr{P}(A)$. Jeżeli $A = \mathscr{P}(A)$, to $A \in A$, co nie jest możliwe.

2.164. Nie. Wystarczy wziąć np. $X = \{O, \{O\}, \{\{O\}\}, \ldots\}$.

DO ROZDZIAŁU III

3.1. $Z = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. **3.2.** $Z = \mathscr{N}$.

3.3. $Z = O$. **3.4.** $Z = \{1\}$. **3.5.** $Z = O$.

3.6. Jeśli interpretujemy liczby zespolone jako punkty płaszczyzny, to Z jest całą płaszczyzną bez koła otwartego o środku $(0, 0)$ i promieniu 1.

3.7. $Z = \{-\frac{1}{2}\}$. **3.8.** $Z = \mathscr{N}$. **3.9.** $Z = \{-1, 1\}$.

3.10. $Z = \langle -2, -1\rangle$. **3.11.** $Z_1 \cap Z_2$. **3.12.** $Z_1 \cup Z_2$.

3.13. $X - Z_1$. **3.14.** $(X - Z_1) \cup Z_2$.

3.15. $(Z_1 \cap Z_2) \cup [(X - Z_1) \cap (X - Z_2)]$. **3.16.** $(X - Z_1) \cap (X - Z_2)$.

3.17. $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$. **3.18.** $\Phi_1(x) \vee \Phi_2(x)$. **3.19.** $\Phi_1(x) \wedge \sim \Phi_2(x)$.

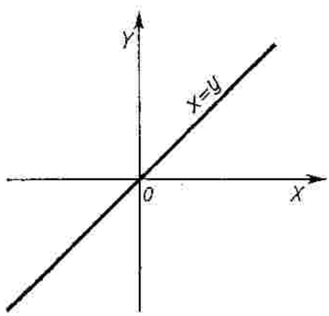
3.20. $\Psi(\langle x, y\rangle)$, gdzie $\Psi(\langle x, y\rangle) \Leftrightarrow \Phi_1(x) \wedge \Phi_2(y)$.

3.21. $\Phi(x)$ jest prawdziwa w X. **3.22.** $\sim \Phi(x)$ jest prawdziwa w X.

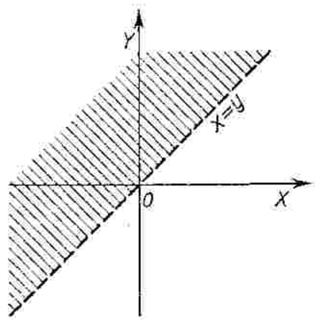
3.23. a) Zbiór X. b) Jeśli $Z = Z_1 = Z_2$ jest wykresem $\Phi_1(x)$ (a więc i $\Phi_2(x)$), to Z jest też wykresem funkcji $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$. c) Wykresem funkcji zdaniowej $\Phi_1(x) \vee \sim \Phi_2(x)$ jest X.

3.24. Niech Z będzie wykresem funkcji Φ_2: a) Z, b) X, c) O, d) Z.

3.25. Rys. 13. **3.26.** Rys. 14.

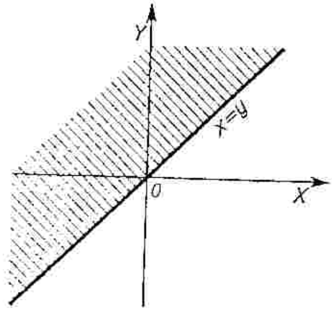


Rys. 13

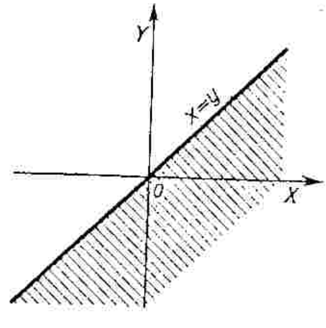


Rys. 14

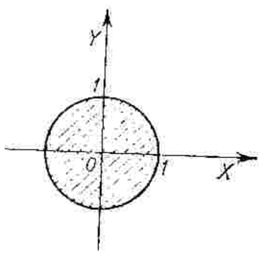
3.27. Rys. 15. **3.28.** Rys. 16. **3.29.** Rys. 17. **3.30.** Rys. 18.



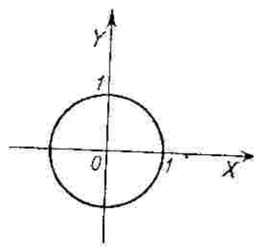
Rys. 15



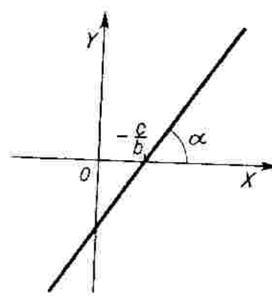
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

3.31. Rys. 19. Kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$. Uwaga. Jeżeli $b = 0$, to $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ i prosta przecina oś X w punkcie $-c$.

3.32. Cała płaszczyzna z wyjątkiem prostej $x = y$.

3.33. Wykres składa się wyłącznie z punktu $(0, 0)$.

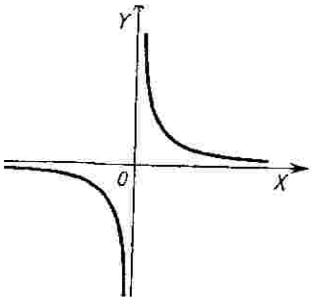
3.34. Rys. 20.

3.35. Rys. 21. Uwaga. Wykres składa się z osi X i Y.

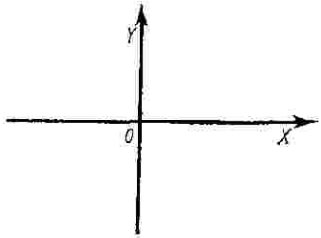
3.36. Rys. 22.

3.37. Rys. 23. Uwaga. Jest to wykres dla $a < 0$. Gdy $a = 0$ wykresem jest prosta, gdy $a > 0$ parabola będzie zwrócona w drugą stronę.

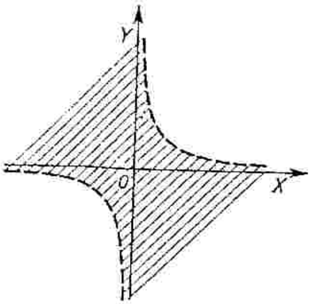
3.38. Rys. 24. **3.39.** Rys. 25.



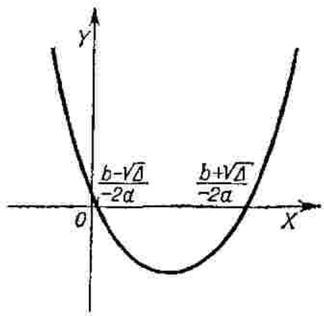
Rys. 20



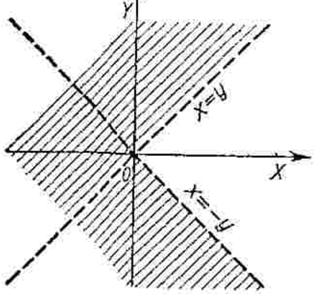
Rys. 21



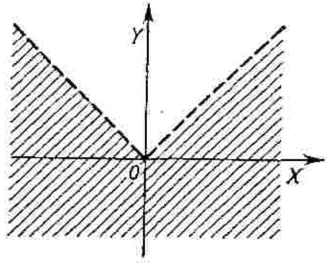
Rys. 22



Rys. 23

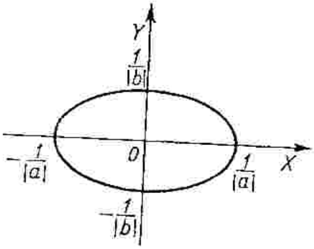


Rys. 24



Rys. 25

3.40. Rys. 26. Uwaga. Jest to wykres dla $a \neq 0 \neq b$.

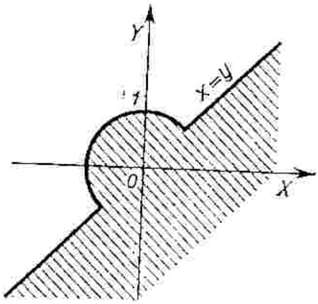


Rys. 26

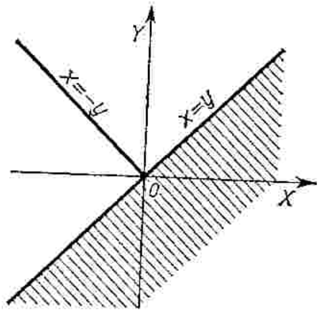
3.41. Wykresem jest cała płaszczyzna.

3.42. Wykresem jest zbiór pusty.

3.43. Rys. 27. **3.44.** Rys. 28.



Rys. 27



Rys. 28

3.45. Wykresem jest cała płaszczyzna z wyjątkiem prostej $x = y$, ale z punktem $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.46. Wykresem jest punkt (0, 0).

3.47. Rys. 29. **3.48.** Patrz rys. 29.

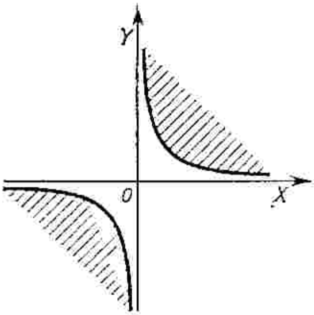
3.49. Wykresem jest cała płaszczyzna.

3.50. Rys. 30.

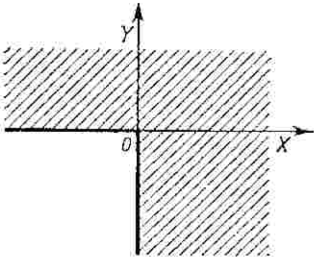
3.51-53. Wykresem jest cała płaszczyzna.

3.54. Rys. 31. **55.** Rys. 32.

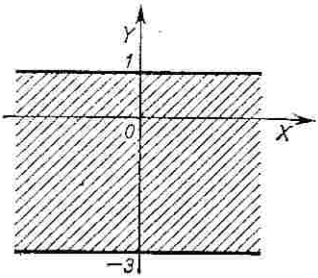
3.56. Rys. 33. Uwaga. Wykresem jest cała kula (wnętrze wraz z brzegiem).



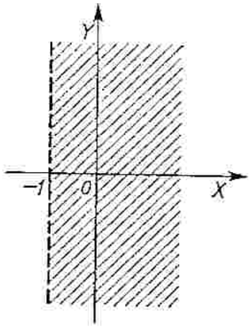
Rys. 29



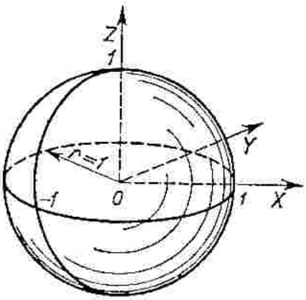
Rys. 30



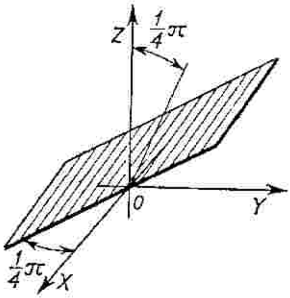
Rys. 31



Rys. 32



Rys. 33

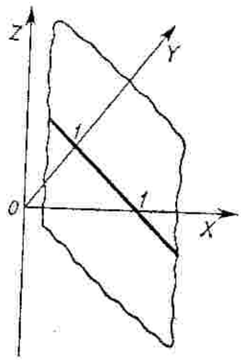


Rys. 34

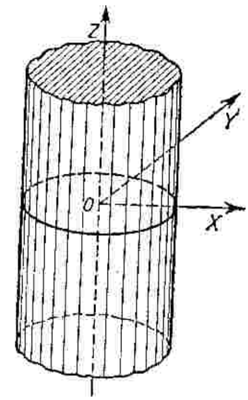
3.57. Rys. 34. Uwaga. Wykresem jest płaszczyzna nachylona do osi Z pod kątem $\frac{1}{4}\pi$ i przechodząca przez prostą $x = -y$, tj. prostą nachyloną do ujemnego zwrotu osi X pod kątem $\frac{1}{4}\pi$.

3.58. Rys. 35. Uwaga. Wykresem jest płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny XY i przecinająca oś Y w punkcie 1 i oś X w punkcie 1.

3.59. Rys. 36. Uwaga. Wykresem jest nieskończony walec wraz z wnętrzem.



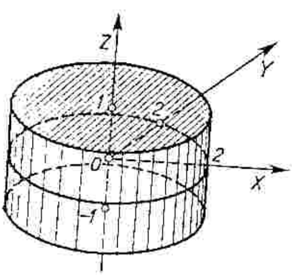
Rys. 35



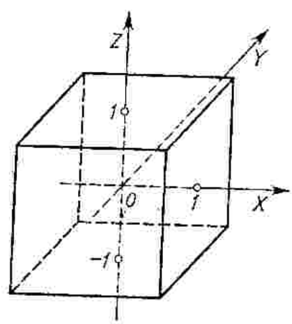
Rys. 36

3.60. Rys. 37. Uwaga. Wykresem jest wnętrze walca.

3.61. Rys. 38. Uwaga. Wykresem jest wnętrze sześcianu.



Rys. 37

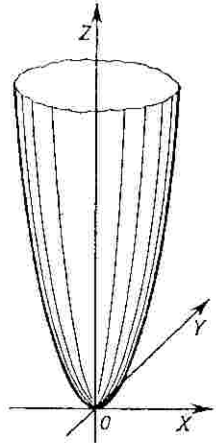


Rys. 38

3.62. Rys. 39. Uwaga. Wykresem jest paraboloida obrotowa (bez wnętrza).

3.65. Z założeń wynika, że dla $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_1 \times \ldots \times X_n$ mamy $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Ponieważ $X_i \neq O$, więc $X_1 \times \ldots \times X_n \neq O$. Istnieje więc jakiś element tego zbioru i niech nim będzie np. $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Stąd $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$, a więc Φ jest spełnialne.

Założenia $X_i \neq O$ odrzucić nie można. Jeśli bowiem dla pewnego i mamy $X_i = O$, to $X_1 \times \ldots \times X_n = O$ i Φ nie jest spełnialna, bo nie istnieje w $X_1 \times \ldots \times X_n$ żaden element, który spełniałby Φ (żaden element do tego zbioru nie należy).



Rys. 39

3.67. Jeśli $\Phi(x)$ i $\Psi(y)$ są spełnialne, to istnieją takie elementy a i b, że $\Phi(a)$ i $\Psi(b)$. Istnieje więc para $\langle a, b \rangle$ spełniająca funkcję $\Theta(x, y) = \Phi(x) \wedge \Psi(y)$.

Z drugiej strony, jeśli funkcja $\Theta(x, y) = \Phi(x) \wedge \Psi(y)$ jest spełnialna, to istnieje $\langle a, b \rangle$ taka, że $\Theta(a, b)$, czyli $\Phi(a) \wedge \Psi(b)$, skąd na mocy tautologii $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$, $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$ i reguły odrywania mamy $\Phi(a)$ i $\Psi(b)$, a więc Φ i Ψ są spełnialne.

Twierdzenie nie jest prawdziwe dla funkcji $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$. Jeśli bowiem funkcja $\Phi(x) \wedge \Psi(x)$ jest spełnialna, to istnieje takie a, że $\Phi(a) \wedge \Psi(a)$, skąd $\Phi(a)$ i $\Psi(a)$, a więc Φ i Ψ są spełnialne, ale implikacja w drugą stronę nie musi zachodzić. Wystarczy jako Φ wziąć $x > 0$, a jako Ψ wziąć $x < 0$. Obie funkcje są spełnialne, a ich koniunkcja jest fałszywa.

3.68. Załóżmy, że $\Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)$ nie jest spełnialna. Oznacza to, że nie istnieje para $\langle a, b \rangle$ taka, że $\Phi(a) \Rightarrow \Psi(b)$. Wynika stąd, że dla dowolnego a i b $\Phi(a)$ jest prawdziwa, natomiast $\Psi(b)$ — fałszywa.

Z drugiej strony, jeśli $\Phi(x)$ jest prawdziwa, a $\Psi(y)$ fałszywa, to dla każdego $\langle a, b\rangle$, $\Phi(a)$ prawdziwa, a $\Psi(b)$ fałszywa, a więc $\Phi(a) \Rightarrow \Psi(b)$ fałszywa, skąd wynika, że $\Phi(x) \Rightarrow \Psi(y)$ nie jest spełnialna.

Dla funkcji $\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)$ analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe. Chociaż z faktu, że $\Phi(x)$ prawdziwa, a $\Psi(x)$ fałszywa wynika w sposób analogiczny do przedstawionego wyżej, że $\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)$ nie jest spełnialna, to implikacja w drugą stronę nie zachodzi. Jako przykład można wziąć za Φ funkcję $x < 0$, a za Ψ funkcję $x > 0$.

3.69. $\sim\Phi(x)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\Phi(x)$ nie jest prawdziwa.

W odpowiedziach do zadań 3.73-3.85 zmienne podkreślone są zmiennymi związanymi, zmienne z kreską u góry są zmiennymi wolnymi.

3.73. $\bigvee_x \Phi(\underline{x}, \bar{y}, \bar{z})$. **3.74.** $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(\underline{x}, \underline{y}, \bar{z})$.

3.75. $\bigvee_z \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \underline{z})$. **3.76.** $\bigvee_x \Phi(\underline{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

3.77. $[\bigvee_x \bigwedge_y \Phi(\underline{x}, \underline{y}, \bar{z})] \Rightarrow \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

3.78. $\bigwedge_x \bigwedge_y \Phi(\underline{x}, \underline{y}, \bar{z}) \wedge \bigvee_z \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \underline{z})$.

3.79. $\bigwedge_x \Phi(\underline{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Rightarrow \{\bigvee_z [\bigvee_y \Psi(\bar{x}, \underline{y}, \underline{z}) \wedge \bigwedge_z \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \underline{z})]\}$.

3.80. $\bigvee_x [\Phi(\underline{x}, \bar{y}, \bar{z}) \Rightarrow \Psi(\underline{x}, \underline{x}, \bar{y})] \Rightarrow \{\bigvee_x \bigvee_z [\Phi(\underline{x}, \underline{x}, \bar{y}) \wedge \Theta(\underline{x}, \bar{y}, \bar{y})]\}$.

3.81. $\bigvee_x (\underline{x} < \bar{y} \vee \underline{x} < \bar{z})$. **3.82.** $\bigvee_x \bigwedge_y [(\underline{x} < \underline{y}) \Rightarrow (\underline{x} < \bar{z} \wedge \bar{z} < \underline{y})]$.

3.83. $\bigwedge_x (\underline{x} | \bar{y} \wedge \underline{x} | \bar{z} \Rightarrow \underline{x} | \bar{z})$. **3.84.** $(\bigwedge_x \bigvee_y \underline{x} < \underline{y}) \vee (\bar{x} < \bar{z})$.

3.85. $\bigvee_x (\underline{x} < \underline{x} \vee \underline{x} < \bar{z})$.

3.88. $(-1, +1)$. **3.89.** $\mathscr{R} - \{O\}$.

3.90. O. **3.91.** O. **3.92.** $\mathscr{R}$. **3.93.** O. **3.94.** $\mathscr{R}$. **3.95.** O.

3.112. Niech wykresem funkcji zdaniowej $\Phi(x, y)$ będzie zbiór A punktów płaszczyzny V. Wówczas:

a) Wykres funkcji $\bigwedge_x \Phi(x, y)$ otrzymuje się przez środkowanie zbioru A na oś Y.

b) Wykres funkcji $\bigvee_x \Phi(x, y)$ otrzymuje się przez rzutowanie zbioru A na oś Y.

c) Wykres funkcji $\bigwedge_y \Phi(x, y)$ otrzymuje się przez środkowanie zbioru A na oś X.

d) Wykres funkcji $\bigvee_y \Phi(x, y)$ otrzymuje się przez rzutowanie zbioru A na oś X.

Uwaga. Środkowanie zbioru A na oś Y (na oś X) polega na znalezieniu największego pasa równoległego do osi X (do osi Y) całkowicie zawartego w A i znalezieniu następnie przecięcia tego pasa z osią Y (osią X).

3.114. $\bigvee_y x = 2y$. **3.115.** $\bigvee_{y_1} \bigvee_{y_2} x = y_1 y_1 + y_2 y_2$.

3.116. $\bigwedge_y \bigwedge_z (x = yz \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$.

3.117. $\bigvee_y \bigvee_z [(y \neq x) \wedge (y \neq 1) \wedge x \neq yz]$.

3.118. $\bigvee_{y_1} \bigvee_{z_1} (x = yy_1) \wedge (x = zz_1) \wedge$

$$\wedge \bigwedge_u [\bigvee_{y_1} \bigvee_{z_1} (u = yy_1 \wedge u = zz_1) \Rightarrow \bigvee_{x_1} x_1 x = u].$$

3.119. $\bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} (y = xx_1 \wedge z = xx_2) \wedge$

$$\wedge \bigwedge_u [\bigvee_{u_1} \bigvee_{u_2} (y = uu_1 \wedge z = uu_2) \Rightarrow \bigvee_{u_0} uu_0 = x].$$

Uwaga. Korzystając dodatkowo z funkcji $x < y$ można funkcje zdaniowe z zadań 3.118 i 3.119 zapisać w innej postaci. Na przykład dla zadania 3.119 funkcja może być zapisana następująco:

$$\bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} xx_1 = y \wedge xx_2 = z \wedge \bigwedge_u [\bigvee_{u_1} \bigvee_{u_2} (uu_1 = y \wedge uu_2 = z) \Rightarrow u \leqslant x].$$

3.120. $\bigwedge_y \bigwedge_z [(x = 4y + z \wedge z < 4) \Rightarrow (z = 1 \vee z = 2)]$.

3.121. $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z [(x = 2y + z \wedge z < 2) \Rightarrow (z = 0 \vee z = 1)]$.

3.122. $\bigwedge_n \bigvee_p [\bigwedge_y \bigwedge_z (p = yz \Rightarrow y = 1 \vee y = p) \wedge (n \leqslant p \wedge p \leqslant 2n)]$.

Uwaga. Porównaj z zadaniem 3.116.

3.123. $\bigwedge_u (\bigvee_{u_1} uu_1 = x \Rightarrow \bigvee_{u_2} uu_2 = y)$.

3.124. $\bigwedge_u \{2u + 1 > 3 \Rightarrow [\bigvee_{p_1} \bigvee_{p_2} \bigwedge_y \bigwedge_z ((p_1 = yz \Rightarrow p_1 = y \vee 1 = y) \wedge$

$$\wedge (p_2 = yz \Rightarrow p_2 = y \vee 1 = y)) \Rightarrow 2u + 1 = p_1 + p_2]\}.$$

3.125. $\bigwedge_z \bigwedge_y \bigvee_x \{\bigvee_{x_1} \bigvee_{x_2} (xx_1 = z \wedge xx_2 = y) \wedge$

$\wedge \bigwedge_u [\bigvee_{u_1} \bigvee_{u_2} (uu_1 = z \wedge uu_2 = y) \Rightarrow u \leqslant x]\}.$

Uwaga. Porównaj z zadaniem 3.119.

3.126. $\bigwedge_z \bigwedge_y \bigwedge_u \bigvee_x \{\bigvee_{z_1} \bigvee_{y_1} \bigvee_{u_1} (z \cdot z_1 = x \wedge y \cdot y_1 = x \wedge u \cdot u_1 = x) \wedge$

$\wedge \bigwedge_t [\bigvee_{z_1} \bigvee_{y_1} \bigvee_{u_1} (z \cdot z_1 = t \wedge y \cdot y_1 = t \wedge u \cdot u_1 = t) \Rightarrow x \leqslant t]\}.$

3.127. $\bigwedge_x \bigvee_y x < y.$

3.128. $\bigwedge_x \bigvee_t \{[\bigwedge_y \bigwedge_z x = y \cdot z \Rightarrow y = 1 \vee y = 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(\bigwedge_y \bigwedge_z t = y \cdot z \Rightarrow y = 1 \vee y = t) \wedge x < t]\}.$

3.129. $\sim \bigvee_x x^2 < 0.$ **3.130.** $\bigvee_x \{f(x) = 0 \wedge \bigwedge_y [f(y) = 0 \Rightarrow x = y]\}.$

3.131. $\bigwedge_x \bigwedge_y \bigvee_z (x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y).$ **3.132.** $\sim \bigvee_x \bigwedge_y y \leqslant x.$

3.133. $\sim \bigvee_y y^2 = x.$ **3.134.** $\bigvee_z (z = y \vee z^2 = y \vee z^3 = y).$

3.135. $\bigwedge_x \bigwedge_y [x < y \Rightarrow f(x) > f(y)].$ **3.136.** $\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m \in \mathcal{N}} (n < m \Rightarrow a_n < a_m).$

3.137. $\bigwedge_{n \in \mathcal{N}} 0 < a_n.$

3.138. $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m_1 \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m_2 \in \mathcal{N}} (m_1 > n \wedge m_2 > n \Rightarrow |a_{m_1} - a_{m_2}| < \varepsilon).$

3.139. $\bigvee_x \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} |a_n| < x.$

3.140. $\bigvee_{n \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m_1 \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m_2 \in \mathcal{N}} (n < m_1 \wedge n < m_2 \Rightarrow a_{m_1} = a_{m_2}).$

3.141. Jeżeli Φ_1 oznacza formułę z zadania 3.140, a Φ_2 formułę z zadania 3.138, to szukaną formułą będzie $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$.

3.142. $\bigvee_x \bigwedge_{n \in \mathcal{N}} |a_n| < x \Rightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n \in \mathcal{N}} \bigwedge_{m \in \mathcal{N}} \bigvee_{k_1 \in \mathcal{N}} \bigvee_{k_2 \in \mathcal{N}} [n < m \Rightarrow$

$\Rightarrow (m < k_1 \wedge m < k_2 \wedge |a_{k_1} - a_{k_2}| < \varepsilon)].$

3.143. $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$

3.144. $\bigwedge_{x_0 \in \langle a,b \rangle} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in \langle a,b \rangle} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigvee_y \bigwedge_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)| < y.$

3.145. $\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x_1 \in \langle a,b \rangle} \bigwedge_{x_2 \in \langle a,b \rangle} (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$

3.146. $\bigwedge_{x \in \mathscr{R}} [x \leqslant a \wedge \bigwedge_{y} (y < a \Rightarrow \bigvee_{x \in \mathscr{R}} y \leqslant x)]$.

3.147. $\bigwedge_{x \in \mathscr{R}} [a \leqslant x \wedge \bigwedge_{y} (a < y \Rightarrow \bigvee_{x \in \mathscr{R}} x \leqslant y)]$.

3.148. Jeśli $\Phi_1(x_0)$ oznacza formułę z zadania 3.143, a $\Psi_1(a)$ i $\Psi_2(a)$ są formułami odpowiednio z zadania 3.141 i 3.147, to szukaną formułą będzie

$$\bigwedge_{x \in \langle a,b\rangle} \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_{x \in \langle a,b\rangle} \Psi_1[f(z)] \wedge \bigvee_{z \in \langle a,b\rangle} \Psi_2[f(z)].$$

3.149. $[\bigwedge_{x} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x'} |x-x'| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow (|f(x)-f(x')| < \varepsilon \wedge |g(x)-g(x')| < \varepsilon)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\bigwedge_{x} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x'} |x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x)-f(x')g(x')| < \varepsilon].$$

3.150. $[\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} |x_1-x_2| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow (|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon \wedge |g(x_1)-g(x_2)| < \varepsilon)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} |x_1-x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1)+g(x_1)-f(x_2)-g(x_2)| < \varepsilon].$$

3.151. Rozważmy zdanie $\sim \bigvee_{x} \Phi(x)$. Mówi ono, że nie istnieje x mające własność Φ. Biorąc więc dowolne x_0 możemy stwierdzić, że nie posiada ono własności Φ, posiada więc własność $\sim\Phi$, skąd wynika, że $\sim\Phi(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym.

Rozumowanie było prowadzone dla ustalonego ale dowolnego x_0, możemy więc stwierdzić, że dla dowolnego x_0 zdanie $\sim\Phi(x_0)$ jest prawdziwe. A więc ostatecznie z założenia $\sim \bigvee_{x} \Phi(x)$ udowodniliśmy, że $\bigwedge_{x} \sim\Phi(x)$.

Z drugiej strony, jeśli mamy $\bigwedge_{x} \sim\Phi(x)$, to o dowolnym x_0 możemy orzec, że ma własność $\sim\Phi$, czyli nie ma własności Φ. Gdyby istniało x_1 mające własność Φ, to jak wynika z powyższego rozumowania równocześnie tej własności mieć by nie mogło i otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\sim \bigvee_{x} \Phi(x)$.

3.161. Niech Φ i Ψ będą funkcjami zdaniowymi zawierającymi odpowiednio zmienne $x, y, \ldots, z$ oraz $u, \ldots, t$. Weźmy dowolny układ elementów $y_0, \ldots, z_0, u_0, \ldots, t_0$. Jeśli przy tak obranym układzie zdanie

$$\bigwedge_{x} \Phi(x, y_0, \ldots, z_0) \vee \Psi(u_0, \ldots, t_0)$$

jest fałszywe, to cała implikacja jest prawdziwa bez względu na to czym jest następnik. Niech więc $y_0, \ldots, z_0, u_0, \ldots, t_0$ będzie takim układem, że zdanie

$$\bigwedge_x [\Phi(x, y_0, \ldots, z_0) \vee \Psi(u_0, \ldots, t_0)]$$

jest prawdziwe.

Zauważmy, że $\Psi(u_0, \ldots, t_0)$ jest już zdaniem, gdyż za wszystkie zmienne zostały podstawione konkretne elementy, ma więc ono swoją wartość logiczną. Jeśli jest ono zdaniem prawdziwym, wówczas też formuła $\Phi(x, y_0, \ldots, z_0) \vee \Psi$ jest prawdziwa, pozostanie więc prawdziwa po dołączeniu dużego kwantyfikatora. W tym jednak wypadku alternatywa

$$\bigwedge_x \Phi(x, y_0, \ldots, z_0) \vee \Psi(u_0, \ldots, t_0)$$

jest oczywiście zdaniem prawdziwym. Jeśli zaś $\Psi(u_0, \ldots, t_0)$ jest fałszywe, to funkcja zdaniowa $\Phi(x, y_0, \ldots, z_0)$ musi być prawdziwa. Będzie więc prawdziwym zdanie $\bigwedge_x \Phi(x, y_0, \ldots, z_0)$, a więc prawdziwa też będzie alternatywa

$$\bigwedge_x \Phi(x, y_0, \ldots, z_0) \vee \Psi(u_0, \ldots, t_0).$$

Ostatecznie więc, dla każdego układu elementów $y_0, \ldots, t_0$ implikacja zachodzi, a więc implikacja

$$\bigwedge_x [\Phi(x) \vee \Psi] \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x) \vee \Psi$$

jest prawdziwa.

3.167. Nie. Wystarczy jako $\Phi(x)$ wziąć np. $\bigvee_z x < z$.

3.168. Nie. Wystarczy jako $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ wziąć odpowiednio $x < 0$ i $x \geqslant 0$.

3.169. Nie. Jako $\Phi(x, y)$ można wziąć $x < y$.

3.170. Nie. Jako $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ można wziąć odpowiednio $x < 0$ i $x > 0$.

3.171. Nie. Jako $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ można wziąć odpowiednio $x^2 > 1$ i $x > 1$.

3.172. Nie. Jako $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ wziąć odpowiednio $2|x$ i $3|x$.

3.173. Nie. Jako $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ wziąć odpowiednio $x < 0$ i $x^2 < 0$.

3.174. Nie. Jako $\Phi(x, y)$ można wziąć formułę $x = x \wedge \bigvee_x y < x$.

3.175. Nie. Jako $\Phi(x, y)$ można wziąć formułę $y < x$.

3.176. Nie. Jako $\Phi(x)$ można wziąć $x < 0$.

3.177. Nie. Jako $\Phi(x)$ można wziąć $x < 0$.

3.179. Dowód formuły $\sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x)$.

Zgodnie z umową, dzięki której formuły o zmiennych wolnych traktujemy jak zdania ogólne, aksjomat g możemy napisać w postaci

$$\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)].$$

Ze względu na tautologię $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha)$, formułę pod kwantyfikatorem możemy zastąpić formułą $\sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \sim \Phi(x)$, skąd otrzymujemy

$$\bigwedge_x [\sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \sim \Phi(x)].$$

Stosując aksjomat a otrzymujemy dalej

$$\bigwedge_x \sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x).$$

Zauważmy, że formuła $\bigvee_x \Phi(x)$ nie zawiera zmiennej wolnej x, wobec czego możemy zastosować do niej aksjomat e; mamy

$$\sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \sim \bigvee_x \Phi(x) \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_x \sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x)$$

i z przechodniości implikacji mamy ostatecznie

$$\sim \bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x).$$

Rozważmy teraz formułę $\bigwedge_x [\bigwedge_x \sim \Phi(x) \Rightarrow \sim \Phi(x)]$ wynikającą z aksjomatu b. Zgodnie z cytowaną wyżej tautologią (prawem transpozycji) możemy tę implikację zastąpić następującą:

$$\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \sim \bigwedge_x \sim \Phi(x)].$$

Rozdzielając ten kwantyfikator zgodnie z aksjomatem f otrzymujemy

$$\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \sim \bigwedge_x \sim \Phi(x)$$

i ze względu na to, że $\sim \bigwedge_x \sim \Phi(x)$ nie ma zmiennej wolnej x możemy skorzystać z aksjomatu j, co daje

$$\bigvee_x \Phi(x) \Rightarrow \sim \bigwedge_x \sim \Phi(x)$$

i na mocy prawa transpozycji dostajemy ostatecznie

$$\bigwedge_x \sim \Phi(x) \Rightarrow \sim \bigvee_x \Phi(x),$$

co kończy dowód równoważności.

3.180. Wskazówka. Zauważyć, że twierdzenia rachunku kwantyfikatorów są prawdziwe w każdej dziedzinie, natomiast zdanie $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)$ nie jest prawdziwe w dziedzinie pustej.

3.184. W dowodzie tym, oprócz twierdzeń logiki wykorzystywać będziemy następujące twierdzenia arytmetyki:

(1)
$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z x < y \Rightarrow x+z < y+z,$$

(2)
$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z [y > 0 \Rightarrow (x < z \Rightarrow xy < zy)]$$

oraz własności relacji $=$ i $<$.

Z twierdzenia (1) zgodnie z aksjomatami d i e wynika natychmiast, że

$$\bigwedge_x \bigwedge_y x < y \Rightarrow 2x < y+x, \quad \bigwedge_x \bigwedge_y x < y \Rightarrow y+x < 2y,$$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y y < x \Rightarrow 2y < y+x, \quad \bigwedge_x \bigwedge_y y < x \Rightarrow y+x < 2x,$$

i dalej z (2), podstawiając za y liczbę $\frac{1}{2}$ mamy

$$\bigwedge_x \bigwedge_z [\tfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow (x < z \Rightarrow \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}z)].$$

Korzystając teraz kolejno z aksjomatów a i tautologii z zadania 3.160 otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \bigwedge_x \bigwedge_y (x < z \Rightarrow \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}z)$$

i po zastosowaniu reguły odrywania i zamianie zmiennych

(3)
$$\bigwedge_x \bigwedge_y (x < y \Rightarrow \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}y),$$

i podobnie

(4)
$$\bigwedge_x \bigwedge_y (y < x \Rightarrow \tfrac{1}{2}y < \tfrac{1}{2}x),$$

skąd przez podstawienie dostajemy

(5) $$\bigwedge_x \bigwedge_y [2y < x+y \Rightarrow y < \tfrac{1}{2}(x+y)],$$

(6) $$\bigwedge_x \bigwedge_y [2y < y+x \Rightarrow y < \tfrac{1}{2}(x+y)].$$

Tworząc koniunkcje (5) i (3) oraz (6) i (4), a następnie korzystając z rozdzielności kwantyfikatorów względem koniunkcji i przechodniości implikacji otrzymujemy

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \left(x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2}\right), \quad \bigwedge_x \bigwedge_y \left(y < x \Rightarrow y < \frac{x+y}{2}\right)$$

i podobnie

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \left(x < y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < y\right), \quad \bigwedge_x \bigwedge_y \left(y < x \Rightarrow \frac{x+y}{2} < x\right),$$

skąd

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \left(x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y\right), \quad \bigwedge_x \bigwedge_y \left(y < x \Rightarrow y < \frac{x+y}{2} < x\right).$$

Ponieważ $x < \dfrac{x+y}{2} \wedge \dfrac{x+y}{2} < y \Rightarrow \bigvee_z x < z \wedge z < y$, na mocy aksjomatu g otrzymujemy

$$\bigwedge_x \bigwedge_y x < y \Rightarrow \bigvee_z x < z < y,$$

i podobnie

$$\bigwedge_x \bigwedge_y y < x \Rightarrow \bigvee_z y < z < x.$$

Z aksjomatu b mamy dalej

$$x < y \Rightarrow \bigvee_z x < z < y, \quad y < x \Rightarrow \bigvee_z y < z < x.$$

Dodając te implikacje stronami otrzymujemy

$$x < y \vee y < x \Rightarrow \bigvee_z (x < z < y \vee y < z < x).$$

Ponieważ z własności relacji = i < wynika, że $x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x$, otrzymujemy ostatecznie

$$\bigwedge_x \bigwedge_y x \neq y \Rightarrow \bigvee_z (x < z < y \vee y < z < x).$$

3.190. Koniunkcyjna i dyzjunkcyjna: $\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_y [\Phi(x) \vee \Psi(y)]$.

3.191. Koniunkcyjna i dyzjunkcyjna: $\bigvee\limits_x \bigvee\limits_y [\Phi(x) \wedge \Psi(y)]$.

3.192. Koniunkcyjna i dyzjunkcyjna: $\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_y [\sim\Phi(x) \vee \Psi(y)]$.

3.193. Koniunkcyjna:

$$\bigwedge_x \bigwedge_t \bigvee_u \bigvee_s \{[\sim\Phi(x) \vee \Psi(t, y)] \wedge [\sim\Psi(s, y) \vee \Phi(u)]\}.$$

Dyzjunkcyjna:

$$\bigwedge_x \bigwedge_t \bigvee_u \bigvee_s \{[\sim\Phi(x) \wedge \sim\Psi(s, y)] \vee [\sim\Phi(x) \wedge \Phi(u)] \vee$$
$$\vee [\Psi(t, y) \wedge \sim\Psi(s, y)] \vee [\Psi(t, y) \wedge \Phi(u)]\}.$$

3.194. Koniunkcyjna i dyzjunkcyjna: $\bigwedge\limits_z \bigwedge\limits_y [\sim\Phi(z) \vee \sim\Psi(x, y)]$.

3.195. $\sim\bigwedge\limits_x \{\bigvee\limits_y \Phi(x, y) \Rightarrow \sim\bigwedge\limits_y [\Psi(x, y, z) \vee \bigwedge\limits_z \Theta(x, y, z)]\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigvee_x \{\bigvee_y \Phi(x, y) \wedge \bigwedge_y [\Psi(x, y, z) \vee \bigwedge_z \Theta(x, y, z)]\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bigvee_x \bigvee_y \{\Phi(x, y) \wedge \bigwedge_u [\Psi(x, u, z) \vee \bigwedge_z \Theta(x, u, z)]\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bigvee_x \bigvee_y \bigwedge_u \{\Phi(x, y) \wedge [\Psi(x, u, z) \vee \bigwedge_t \Theta(x, u, t)]\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bigvee_x \bigvee_y \bigwedge_u \bigwedge_t \{\Phi(x, y) \wedge [\Psi(x, u, z) \vee \Theta(x, u, t)]\}.$$

Jest to postać koniunkcyjna. Postacią dyzjunkcyjną natomiast jest:

$$\bigvee_x \bigvee_y \bigwedge_u \bigwedge_t \{[\Phi(x, y) \wedge \Psi(x, u, z)] \vee [\Phi(x, y) \wedge \Theta(x, u, t)]\}.$$

Uwaga. Korzystamy tu w sposób istotny z faktu, że formuły Φ, Ψ i Θ nie zawierają w ogóle zmiennych u i t.

3.196. Koniunkcyjna:

$$\bigvee_x \bigwedge_u \bigwedge_t \bigvee_z \{[\Phi(u, y) \vee \sim\Psi(x, t)] \wedge [\Phi(u, y) \vee \sim\Theta(z, x)]\}.$$

Dyzjunkcyjna:

$$\bigvee_x \bigwedge_u \bigwedge_t \bigvee_z \{\Phi(u, y) \vee [\sim\Psi(x, t) \wedge \sim\Theta(z, x)]\}.$$

3.197. Wskazówka. Skorzystać z wyników zadań 3.190 i 3.191.

3.198. Wskazówka. Dowodzić podobnie jak zadanie 3.197.

3.199. Nie. Rożnorodność postaci wynika ze swobody wyboru zmiennych przy zamianie zmiennych związanych jak też i kolejności wynoszenia kwantyfikatorów.

DO ROZDZIAŁU IV

4.1. $D(R) = \{a, b\}$, $D^*(R) = \{b, c\}$.
4.2. $D(R) = \{a\}$, $D^*(R) = \{a, b, c\}$.
4.3. $D_1(R) = \{a\}$, $D_2(R) = \{b, c, d\}$, $D_3(R) = \{b, c\}$.
4.4. $D(R) = \mathcal{N}$, $D^*(R) = \mathcal{N} - \{0\}$.
4.5. $D_1(R) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = D_2(R)$, $D_3(R) = \{0, 1, 2, 3\}$.
4.6. $D_1(R) = \mathcal{R} - \{0\} = D_2(R)$, $D_3(R) = \mathcal{N}$.

4.8. R nie ma w zbiorze X żadnej z omawianych własności. Natomiast na zbiorze $\{a, b\}$ relacja R jest zwrotna, przechodnia, spójna i słabo asymetryczna.

4.9. R jest w X zwrotna, symetryczna i przechodnia. W zbiorze $\{a, b\}$ jest dodatkowo jeszcze spójna, w zbiorze $\{c, d\}$ jest przeciwsymetryczna.

4.10. R jest przeciwzwrotna, w zbiorze $\{a, b, c\}$ jest przeciwzwrotna, symetryczna i spójna, w zbiorze $\{a, c, d\}$ jest przeciwzwrotna i spójna.

4.11. R w X nie ma żadnej z omawianych własności. W zbiorze $\{a, b, c\}$ jest zwrotna, przeciwsymetryczna, przechodnia i spójna.

4.12. Jeśli $\langle x, y\rangle \in R$, to $x \in D(R)$, zaś $y \in D^*(R)$, czyli

$$\langle x, y\rangle \in D(R) \times D^*(R).$$

4.13. Niech $x \in X$, wtedy $\langle x, x\rangle \in R \wedge \langle x, x\rangle \in S$, czyli $\langle x, x\rangle \in R \cap S$, co wobec dowolności x dowodzi tezy twierdzenia.

4.14. Niech $I_{D(R) \cup D^*(R)} \subset R$, wtedy $\bigwedge\limits_{x \in D(R) \cup D^*(R)} \langle x, x\rangle \in R$, co właśnie znaczy, że relacja R jest zwrotna.

Odwrotnie jeśli relacja R jest zwrotna, to (z definicji) jest zwrotna na zbiorze $D(R) \cup D^*(R)$, czyli

$$\bigwedge_{x \in D(R) \cup D^*(R)} \langle x, x\rangle \in R, \quad \text{czyli} \quad I_{D(R) \cup D^*(R)} \subset R.$$

4.15. Jeśli relacja R jest przeciwzwrotna, to

$$\bigwedge_{x \in D(R) \cup D^*(R)} \langle x, x\rangle \notin R, \quad \text{czyli} \quad \bigwedge_{u} (u \in I_{D(R) \cup D^*(R)} \Rightarrow u \notin R),$$

a więc

$$I_{D(R)\cup D^*(R)} \cap R = O.$$

Zauważyć, że wszystkie przejścia są równoważnościami.

4.16. Zauważmy, że $I_{D(R)\cup D^*(R)} \cap R = O \Leftrightarrow I_{D(R)\cup D^*(R)} \subset X^2 - R$, a suma mnogościowa i iloczyn mnogościowy dowolnej rodziny zbiorów spełniających ten warunek też go spełnia.

4.17. Tak.

4.18. Tak, załóżmy, że $\langle x,y\rangle \in R - I_X$. Udowodnimy, że $\langle y,x\rangle \notin R - I_X$. Przypuśćmy przeciwnie, $\langle y,x\rangle \in R - I_X$, zatem $\langle y,x\rangle \in R$ (podobnie $\langle x,y\rangle \in R$) i na mocy słabej antysymetrii relacji R mamy $y = x$, co oczywiście jest sprzeczne z założeniem.

Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe; niech $\langle x,y\rangle \in R$, $\langle y,x\rangle \in R$ udowodnimy, że $x = y$. Przypuśćmy, że $x \neq y$. Wtedy $\langle x,y\rangle \in R - I_X$ i $\langle y,x\rangle \in R - I_X$, co jest sprzeczne z asymetrią relacji $R - I_X$.

4.19. Nie. **4.23.** Tak, wystarczy dodać I_X.

4.24. Nie. Na przykład $\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle\} \subset \{a,b\}^2$ nie daje się rozszerzyć.

4.25. Tak. **4.26.** Nie. **4.27.** Nie. **4.28.** Tak. **4.29.** Tak.

4.30. Przypomnijmy warunek symetrii:

$$\bigwedge_{x,y\in X} (\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R) \quad \text{czyli} \quad \bigwedge_{x,y\in X} (\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1}),$$

czego należało dowieść.

4.31. Udowodnimy najpierw, że $R \subset S \Rightarrow R^{-1} \subset S^{-1}$. Załóżmy, że $R \subset S$ i $\langle x,y\rangle \in R^{-1}$, wtedy $\langle y,x\rangle \in R$, $\langle y,x\rangle \in S$ i wreszcie $\langle x,y\rangle \in S^{-1}$. Z kolei $(R^{-1})^{-1} = R$. Jeśli $\langle x,y\rangle \in (R^{-1})^{-1}$, to $\langle y,x\rangle \in R^{-1}$ i $\langle x,y\rangle \in R$. Inkluzja odwrotna jest również oczywista. Jeśli teraz $R \subset R^{-1}$, to $R^{-1} \subset (R^{-1})^{-1}$, czyli $R^{-1} \subset R$, co daje razem $R = R^{-1}$. Implikacja w drugą stronę jest oczywista, bo jeśli $X = Y$, to $X \subset Y$.

4.32. a) Tak. Niech $\langle x,y\rangle \in (R \cup S)^{-1}$, wtedy $\langle y,x\rangle \in R \cup S$, co równoważne jest temu, że $\langle y,x\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in S$, skąd $\langle x,y\rangle \in R^{-1} \vee \langle x,y\rangle \in S^{-1}$ i wreszcie $\langle x,y\rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}$.

b) Tak. c) Tak. d) Tak.

4.33. Tak. Jest to w istocie inne sformułowanie definicji spójności.

4.34. Tak.

4.35. Tak. Załóżmy, że R i S są relacjami przechodnimi, niech $\langle x, y\rangle \in R \cap S$ i $\langle y, z\rangle \in R \cap S$. Wtedy $\langle x, y\rangle \in R$, $\langle x, y\rangle \in S$, $\langle y, x\rangle \in R$, $\langle y, z\rangle \in S$, a zatem $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$ oraz $\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in S$. Stąd $\langle x, z\rangle \in R$ i $\langle x, z\rangle \in S$ i wreszcie $\langle x, z\rangle \in R \cap S$.

4.36. Nie. Wystarczy podać kontrprzykład. Niech R będzie relacją niewiększości w $\mathcal{N}$, zaś S relacją niemniejszości w $\mathcal{N}$. Wtedy R i S są relacjami spójnymi, ale $R \cap S = I_{\mathcal{N}}$, zaś $I_{\mathcal{N}}$ nie jest relacją spójną.

4.37. Tak. Niech $\langle x, y\rangle \in X^2$. Wtedy $\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1} \cup I_X$ oraz $\langle x, y\rangle \in S \cup S^{-1} \cup I_X$, zatem

$$\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1} \cup I_X \cup S \cup S^{-1} \cup I_X =$$

$$= R \cup S \cup R^{-1} \cup S^{-1} \cup I_X = (R \cup S) \cup (R \cup S)^{-1} \cup I_X$$

(w ostatnim przejściu korzystaliśmy z zadania 4.32 a, a także z warunku sformułowanego w zadaniu 4.33).

4.38. Nie. Wystarczy podać kontrprzykład. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $R = I_X$, zaś $S = R \cup \{\langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle\}$. Oczywiście R jest relacją przechodnią, ale S nie; bowiem $\langle 1, 2\rangle \in S$ i $\langle 2, 3\rangle \in S$, ale $\langle 1, 3\rangle \notin S$.

4.39. Załóżmy, że relacja R jest przechodnia, tj.

$$\bigwedge_{x,y,z} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

i niech para $\langle x, z\rangle \in R \circ R$. Wtedy istnieje y takie, że $\langle x, y\rangle \in R$ i $\langle y, z\rangle \in R$, co na mocy przechodniości daje $\langle x, z\rangle \in R$. Odwrotnie, niech $R \circ R \subset R$, więc $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$, skąd $\langle x, z\rangle \in R \circ R$, ale $R \circ R \subset R$, więc $\langle x, z\rangle \in R$, co kończy dowód.

4.40. Niech $\langle u, v\rangle \in I_X \circ I_Y$. Wtedy istnieje takie t, że $\langle u, t\rangle \in I_X$ i $\langle t, v\rangle \in I_Y$, ale wówczas $u = t$ i $u \in X$ oraz $t = v$ i $v \in Y$, skąd $u = v = t$ i $t \in X \cap Y$. A więc $\langle u, v\rangle \in I_{X \cap Y}$. Odwrotnie $\langle u, v\rangle \in I_{X \cap Y}$ implikuje $u = v$ i $u \in X \cap Y$, skąd $\langle u, v\rangle \in I_X$ i $\langle v, v\rangle \in I_Y$, czyli $\langle u, v\rangle \in I_X \circ I_Y$.

4.41. Niech $\langle x, t\rangle \in R \circ (S \circ T)$. Wtedy istnieje y takie, że $xRy \wedge (S \circ T)t$, a więc istnieje też takie z, że $xRy \wedge (ySz \wedge zTt)$. Na mocy tautologii $[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ wnioskujemy, że $(xRy \wedge ySz) \wedge zTt$, co w końcu daje $x[(R \circ S) \circ T]t$. Zawieranie przeciwne dowodzimy analogicznie.

4.42. Załóżmy, że $\langle x, z\rangle \in (R \circ S)^{-1}$. Wtedy $\langle z, x\rangle \in R \circ S$, czyli istnieje takie y, że $\langle z, y\rangle \in R$ i $\langle y, x\rangle \in S$, a stąd $\langle y, z\rangle \in R^{-1}$ i $\langle x, y\rangle \in S^{-1}$, i wreszcie $\langle x, y\rangle \in S^{-1}$ i $\langle y, z\rangle \in S^{-1}$, co daje $\langle x, z\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Ponieważ wszystkie przejścia były równoważnościami, wynika stąd równość.

4.43. Niech $x \in D(R)$. Wtedy istnieje y takie, że $\langle x, y \rangle \in R$, a więc $\langle y, x \rangle \in R^{-1}$. Ale wówczas $\langle x, x \rangle \in R \circ R^{-1}$, co właśnie dowodzi (wobec dowolności x), że $I_{D(R)} \subset R \circ R^{-1}$. Analogicznie dowodzi się drugiej części zadania.

4.44. a) Relacje interpretujemy jako podzbiory płaszczyzny kartezjańskiej.

b) $D(R)$ jest wtedy rzutem R na oś Ox, a $D^*(R)$ rzutem na oś Oy.

c) Przekątna (tj. prosta opisana równaniem $y = x$) zawarta jest w R.

d) Prosta opisana równaniem $y = x$ jest osią symetrii figury reprezentującej relację R.

e) Suma mnogościowa figury reprezentującej relację R, prostej opisanej równaniem $y = x$ oraz figury symetrycznej względem tej prostej jest całą płaszczyzną.

f) Przekątna jest rozłączna z R.

g) R nie zawiera punktów symetrycznych względem prostej $y = x$.

h) Jedynymi punktami R symetrycznymi względem prostej $y = x$ są punkty leżące na tej prostej.

4.45. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.46. Zwrotność, symetria, przechodniość. Istotnie, dla każdego x mamy $2|2x$. Jeśli $2|x+y$, to $2|y+x$ (bo $x+y = y+x$), wreszcie, jeśli $2|x+y$ i $2|y+z$, to $2|x+2y+z$ i $2|2y$, a stąd $2|x+z$.

4.47. Antysymetria i przechodniość. Zwrócić uwagę na fakt, że R nie jest zwrotna, mianowicie $\langle 0, 0 \rangle \notin R$. Relacja R nie jest spójna bowiem $\langle 3, 5 \rangle \notin R$, $\langle 5, 3 \rangle \notin R$, $3 \neq 5$.

4.48. Przeciwzwrotność, asymetria, przechodniość.

4.49. Przeciwzwrotność, asymetria, przechodniość. Istotnie, załóżmy xRy i yRz, wtedy $x = 2$ i $y = 3$ ($R = \{\langle 2, 3 \rangle\}$) i $y = 2$ i $2 = 3$, co oczywiście nie jest możliwe. A więc cała implikacja $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ jest prawdziwa.

4.50. Przechodniość, słaba asymetria. Istotnie $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = 1 \wedge y = 1$, bo $R = \{\langle 1, 1 \rangle\}$, a więc $x = y$.

4.51. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.52. Przeciwzwrotność, symetria.

4.53. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.54. Słaba antysymetria. Istotnie, jeśli xRy i yRx, to $x^3 = y^2$ i $x^2 = y^3$, czyli $x = 0$ i $y = 0$ lub $x = 1$ i $y = 1$, więc zawsze $x = y$.

4.55. Przeciwzwrotność, asymetria, przechodniość. Zauważmy, że relacja R nie jest spójna; istotnie $2 \neq -2$, ale $\sim(2\, R -2) \wedge \sim(-2\, R\, 2)$.

4.56. Przeciwzwrotność, symetria.

4.57. Zwrotność, symetria. Zauważmy, że relacja R nie jest przechodnia. Istotnie $3\, R\, 1$ i $1\, R\, 0$ ale $\sim 3\, R\, 0$. Zauważmy, że wynika stąd, że istnieją relacje zwrotne i symetryczne ale nieprzechodnie, czyli innymi słowy, że własność bycia relacją zwrotną i symetryczną nie jest wystarczająca do bycia relacją przechodnią.

4.58. Symetria.

4.59. Zwrotność, symetria, przechodniość. Istotnie, jeśli $x \in \mathcal{N}$, to $x \leqslant 5$ lub $x > 5$. Jeśli $x \leqslant 5$, to xRx, więc $x = x$, jeśli $x > 5$, to $2|x+x$. Podobnie, jeśli xRy, to $(x \leqslant 5 \wedge y \leqslant 5 \wedge x = y)$ lub $(x > 5 \wedge y > 5 \wedge 2|x+y)$. W pierwszym przypadku $y = x$, a zatem yRx, a w drugim $2|y+x$. W każdym przypadku yRx.

4.60. Przeciwzwrotność, symetria, spójność.

4.61. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.62. Przeciwzwrotność, symetria.

4.63. Przeciwzwrotność. **4.64.** Przeciwzwrotność.

4.65. Asymetria. **4.66.** Słaba antysymetria.

4.67. Przeciwzwrotność, asymetria. **4.68.** Żadna.

4.69. Zwrotność, słaba antysymetria, przechodniość. Zauważyć, że $x-x = 0+0i$. Jeśli $x-y = a+bi$, zaś $y-x = c+di$, gdzie $a, b, c, d \in \mathcal{N}$, to $x-y+y-x = 0 = (a+c)+(b+d)i$, a stąd $a+c = b+d = 0$. Ponieważ $a \in \mathcal{N}$ i $c \in \mathcal{N}$, zatem $a = c = 0$, podobnie $b = d = 0$. Stąd $x-y = 0$, czyli $x = y$.

4.70. Zwrotność, symetria. Zauważyć, że rozważana relacja nie jest przechodnia. Istotnie $\langle 1, 1\rangle R\langle 0, 0\rangle$ i $\langle 0, 0\rangle R\langle 1, 2\rangle$, ale $\sim\langle 1, 1\rangle R\langle 1, 2\rangle$.

4.71. Symetria. **4.72.** Symetria.

4.73. Zwrotność, symetria, przechodniość. Istotnie $X \dot{-} X = O$, a zbiór O jest zbiorem skończonym. Następnie $X \dot{-} Y = Y \dot{-} X$. I wreszcie $X \dot{-} Z \subset$ $\subset (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)$.

4.74. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.75. Symetria. Relacja R nie jest przechodnia. Istotnie, niech $X = \mathrm{Par}$, $Y = \{1\}$, $Z = \mathrm{Par}$. Wtedy $X \cap Y = O = Y \cap Z$ i oczywiście $O \subset \mathcal{N} - \mathrm{Par}$, a stąd $XRY \wedge YRZ$, ale $X \cap Z = \mathrm{Par}$ i $X \cap Z \subset \mathcal{N} - \mathrm{Par}$.

4.76. Zwrotność, symetria, przechodniość. Ponieważ zadanie to jest bardzo ważne w późniejszych zastosowaniach, szczególnie związanych z *teorią modeli*, należy postarać się rozwiązać to zadanie, jeśli czytelnik nie umie rozwiązać go samodzielnie, winien dokładnie przeczytać rozwiązanie.

Zwrotność. Niech $X \in \mathscr{P}(X)$, wtedy $X \dot{-} X = O$. Zgodnie z warunkiem 1°: $X \dot{-} X \in I$, a więc XRX.

Symetria. Mamy $X \dot{-} Y = Y \dot{-} X$, jeśli więc $X \dot{-} Y \in I$, to także $Y \dot{-} X \in I$.

Przechodniość. Jeśli XRY i YRZ, to $X \dot{-} Y \in I$ i $Y \dot{-} Z \in I$, a zatem $(X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z) \in I$ (zgodnie z warunkiem 2°). Ponieważ $X \dot{-} Z \subset (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)$, więc $(X \dot{-} Z) \cup [(X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)] = (X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)$, a więc $(X \dot{-} Z) \cup [(X \dot{-} Y) \cup (Y \dot{-} Z)] \in I$, a stąd (na mocy warunku 2°) $(X \dot{-} Z) \in I$.

Zauważmy, że problem z zadania 4.73 jest szczególnym przypadkiem naszego zdania, mianowicie skończone podzbiory zbioru $\mathscr{N}$ tworzą ideał.

4.77. Przeciwzwrotność, asymetria, przechodniość. Zauważmy, że spójność nie zachodzi; $\sim \{1/n\}_{n \in \mathscr{N}} R \{1/n^2\}_{n \in \mathscr{N}}$, $\sim \{1/n^2\}_{n \in \mathscr{N}} R \{1/n\}_{n \in \mathscr{N}}$ i $\sim \{1/n\}_{n \in \mathscr{N}} = \{1/n^2\}_{n \in \mathscr{N}}$.

4.78. Symetria.

4.79. Zwrotność, symetria, przechodniość.

4.80. Zwrotność, przechodniość. Zauważmy, że relacja nasza nie jest słabo antysymetryczna, bowiem równość dziedzin relacji nie pociąga za sobą równość relacji.

4.81. Zwrotność, symetria, przechodniość. Zwrócić uwagę na rozwiązanie tego zadania, ponieważ jest ono ważne.

$\{x : f(x) \neq f(x)\} = 0 \in I$ (na mocy założenia),

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} = \{x : g(x) \neq f(x)\},$$
$$\{x : f(x) \neq h(x)\} \subset \{x : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x : g(x) \neq h(x)\}.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów stojących po stronie prawej należy do I, więc ich suma, a także i jej podzbiór $\{x : f(x) \neq h(x)\}$ należy do I.

4.82. Dowód a) $\Rightarrow$. Zauważmy, że $x \in [x]_R$, a więc $x \in [y]_R$.

$\Leftarrow$. xRy pociąga za sobą $\bigwedge\limits_{z} zRx \Leftrightarrow zRy$ (na mocy przechodniości i symetrii), co właśnie oznacza $[x]_R = [y]_R$.

Dowód b) $\Leftarrow$. Mamy

$$xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$$

(na mocy a), a zatem $[x]_R \cap [y]_R = [x]_R$, jednakże $x \in [x]_R$, a więc $[x]_R \cap [y]_R \neq O$.

$\Rightarrow$. Podobnie załóżmy, że $[x]_R \cap [y]_R \neq O$, istnieje więc takie z, że zRx i zRy. Wtedy jednak na mocy symetrii xRz i zRy, a zatem xRy.

4.83. Zwrotność. Ponieważ $\bigcup_{i \in I} X_i = X$, więc dla danego x, $\bigvee_{i \in I} x \in X_i$, czyli $\bigvee_{i \in I} (x \in X_i \wedge x \in X_i)$.

Symetria. Jeśli $\bigvee_{i \in I} (x \in X_i \wedge y \in X_i)$, to $\bigvee_{i \in I} (y \in X_i \wedge x \in X_i)$.

Przechodniość. Jeśli $x \in X_{i_0} \wedge y \in X_{i_0}$ oraz $y \in X_{i_1} \wedge z \in X_{i_1}$, to $i_0 = i_1$, bo $y \in X_{i_0} \cap X_{i_1}$, a więc $X_{i_0} \cap X_{i_1} \neq O$. Mamy więc $x \in X_{i_0}$ i $z \in X_{i_0}$, a stąd $\bigvee_{i \in I} (x \in X_i \wedge z \in X_i)$.

4.84. Relacja $R_{\mathfrak{X}}$ nie jest wtedy zwrotna.

4.85. Warunek konieczny i dostateczny jest następujący:

$$X_i \cap X_j \neq O \Leftrightarrow X_i = X_j.$$

4.86. Tak; są trzy klasy abstrakcji:

$$A_0 = \{6n : n \in \mathcal{N}\}, \quad A_1 = \{6n+2 : n \in \mathcal{N}\},$$

$$A_3 = \{6n+4 : n \in \mathcal{N}\}.$$

4.87. Tak; jeśli interpretujemy liczby zespolone jako punkty płaszczyzny, tj. liczbę $x+yi$ jako punkt $\langle x, y\rangle$, to klasami abstrakcji są proste równoległe do osi y.

4.88. Nie, ponieważ nie jest zwrotna.

4.89. Tak; są dwie klasy abstrakcji $A_0 = \mathrm{Par}$, $A_1 = \mathcal{N} - \mathrm{Par}$.

4.90. Nie. Relacja R nie jest symetryczna.

4.91. Nie. Relacja R nie jest przechodnia; mianowicie $1\,R\,3 \wedge 3\,R\,2$, ale $\sim 1\,R\,2$.

4.92. Tak. Klasa abstrakcji wyznaczona jest przez współczynniki przy potęgach większych lub równych 3.

4.93. Tak. Klasa abstrakcji, wyznaczona jest przez dowolny wielomian, w którym wszystkie różne od zera współczynniki są równe 1. Dodając doń kolejno wielomiany o wszystkich współczynnikach parzystych można otrzymać wszystkie wielomiany pozostające zeń w relacji.

4.94. Tak. Interpretując geometrycznie liczby zespolone widzimy, że jedna z klas abstrakcji mianowicie $[0]_R$ jest jednoelementowa, $[0]_R = \{0\}$. Pozostałe klasy mają postać prostej bez punktu; mianowicie jeśli $x \neq 0$, to $[x]_R$ powstaje z prostej przechodzącej przez punkt x i 0 po usunięciu punktu 0.

4.95. Tak. Zauważmy bowiem, że $a \in R$ oraz $(x+yi)^2 = ai$ oznacza po prostu $x^2-y^2 = 0$, czyli $x^2 = y^2$, a taka relacja jest oczywiście relacją równoważności. Każda klasa abstrakcji (poza klasą $[0]_R$, która jest jednoelementowa) jest dwuelementowa, składa się z x i $-x$.

4.96. Tak. Zauważmy, że wszystkie wielomiany tworzą jedną z klas abstrakcji.

4.97. Tak. Porównać z zadaniem 4.92.

4.98. Nie. Nie jest zwrotna.

4.99. Tak. Mamy dwie klasy abstrakcji $A_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 15\}$, $A_2 = \{2, 4, \ldots, 16\}$.

4.100. Tak. Klasa abstrakcji jest wyznaczona przez liczbę rzeczywistą, która jest wspólną granicą wszystkich elementów klasy.

4.101. Tak. Zadanie to jest w istocie inaczej sformułowanym zadaniem 4.100. Jeśli definiujemy relację $\lim(a_n-b_n) = 0$ między ciągami zbieżnymi liczb wymiernych $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ w następujący sposób:

$$\bigwedge_n \bigvee_k \bigwedge_m \left[m > k \Rightarrow |(a_m-b_m)| < \frac{1}{n}\right],$$

to klasy abstrakcji naszej relacji mogą być traktowane jako liczby rzeczywiste. Podana metoda konstrukcji liczb rzeczywistych pochodzi od G. Cantora.

4.102. Nie. Na przykład $\sim 1R1$.

4.103. Tak. Jest to w istocie konstrukcja pierścienia Z_k. Klas abstrakcji jest k; numerując je liczbami $0, 1, \ldots, k-1$ mamy $A_i = \{(k \cdot n)+i : n \in \mathcal{N}\}$.

4.104. Tak. $A_r = \{\mathbf{B} : \operatorname{Det} \mathbf{B} = r\}$, gdzie $r \in \mathcal{R}$.

4.105. Tak. Klasa abstrakcji wyznaczona jest przez element postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

4.106. Tak. $[0]_R = \mathcal{R}[t]$.

4.107. Nie. R nie jest relacją zwrotną.

4.108. Nie. R nie jest relacją przechodnią.

4.109. Nie. R nie jest relacją zwrotną.

4.110. Tak. Trudność sprawia jedynie dowód przechodniości.

Niech $xy = t^2$, zaś $yz = u^2$. Wtedy $xzy^2 = t^2u^2$, a zatem $y^2|(tu)^2$ i $y|tu$. Niech $w = tu|y$, wtedy $w \in \mathcal{N}$ i $xz = w^2$. Aby wyznaczyć klasy abstrakcji przypomnijmy twierdzenie, że każda liczba naturalna większa od jedności może być przedstawiona jako iloczyn $p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}$, gdzie p_i są liczbami pierwszymi $i < j \rightarrow p_i < p_j$ ($\alpha_i \neq 0$), i to dokładnie w jeden sposób. Dla danej liczby $a = p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}$ rozważmy $b = p_1^{\varepsilon_1}...p_n^{\varepsilon_n}$, gdzie ε_i jest 0 lub 1 w zależności od tego, czy α_i jest parzysta czy nieparzysta. Każda taka liczba b wyznacza klasę abstrakcji, jest ona nawet najmniejszą liczbą w tej abstrakcji.

4.111. Tak; klasa abstrakcji wyznaczona jest przez liczbę wymierną dodatnią, mianowicie przez ułamek, którego licznikiem jest pierwszy element pary, a mianownikiem drugi.

4.112. Tak. Klasy abstrakcji wyznaczone są przez liczby całkowite. Jest to zresztą jedna z metod konstrukcji liczb całkowitych.

4.113. Tak.

4.114. Nie. Nie jest bowiem symetryczna.

4.115. Tak; klasy abstrakcji są dwojakiego rodzaju; jednoelementowe, mianowicie $[x]_R = \{x\}$ dla x parzystych, oraz 3 inne klasy $A_0 = \{6n+1 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_1 = \{6n+3 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_2 = \{6n+5 : n \in \mathcal{N}\}$.

4.116. Tak. Mamy osiem klas abstrakcji $A_0 = \{6n : n \in \mathcal{N}\}$, $A_1 = \{6n+2 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_2 = \{6n+4 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_3 = \{10n+1 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_4 = \{10n+3 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_5 = \{10n+5 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_6 = \{10n+7 : n \in \mathcal{N}\}$, $A_7 = \{10n+9 : n \in \mathcal{N}\}$. Łatwo widzieć, że suma $A_0 \cup ... \cup A_7 = \mathcal{N}$.

4.117. Nie. Relacja R nie jest przechodnia. Niech bowiem a i b będą różnymi elementami zbioru X. Wtedy $\{a\}R\{O\}$ i $\{O\}R\{b\}$, ale nie $\{a\}R\{b\}$.

4.118. Nie. Nie jest zwrotna.

4.119. Tak. Mamy 11 klas abstrakcji; 9 jednoelementowych wyznaczonych przez takie $z \in \mathcal{Z}$, że $|z| < 5$. Prócz tego dwie inne nieskończone klasy abstrakcji złożone z pozostałych liczb parzystych i z pozostałych liczb nieparzystych.

4.120. Tak. Zauważmy, że jest to szczególny przypadek zadania 4.76. Jeśli bowiem X jest ustalonym zbiorem, zaś C ustalonym podzbiorem X, to $\mathcal{P}(C)$ jest ideałem w $\mathcal{P}(X)$. Każda klasa abstrakcji wyznaczona jest przez podzbiór zbioru $X - C$.

4.121. Tak. Mamy dwie klasy abstrakcji, jedna złożona z wielomianów stopnia parzystego, druga złożona z wielomianów stopnia nieparzystego.

Wskazówka. Skorzystać z prawa $\text{st}(f \cdot g) = \text{st} f + \text{st} g$.

4.122. Nie. Nie jest zwrotna.

4.123. Tak. Mamy dwie klasy abstrakcji jednoelementowe $[0]_R$ i $[1]_R$. Pozostałe klasy są nieskończone i są postaci $\{a^n : n \in \mathcal{N}\}$, gdzie a jest liczbą nie będącą potęgą całkowitą żadnej liczby.

4.124. Tak. Klasami abstrakcji są zbiory $A \times B$, gdzie A jest klasą abstrakcji dla relacji R_1, zaś B klasą abstrakcji dla relacji R_2. Tak określoną relację S nazywamy *iloczynem kartezjańskim* relacji R_1 i R_2. Tak więc udawadniamy w tym zadaniu twierdzenie: *Iloczyn kartezjański relacji równoważności jest relacją równoważności.* Można udowodnić, że iloczyn kartezjański częściowych porządków jest częściowym porządkiem. Analogiczne zdanie mówiące o relacjach spójnych jest fałszywe.

4.125. a) Tak. Relacja $R_1 \cap R_2$ jest bowiem zwrotna (porównaj zadanie 4.13), przechodnia (porównaj zadanie 4.35). Jeśli $\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$, to $\langle x, y\rangle \in R_1$ i $\langle x, y\rangle \in R_2$, a zatem $\langle y, x\rangle \in R_1$ i $\langle y, x\rangle \in R_2$ i wreszcie $\langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2$, co oznacza symetrię.

b) Nie. Nie jest przechodnia. Wystarczy podać przykład. Niech $X = \mathcal{N} - \{0\}$, zaś R_1 i R_2 odpowiednio $xR_1y \Leftrightarrow 3|x-y$, $xR_2y \Leftrightarrow 2|x-y$. Wtedy

$$\langle 1, 4\rangle \in R_1 \cup R_2, \quad \langle 4, 6\rangle \in R_1 \cup R_2, \quad \text{ale} \quad \langle 1, 6\rangle \notin R_1 \cup R_2.$$

c) Nie. Nie jest zwrotna.

Klasami abstrakcji relacji $R_1 \cap R_2$ są zbiory niepuste postaci $A \cap B$, gdzie A jest klasą abstrakcji dla relacji R_1, zaś B klasą abstrakcji dla relacji R_2.

4.126. a) Tak. Przeprowadzić dowód analogiczny do dowodu w zadaniu 4.125 a.

b) Nie. Przykład: $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$, $R_2 = \{\langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$.

4.127. b) Warunkiem tym jest, by funkcja f była różnowartościowa.

4.128. Niech $E[x]$ oznacza całości z x tj. największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x. Definiujemy $aRb \Leftrightarrow E[a] = E[b]$. Zauważmy, że R jest po prostu relacją $\sim_E$ (porównaj zadanie 4.127).

4.129. $xRy \Leftrightarrow 2|x+y$.

4.130. $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle \Leftrightarrow (xy = zt = 0) \vee (xy \neq 0 \wedge zt \neq 0 \wedge xz > 0 \wedge yt > 0)$.

4.131. $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle \Leftrightarrow (x^2+y^2 = z^2+t^2)$.

Uwaga. Punkt uważamy za zdegenerowany okrąg o promieniu 0.

4.132. Niech relacja $R_1 = R_{\mathscr{A}}$ i $R_2 = R_{\mathscr{B}}$, wtedy

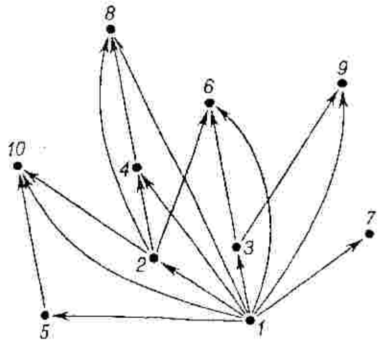
$$\bigwedge_{x,y} (xR_1y \Rightarrow xR_2y).$$

Każdy ze zbiorów B_s jest sumą pewnej podrodziny $\{A_t\}_{t \in T_s}$.

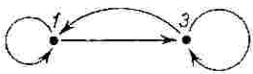
4.133. Wskazówka. Porównać z zadaniem 4.132.

4.134. Rys. 40. **4.135.** Rys. 41. **4.136.** Rys. 42 i rys. 43.

Rys. 40



Rys. 41



Rys. 42

Rys. 43

4.137. Z każdego punktu diagramu relacji zwrotnej wychodzi strzałka bezpośrednio wracająca do niego.

4.138. Diagram relacji przechodniej ma taką własność, że jeżeli z punktu a do punktu b można przejść idąc zgodnie ze strzałkami, to można też przejść za pomocą jednej strzałki.

4.139. Z żadnego punktu nie można wyjść i wrócić do niego idąc zgodnie ze strzałkami poprzez inne punkty.

4.140. Jeśli z punktu a jest strzałka do punktu b, to i odwrotnie, z punktu b jest strzałka do punktu a.

4.141. Dla dowolnych punktów a i b albo istnieje strzałka z a do b, albo z b do a.

4.142. Nie istnieją strzałki wychodzące z punktów i bezpośrednio wracające do nich.

4.143. Jeśli istnieje strzałka z a do b, to nie istnieje strzałka z b do a.

4.144. Jeśli z a można przejść do b, idąc zgodnie ze strzałkami, to i odwrotnie, można przejść z b do a.

4.145. W diagramie nie ma pętli, po których można się przesuwać zgodnie ze strzałkami.

4.146. Można go umieścić na linii prostej.

4.147. Żadna strzałka do tego punktu nie dochodzi.

4.148. Żadna strzałka z tego punktu nie wychodzi.

4.149. Można z niego dojść do każdego punktu na diagramie, idąc zgodnie ze strzałkami.

4.150. Można do niego dojść z każdego punktu na diagramie, idąc zgodnie ze strzałkami.

DO ROZDZIAŁU V

5.1. Niech $f: X \to Y$, $A \subset X$, $A \neq O$. Na mocy ostatniego z założeń istnieje takie x, że $x \in A$. Zgodnie z definicją $f(x) \in f * A$, a stąd $f * A \neq O$.

5.2. Funkcję $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ definiujemy za pomocą wzoru $f(x) = x^2$. Niech $A = \langle -2, -1 \rangle$. Oczywiście $A \neq O$, ale $f^{-1} * A = O$, ponieważ dla każdego x mamy $f(x) \in \mathscr{R}^+$, a $\langle -2, -1 \rangle \cap \mathscr{R}^+ = O$.

5.3. Zgodnie z definicją $I_X = \{\langle x, x \rangle : x \in X\}$. Należy udowodnić, że I_X jest funkcją, dziedziną I_X jest cały zbiór X, przeciwdziedziną I_X jest cały zbiór X, wreszcie, że f jest różnowartościowa. Jeśli para $\langle x, y \rangle \in I_X$, to $y = x$, a zatem jeśli $\langle x, y \rangle \in I_X$ i $\langle x, z \rangle \in I_X$, to $y = x$ i $z = x$, a zatem $y = z$.

Udowodniliśmy więc, że I_X jest funkcją. Ponieważ dla każdego $x \in X$ mamy $\langle x, x \rangle \in I_X$, zatem dziedziną I_X jest cały X. Z tego samego powodu $Wf = X$. Stąd $f: X \to X$. Różnowartościowość wynika z tego, że $\langle y, x \rangle \in$ $\in I_X \Rightarrow y = x$, a zatem $\langle y, x \rangle \in I_X$ i $\langle z, x \rangle \in I_X$ pociąga za sobą $y = x$ i $z = x$, a stąd $y = z$.

5.4. Nie. Należy wskazać dwie pary $\langle x, y_1 \rangle$ i $\langle x, y_2 \rangle$ takie, że $y_1 \neq y_2$, ale $\langle x, y_1 \rangle \in R$ i $\langle x, y_2 \rangle \in R$. W tym celu weźmy $x = 2$, $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

5.5. Tak. Istotnie $x^2 = y^2$ pociąga za sobą $|x| = |y|$. Jednakże w zbiorze $\mathscr{R}^+$ mamy $|x| = |x|$, tak więc $x = y$, a stąd $R = I_{\mathscr{R}^+}$.

5.6. Tak.

5.7. Nie. Pary $\langle 1, 1\rangle$ i $\langle 1, -1\rangle$ należą do R, ale $1 \neq -1$.

5.8. Nie. Pary $\langle 1, i\rangle$ i $\langle 1, 2i\rangle$ należą do R, ale $i \neq 2i$.

5.9. a) Każda prosta równoległa do osi Oy przecina zbiór R co najwyżej w jednym punkcie.

b) Każda prosta równoległa do osi Ox przecina zbiór R co najwyżej w jednym punkcie.

c) Każda prosta równoległa bądź do osi Ox, bądź do osi Oy przecina zbiór R co najwyżej w jednym punkcie.

d) Dla każdego zbioru płaskiego R istnieje zbiór płaski S taki, że rzut zbioru S na oś Ox jest taki sam jak rzut zbioru R na oś Ox i $S \subset R$ i każda prosta prostopadła do osi Ox ma ze zbiorem S przecięcie co najwyżej jednopunktowe.

5.10. f jest odwzorowaniem różnowartościowym, ale nie jest „na“, $Wf = \mathscr{R}^+ - \{0\}$.

5.11. f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym.

5.12. f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym, ani „na“, $Wf = \mathscr{Z}$, $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{3}) = 0$.

5.13. f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym ani „na“, $Wf = \mathscr{R} - \{2\}$, $f(1) = f(-\frac{1}{2}) = 0$.

5.14. f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym. Skorzystać z faktu, że pochodna funkcji f istnieje i jest stale dodatnia

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

oraz z własności Darboux.

5.15. f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym, ani „na“,

$$Wf = \left\langle f\left(\frac{\ln\ln 2 - \ln\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}\right), \infty\right\rangle.$$

5.16. f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym, ani „na“, $Wf = (-1, 1)$, $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$.

5.17. f nie jest przekształceniem różnowartościowym, ale jest „na“, $f(1) = f(0) = 0$.

5.18. f nie jest przekształceniem różnowartościowym, ale jest „na“, $f(1) = f(-1) = 0$.

Zauważyć, że funkcja jest ciągła, ma 3 miejsca zerowe,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$$

i skorzystać z własności Darboux.

5.19. f jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

5.20. f nie jest przekształceniem różnowartościowym ani „na", $f(1) = f(-1) = 1$, $Wf = \mathscr{R}^+$.

5.21. f nie jest przekształceniem różnowartościowym ani „na", $f(1) = f(-1) = 0$, $Wf = \langle -\frac{9}{4}, \infty)$.

5.22. f nie jest przekształceniem różnowartościowym ani „na",

$$Wf = \left\langle -\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^{-\frac{1}{\ln 2}-1} - 1, +\infty\right).$$

5.23. f nie jest odwzorowaniem różnowartościowym ani „na", $f(\pi) = f(0) = 0$, $Wf = \langle -1, 1\rangle$.

5.24. f jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym. Chociaż funkcja $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ nie jest ciągła w punkcie $x = -1$, ale określiliśmy dla tego punktu wartość ($f(-1) = 1$). Równocześnie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Wykres funkcji f składa się z dwóch gałęzi, dla $x < -1$ i dla $x > -1$. W pierwszym przedziale funkcja f jest monotoniczna, a gałąź znajduje się w całości poniżej prostej $y = 1$, w drugim wypadku funkcja f jest także monotoniczna, a wykres znajduje się w całości nad prostą $y = 1$.

5.25. Zauważmy, że $f\circ g(x) = f[g(x)]$. Równość $f\circ g = f$ oznacza, że dla każdego x mamy $f\circ g(x) = f(x)$, czyli $f[g(x)] = f(x)$. Jednakże funkcja f jest różnowartościowa, a zatem $g(x) = x$. Stąd $g = I_X$. Założenie różnowartościowości przekształcenia f jest istotne i nie może być pominięte, jak to pokazuje następujący przykład:

Niech $g: \mathscr{R}\to\mathscr{R}$ i $f: \mathscr{R}\to\mathscr{R}$ będą przekształceniami zadanymi wzorami $g(x) = |x|$, zaś $f(x) = x^2$. Ponieważ $|x|^2 = x^2$, więc $f\circ g = f$, ale oczywiście g nie jest identycznością.

5.26. Jak uprzednio, zauważmy, że $g\circ f(x) = g[f(x)]$. W ten sposób równość $g\circ f = f$ zastępujemy przez $g[f(x)] = f(x)$. Ponieważ przekształcenie f jest „na", zatem każdy element $t\in X$ ma postać $f(x)$ i wobec tego, dla każdego $x \in X$, $g(x) = x$. Rozpatrzenie tego samego przykładu co w zadaniu 5.25 daje dowód tego, że założenie o przekształceniu f, że jest ono „na“, jest istotne.

5.27. Twierdzenie występujące w zadaniu ma postać

$$(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s).$$

Wystarczy zatem udowodnić, że zdanie $p \wedge q \wedge (\sim r \vee \sim s)$ prowadzi nas do niedorzeczności. Innymi słowy, że przy założeniach zadania nie jest możliwe, by bądź f nie było różnowartościowe, bądź by g nie było „na“. Załóżmy na początek, że f nie jest przekształceniem różnowartościowym. Wtedy istnieją x_1 i x_2 takie, że $x_1 \neq x_2$, ale $f(x_1) = f(x_2)$. Niech y będzie wspólną wartością funkcji f w punktach x_1 i x_2. Z założenia $g \circ f = I_X$, czyli dla dowolnego x mamy $g[f(x)] = x$. Stąd $g[f(x_1)] = x_1$ i $g[f(x_2)] = x_2$, a więc $g(y) = x_1$ i $g(y) = x_2$. Ponieważ g jest przekształceniem, zatem $x_1 = x_2$, co jest niemożliwe.

Załóżmy więc, że przekształcenie g nie jest „na“, co oznacza, że $g * Y \neq X$. Ponieważ $g : Y \to X$, zatem $g * Y \subset X$. Wnioskujemy stąd, że $X - g * Y \neq O$. Niech $x \in X - g * Y$. Zgodnie z założeniem $g \circ f(x) = x$, czyli $g[f(x)] = x$. Stąd x jest wartością funkcji g (mianowicie w punkcie $f(x)$), co jest sprzeczne z założeniem.

5.28. a) Należy udowodnić implikacje w dwie strony. Udowodnimy najpierw, że jeśli istnieje lewa odwrotność, to f jest różnowartościowe. Jeśli bowiem f nie jest różnowartościowe, to istnieje takie x_1 i x_2, że $x_1 \neq x_2$, ale $f(x_1) = f(x_2)$, $g \circ f(x_1) = g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = g \circ f(x_2)$. Z założenia, że $g \circ f = I_X$ mamy, że $x_1 = x_2$, co jest sprzeczne z określeniem x_1 i x_2.

Jeśli zaś f jest odwzorowaniem różnowartościowym, a X jest zbiorem niepustym, to niech x_0 będzie ustalonym elementem X. Definiujemy g w następujący sposób: jeśli $g \notin f * X$, to $g(y) = x_0$. Jeśli $y \in f * X$, czyli $y = f(x)$, to określamy $g(y) = x$. Różnowartościowość funkcji f zapewnia nam, że definicja ta jest poprawna.

b) Wskazówka do konstrukcji odwzorowania prawostronnie odwrotnego do przekształcenia f, które jest „na“.

Dla danego $y \in Y$ niech $U_y = \{x : f(x) = y\}$ (tzn. $U_y = f^{-1} * \{y\}$). Niech g będzie funkcją o dziedzinie Y i taką, że $g(y) \in U_y$. Sprawdzić, że g jest żądanym przekształceniem prawostronnie odwrotnym.

Uwaga. Opisana konstrukcja wymaga tzw. aksjomatu wyboru (por. rozdział: Arytmetyka liczby kardynalnych i porządkowych).

5.29. Zauważmy na początek, że dla dowolnego przekształcenia

$f: X \to Y$ mamy $f \circ I_X = I_Y \circ f = f$. Następnie, że składanie przekształceń jest łączne, tj. że dla dowolnych f, g, h mamy $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Zastosujmy to prawo do złożenia $g_1 \circ (f \circ g_2)$. Ponieważ $f \circ g_2 = I_Y$, zatem $g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ I_Y = g_1$, równocześnie $g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_X \circ g_2 = g_2$. Stąd $g_1 = g_2$.

5.30. Załóżmy $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, czyli $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$. Na mocy różnowartościowości przekształcenia g otrzymujemy $f(x_1) = f(x_2)$, a stąd natychmiast $x_1 = x_2$.

5.31. Przypuśćmy przeciwnie, że g nie jest odwzorowaniem różnowartościowym. Istnieją wtedy y_1 i y_2 takie, że $y_1 \neq y_2$ i $g(y_1) = g(y_2)$. Ponieważ odwzorowanie f jest „na" zatem x_1 i x_2 są takie, że $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Oczywiście x_1 jest różne od x_2 (bowiem f jest funkcją). Rozpatrzmy wartość przekształcenia $g \circ f$ w punktach x_1 i x_2, $g \circ f(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1) = g(y_2) = g[f(x_2)] = g \circ f(x_2)$. Z otrzymanych równości wynika, że $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, co na mocy różnowartościowości $g \circ f$ daje $x_1 = x_2$ i sprzeczność.

Przykład: $f: \mathscr{R}^+ \to \mathscr{R}$, $g: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ są przekształceniami określonymi wzorami $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $g \circ f$ jest przekształceniem różnowartościowym, ale g nie jest.

5.32. Przypuśćmy przeciwnie, że przekształcenie f nie jest „na". Wtedy $f * X \neq Y$, czyli $Y - f * X \neq O$. Rozważmy $y_0 \in Y - f * X$ oraz wartość przekształcenia g w punkcie y_0 równą z_0. Ponieważ przekształcenie g jest różnowartościowe, zatem dla każdego $y \neq y_0$ jest $g(y) \neq z_0$. Jest więc tak i dla każdego $y \in f * X$, a zatem z_0 nie jest wartością funkcji $g \circ f$, co przeczy temu, że $g \circ f$ jest przekształceniem „na".

5.33. Przykład: $X = \mathscr{N}$. Ponieważ każda liczba naturalna n może być przedstawiona w dokładnie jeden sposób w postaci $2^l(2n+1)-1$ można przyporządkować liczbie n wykładnik l taki, że $n = 2^l(2n+1)-1$. Przekształcenie to oczywiście jest „na", ale nie jest różnowartościowe (np. $f(5) = f(9) = 1$). Oczywiście $Wf = \mathscr{N}$, bo na przykład $l = f(2^l - 1)$. Przykładu takiego nie można znaleźć wśród zbiorów skończonych. Dowód można przeprowadzić przez indukcję ze względu na ilość elementów zbioru X.

5.34. Przykład: $X = \mathscr{N}$, $f: \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ określone wzorem $f(n) = 2n$. Podobnie jak w zadaniu 5.33 odpowiedniego przykładu nie można znaleźć wśród zbiorów skończonych.

5.35. Wskazówka. Przeczytać rozwiązania zadań 5.17 i 5.18.

5.36. Załóżmy, że f jest „na". Niech $y \in Y$. Wtedy istnieje takie x, że $f(x) = y$. Z definicji ten właśnie element należy do $f^{-1} * \{y\}$. Podobnie każdy element x zbioru $f^{-1} * \{y\}$ ma własność $f(x) = y$. Jeśli więc $f^{-1} * \{y\}$ ma co najmniej jeden element, to jest zbiorem niepustym i y jest wartością funkcji f.

5.37. Wskazówka. Dowód, podobnie jak w zadaniu 5.36, wprost z definicji.

5.38. $f * \{a, b\} = \{a\}$. Otrzymany wynik wskazuje, że konieczne jest rozróżnianie pomiędzy $f(X)$ i $f * X$.

5.39. f jest przekształceniem różnowartościowym, ale nie „na", np. $3 \notin f * \mathcal{N}$.

5.40. Wystarczy udowodnić, że f jest różnowartościowe i „na". Przekształcenie f jest ciągłe (w sensie używanym w analizie matematycznej), a jego pochodna f' jest stale dodatnia. Stąd f jako funkcja ciągła i rosnąca jest różnowartościowa. Ponieważ zaś $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ i $f(x) > 0$, zatem f jest też „na". Przekształceniem odwrotnym jest $g : \mathcal{R}^+ - \{0\} \to \mathcal{R}$ określone wzorem $g(x) = \log_2 x$.

5.41. Przekształcenie odwrotne do odwzorowania f nie istnieje, f nie jest bowiem „na". Porównaj zadanie 5.36.

5.42. a) Tak. b) Tak. c) $\mathcal{R}_0[t]$. d) $\mathcal{R}_2[t]$. Ogólnie zauważmy, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ mamy $\varphi * \mathcal{R}_n[t] = \varphi^{-1} * \mathcal{R}_n[t] = \mathcal{R}_n[t]$.

5.43. a) Tak. Jeśli bowiem $f \in C_\infty\langle 0, 1\rangle$, to w szczególności f jest funkcją ciągłą na przedziale $\langle 0, 1\rangle$, jeśli więc zdefiniujemy pomocniczą funkcję g wzorem $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, wtedy $f = \varphi[g(x)+x]$.

b) Nie. $\varphi(x) = \varphi(x+1) = 0$.

c) $\{-1\}$, zbiór złożony z jednej funkcji stałej.

d) $\mathcal{R}[t]$.

e) Jest to zbiór wielomianów postaci $g(t)+k$, gdzie $g \in \mathcal{W}[t]$, zaś $k \in \mathcal{R}$.

f) Jest to zbiór funkcji postaci $-\cos x+x+k$, bądź $\sin x+x+k$, gdzie $k \in \mathcal{R}$.

g) $\{e^x+k : k \in \mathcal{R}\}$.

5.44. a) $\langle 0, 2\rangle$. Skorzystać z własności Darboux oraz ciągłości i różniczkowalności funkcji f.

b) $\langle 6, 12\rangle$.

c) O. Zauważyć, że odwzorowanie f posiada jedyne minimum w punkcie

$\frac{3}{2}$ równe $-\frac{1}{4}$, f jest ciągła i różniczkowalna, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, a stąd $f * \mathscr{R} = \langle -\frac{1}{4}, +\infty)$.

d) O. e) $\{0\}$.

5.45. a) $\langle 0, 2\rangle$. b) $\{1\}$. c) $\left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{2}+2}{2}, 2\right\}$.

d) Zbiór ten jest sumą przedziałów postaci

$$(-\tfrac{1}{6}\pi+2k\pi, \tfrac{7}{6}\pi+2k\pi),$$

czyli

$$f^{-1} * (\tfrac{1}{2}, \infty) = \bigcup_{k\in\mathscr{Z}} (-\tfrac{1}{6}\pi+2k\pi, \tfrac{7}{6}\pi+2k\pi).$$

e) $\bigcup\limits_{k\in\mathscr{Z}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$.

f) $\{\frac{3}{2}\pi+k\pi : k\in\mathscr{Z}\}$.

5.46. a) $\mathscr{R}_0^+[t]$. b) $\mathscr{R}_2[t]$. c) $\{t+1, -t-1\}$. d) O.

e) $\{t-1, 1-t, t^2-1, 1-t^2\}$.

5.47. a) Nie; $f(t^2+2) = f(1) = 1$.

b) Tak. $z = f(\mathrm{Im}(z)\, t+\mathrm{Re}(z))$.

c) Jest to zbiór wszystkich wielomianów podzielnych bez reszty przez dwumian t^2+1, czyli ideał główny generowany przez ten wielomian.

d) Jest to zbiór wielomianów postaci $\varphi(t)\,(t^2+1)+k$, gdzie $k\in\mathscr{R}$, czyli $\{\varphi(t)\,(t^2+1)+k : \varphi(t)\in\mathscr{R}[t] \wedge k\in\mathscr{R}\}$.

e) $\mathscr{R}[t]$.

5.48. a) Tak. Bowiem $f(\langle\varphi, 1\rangle) = \varphi$.

b) $\mathscr{R}_3[t]$. c) $\{0\}\times(\mathscr{N}-\{0\})$.

d) $\{\langle 1/n(t^2+t+1), n\rangle : n\in\mathscr{N}-\{0\}\}$.

5.49. a) Tak. Niech bowiem ε będzie pierwiastkiem z jedności stopnia n. Spośród pierwiastków z jedności stopnia nk możemy znaleźć ε_1 takie, że $\varepsilon_1^k = \varepsilon$.

b) Nie. Niech na przykład ε_1 i ε_2 będą dwoma różnymi pierwiastkami z jedności stopnia k, wtedy $\varepsilon_1^k = \varepsilon_2^k = 1$.

c) Jest to zbiór pierwiastków z jedności stopnia k.

d) $\{-1, 1\}$.

e) Jest to zbiór pierwiastków z jedności stopnia $4k$.

5.50. a) Tak. b) Nie. c) $\mathscr{R}$.

5.51. a) Nie. Na przykład wektor $[0, 0, 1]$ nie jest wartością rozważanej funkcji, ponieważ nie jest prawdą, że wektor [0, 0, 1] jest sam do siebie prostopadły.

b) Nie. $f([0, 0, 1]) = f([0, 0, 2]) = [0, 0, 0]$.

c) $\{[0, 0, k] : k \in \mathscr{R}\}$. d) $\{[s, 0, 0] : s \in \mathscr{R}\}$. e) O.

5.52. a) Nie; $\varphi * X = \mathscr{R}^+$.

b) Nie. Dla dowolnego wektora $\mathbf{s}$ mamy $\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(-\mathbf{s})$.

c) O. d) Wektor $[0, \ldots, 0]$.

e) Jest to powierzchnia kuli w $\mathscr{R}^n$ o promieniu 1.

5.53. a) Tak, bo $z = \varphi(z-1)$. b) $\langle -1, 0)$.

c) $(-\infty, -1)$. d) $\mathscr{N} - \{0\}$. e) $\{2, 3\}$.

5.54. a) Nie; $0 \notin \varphi * \mathscr{N}^2$. b) Nie; $\varphi(\langle 0, 1\rangle) = \varphi(\langle 1, 0\rangle) = 2$.

c) $\mathscr{N} - \{0, 1\}$. d) O.

e) $[\mathrm{Par} \times (\mathscr{N} - \mathrm{Par})] \cup [(\mathscr{N} - \mathrm{Par}) \times \mathrm{Par}]$.

5.55. a) Tak; $k = \varphi(\langle 1, k\rangle)$. b) Par.

c) $(\mathscr{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathscr{N})$. d) $(\mathrm{Par} \times \mathscr{N}) \cup (\mathscr{N} \times \mathrm{Par})$.

e) Niech T oznacza rozważany zbiór $\{2^n : n \in \mathscr{N}\}$. Wtedy $\varphi^{-1} * T = T \times T$.

5.56. a) Tak; $k = \varphi(\langle 1, k\rangle)$.

b) Nie; $\varphi(\langle a, b\rangle) = \varphi(\langle -a, b\rangle) = a^2 b$.

c) $(\{0\} \times \mathscr{Z}) \cup (\mathscr{Z} \times \{0\})$.

d) $\{\langle 1, 1\rangle, \langle -1, 1\rangle\}$. e) $\mathscr{Z} \times \mathscr{N}$.

f) Zbiór liczb naturalnych, które są kwadratami liczb naturalnych, tzn. zbiór $\{n : \bigvee_k n = k^2\}$.

5.57. a) Tak; $\langle k, l\rangle = \varphi\big((k+l)/2, (k-l)/2\big)$.

b) Tak. Jeśli bowiem $\varphi(\langle x, y\rangle) = \varphi(\langle x_1, y_1\rangle)$, to $x+y = x_1+y_1$ i $x-y = x_1-y_2$, a stąd $x = x_1$ i $y = y_1$, czyli $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$.

c) Jest to prosta $y = -1$.

d) $\{\langle 0, 0\rangle\}$.

5.58. a) Nie; $3 \notin f * \mathscr{N}^2$.

b) Nie; $f(\langle 7, 1\rangle) = f(\langle 1, 7\rangle) = 50$.

c) $\{\langle 0, 0\rangle\}$. d) O.

5.59. a) Nie; $2 \notin f * \mathscr{N}^2$.

b) Nie; $f(\langle 7, 5\rangle) = f(\langle 5, 1\rangle) = 24$.

c) $\{\langle x, x\rangle : x \in \mathscr{N}\}$, czyli $I_{\mathscr{N}}$. d) $\mathscr{N} - \mathrm{Par}$.

e) $\{k : \bigvee_l k = l^2\}$.

5.60. a) Tak; $x = f(\langle x, x\rangle)$.

b) Nie; $f(\langle 1, 2\rangle) = f(\langle 2, 2\rangle) = 2$. c) $\{\langle 0, 0\rangle\}$.

d) $(\{k\}\times\{1, 2, \ldots, k\}) \cup (\{1, 2, \ldots, k\}\times\{k\})$. e) $\mathcal{N}$.

5.61. a) Tak. b) Tak. c) $\mathcal{R}$. d) $\{x-i : x\in\mathcal{R}^+\}$. e) X.

5.62. a) $\langle -2\frac{1}{4}, +\infty)$. b) $\langle -2, +\infty)$. c) $(-2, 1)$.

d) $\left\langle -2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\rangle$.

e) $\{-2, 1\}$.

5.63. a) $\langle -2\frac{1}{4}, +\infty)$. Istotnie, funkcja nasza jest ciągła. Jej wykres ma kształt paraboli o ramionach skierowanych ku górze. Jest ona ponadto różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna ma jeden punkt zerowy, mianowicie $2\frac{1}{2}$. W punkcie tym jest minimum, bo pochodna dla liczb mniejszych niż $2\frac{1}{2}$ przyjmuje wartości ujemne, a dla większych dodatnie. Jest to oczywiście najmniejsza wartość, a nie tylko minimum lokalne, bo funkcja nie ma żadnych innych ekstremów (korzystamy tu z różniczkowalności na całej prostej). W punkcie $2\frac{1}{2}$ funkcja przybiera wartość $-2\frac{1}{4}$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, zatem $Wf = \langle -2\frac{1}{4}, +\infty)$.

b) $(4, +\infty)$. c) $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

d) $\left\langle \frac{5-\sqrt{24}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{24}}{2}\right\rangle$. e) $\{1, 4\}$.

5.64. a) $\langle 1, +\infty)$. b) $\{0\}$.

c) $\langle 1, 2\rangle$. Istotnie, $f(0) = 1$, zaś $f(1) = 2$. Na całym przedziale otwartym $(0, 1)$ funkcja nasza jest różniczkowalna, a jej pochodna $2^x\ln 2$ dodatnia, a więc funkcja f jest rosnąca i wobec tego $f * \langle 0, 1\rangle = \langle 1, 2\rangle$.

d) $\langle -\log_2 3, -1\rangle \cup \langle 1, \log_2 3\rangle$. Wskazówka. Zauważyć, że funkcja f jest parzysta i że wobec tego wykres jej jest symetryczny względem osi Oy, zaś przeciwobraz jakiegokolwiek zbioru ma środek symetrii w punkcie O. Następnie zastosować rozumowanie z punktu c.

e) $\{-2, 2\}$.

5.65. a) Tak. Dla każdego $x \in \langle 0, 1)$ mamy $x = f(x)$.

b) $\mathcal{L}$. Zbiór ten składa się bowiem z punktów x mających własność $E[x] = x$.

c) $\mathcal{R}$. d) $\mathcal{R} - \mathcal{L}$.

5.66. a) Tak. Funkcja nasza jest ciągła w całym zbiorze $\mathcal{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

b) Zauważmy, że $f(x) = (x-1)(x-1)^2$, zaś $f'(x) = 3x^2-2x-1 = (3x+1)(x-1)$. Stąd wiemy, że dla $x \in \langle 3, \infty)$ zachodzi $f'(x) > 0$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, zatem $f * \langle 3, \infty) = \langle f(3), +\infty) = \langle 16, \infty)$.

c) $\mathscr{R}$. d) $\{-1, 1\}$. e) $\{0, 3\}$.

5.67. a) Nie; na przykład $3 \notin f * \mathscr{W}$, gdyby tak było, to $\sqrt{2}$ byłby liczbą wymierną.

b) Nie; na przykład $\frac{3}{2} \notin f * \mathscr{W}$.

c) $\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$. d) $\{0\}$. e) $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle \cap \mathscr{W}$.

5.68. a) Tak. Zauważmy, że $f(3) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ i wreszcie na całym zbiorze $(3, +\infty)$ funkcja f jest różniczkowalna.

b) $\{2, 3\}$.

c) Ponieważ $\langle 3, \infty) \subset \langle 2, \infty)$, zatem także $f * \langle 3, \infty) \subset f * \langle 2, \infty)$, ale $f * \langle 3, \infty) = \mathscr{R}^0$, stąd także $f * \langle 2, \infty) = \mathscr{R}^0$.

d) $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \{2, 3\}$. e) $\{0, 2, 6\}$.

5.69. a) Nie; na przykład $1 \notin Wf$.

b) $\{3, 4\}$. c) $\left\langle \frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$.

d) $\{-6, -2, 0\}$. e) $(-\infty, \frac{1}{4}\rangle$.

5.70. Aby udowodnić to twierdzenie, należy pokazać, że 1° $(f * A) \cup (f * B) \subset f * (A \cup B)$ oraz 2° $f * (A \cup B) \subset (f * A) \cup (f * B)$.

1° Jeśli $y \in (f * A) \cup (f * B)$, to $y \in f * A$ lub $y \in f * B$. Jeśli pierwszy człon alternatywy jest prawdziwy, to istnieje takie $x \in A$, że $y = f(x)$. Ponieważ $x \in A$, zatem tym bardziej $x \in A \cup B$, zaś $y = f(x) \in f * (A \cup B)$. Analogicznie rozumujemy, jeśli drugi człon alternatywy jest prawdziwy.

2° Jeśli $y \in f * (A \cup B)$, to istnieje $x \in A \cup B$ taki, że $y = f(x)$. Zgodnie więc z definicją $x \in A$ lub $x \in B$, stąd $y \in f * A$ lub $y \in f * B$.

5.71. Jeśli $y \in f * A \cap B$, to, istnieje $x \in A \cap B$ taki, że $y = f(x)$. Zgodnie więc z definicją $x \in A$ i $x \in B$. Stąd $f(x) \in f(A)$ i $f(x) \in f(B)$, czyli $f(x) \in (f * A) \cap (f * B)$, a więc

$$y \in (f * A) \cap (f * B).$$

Przykład. Niech $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ będzie przekształceniem zdefiniowanym za pomocą wzoru $f(x) = x^2$. Niech $A = \mathscr{R} - \mathscr{R}^+$, $B = \mathscr{R}^+$. $A \cap B = O$, zatem $f * (A \cap B) = O$. Jednakże $f * A = \mathscr{R}^+ - \{0\}$, $f * B = \mathscr{R}^+$, zatem

$$(f * A) \cap (f * B) = \mathscr{R}^+ - \{0\}.$$

5.72. Jeśli $y \in (f * A)-(f * B)$, to $y \in f * A$ i $y \notin f * B$, a więc istnieje $x \in A$ takie, że $f(x) = y$. Oczywiście $x \notin B$ (bo wtedy $f(x) \in f * B$), skąd $x \in A-B$ i $f(x) \in f * (A-B)$.

Przykład. To samo przekształcenie co w zadaniu 5.71, tyle że bierzemy $A = \mathscr{R}$, $B = \mathscr{R}^+$.

5.73. Wskazówka. Dowód można łatwo uzyskać z zadania 5.70 zgodnie ze wzorem $u \subset v \Leftrightarrow u \cup v = v$.

5.74. Niech $x \in A$, wtedy $f(x) \in f * A$ i wobec tego zgodnie z definicją $x \in f^{-1} * (f * A)$.

Przykład. To samo przekształcenie co w zadaniu 5.71; wziąć $A = \mathscr{R}^+$.

5.75. Wskazówka. Naśladować rozumowanie z zadania 5.71.

5.76. Należy udowodnić: 1° $(f^{-1} * A) \cap (f^{-1} * B) \subset f^{-1} * (A \cap B)$. 2° $f^{-1} * (A \cap B) \subset (f^{-1} * A) \cap (f^{-1} * B)$.

1° Jeśli $x \in (f^{-1} * A) \cap (f^{-1} * B)$, to $x \in f^{-1} * A$ i $x \in f^{-1} * B$, czyli $f(x) \in A$ i $f(x) \in B$, a stąd $f(x) \in (A \cap B)$ i wreszcie $x \in f^{-1} * (A \cap B)$.

2° Jeśli $x \in f^{-1} * (A \cap B)$, to $f(x) \in A \cap B$, czyli $f(x) \in A$ i $f(x) \in B$, stąd $x \in f^{-1} * A$ i $x \in f^{-1} * B$, czyli $x \in (f^{-1} * A) \cap (f^{-1} * B)$.

5.77. Wskazówka. Rozumowanie takie jak w zadaniu 5.76.

5.78. Załóżmy, że $A \subset B$, $A \cup B = B$ i $f^{-1} * (A \cup B) = f^{-1} * B$. Zgodnie z wynikiem zadania 5.75 mamy $f^{-1} * (A \cup B) = (f^{-1} * A) \cup (f^{-1} * B)$, a stąd $(f^{-1} * A) \cup (f^{-1} * B) = f^{-1} * B$, czyli $f^{-1} * A \subset f^{-1} * B$.

5.79. Należy udowodnić dwie inkluzje: 1° $f * (f^{-1} * A) \subset A \cap (f * X)$ i 2° $A \cap (f * X) \subset f * (f^{-1} * A)$.

1° $y \in f * (f^{-1} * A)$ pociąga za sobą $y \in f * X$ (bo $f^{-1} * A \subset X$) oraz $y \in A$, bowiem $y \in f * (f^{-1} * A)$ oznacza, że istnieje $x \in f^{-1} * A$ takie, że $y = f(x)$, więc $y \in A$.

2° $y \in A \cap (f * X)$ oznacza, że $y \in A$ i y jest wartością przekształcenia f. Istnieje więc $x \in X$ takie, że $y = f(x)$. Oczywiście $x \in f^{-1} * A$, a stąd $y \in f^{-1} * A$.

5.80. Wskazówka. Zastosować rozumowanie z zadań 5.70 i 5.71.

5.81. Wskazówka. Zastosować rozumowanie z zadań 5.75 i 5.76.

5.82. Wskazówka. Należy udowodnić, że jeśli f nie jest przekształceniem różnowartościowym, to można w każdym z czterech przypadków skonstruować kontrprzykład. Jeśli f jest przekształceniem różnowartościowym, to zachodzi inkluzja odwrotna.

5.83. Wystarczy udowodnić, że: 1° jeśli przekształcenie f jest „na", to przeciwobraz dowolnego zbioru niepustego jest niepusty i 2° jeśli przekształcenie f nie jest „na", to istnieje zbiór niepusty, którego przeciwobraz jest pusty.

1° Niech $f: X \to Y$ będzie przekształceniem „na". $A \subset Y$, $A \neq O$. Jest więc y takie, że $y \in A$. Z założenia, że f jest „na" wynika, że istnieje takie x, że $f(x) = y$. Ten x właśnie należy do $f^{-1} * A$.

2° Przypuśćmy, że f nie jest przekształceniem „na". Wtedy $f * X \neq Y$ i wobec tego $Y - f * X \neq O$. Zbiór $Y \neq f * X$ jest zbiorem niepustym o pustym przeciwobrazie.

Uwaga metodologiczna. Użyte przez nas rozumowanie odpowiada następującej tautologii: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)]$.

5.84. Wskazówka. Jest to wniosek z zadań 5.79 i 5.83.

5.85. a) Należy udowodnić, że: 1° $f * [A \cap (f^{-1} * B)] \subset (f * A) \cap B$ i 2° $(f * A) \cap B \subset f * (A \cap f^{-1} * B)$.

1° $f * [A \cap (f^{-1} * B)] \subset (f * A) \cap f * (f^{-1} * B) = (f * A) \cap (B \cap f * X) = (f * A) \cap (f * X) \cap B = (f * A) \cap B$. Bowiem $A \subset X \Rightarrow f * A \subset f * X$ i stąd $(f * A) \cap (f * X) = f * A$.

2° Jeśli $y \in (f * A) \cap B$, to $y \in f * A$ i $y \in B$. Istnieje więc taki $x \in A$, że $f(x) = y$. Ponieważ $f(x) = B$, zatem $x \in f^{-1} * B$, stąd $x \in (A \cap f^{-1} * B)$, czyli $y \in f * (A \cap f^{-1} * B)$.

b) Mamy $A \subset f^{-1} * (f * A)$, a stąd $A \cap f^{-1} * B \subset f^{-1} * (f * A) \cap f^{-1} * B$, czyli $A \cap f^{-1} * B \subset f^{-1} * [(f * A) \cap B]$.

5.86. Wskazówka. Zauważyć, że samo założenie istnienia funkcji odwrotnej już zawiera w sobie stwierdzenie, że f jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym.

Uwaga. Fakt ten służy do dowodu wzoru $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Funkcje z zadania 5.88 nazywamy *funkcjami pary*.

5.89. $(g \circ f)(x) = E[x + \frac{2}{3}]$, $(g \circ f) * A = \{0, 1\}$, $(g \circ f) * \mathscr{R} = \mathscr{N}$.

5.90. $(g \circ f)(\langle x, y \rangle) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$.
$(g \circ f) * A = (1, 1 + \sqrt{2})$, $(g \circ f) * B = \langle 1, 1 + \sqrt{2} \rangle$.

5.91. $(g \circ f)(n) = n^2 - n$, $(g \circ f) * A = \{2, 12, 30, 56, 90\}$, $(g \circ f) * B = \{0\}$.

5.92. $(g \circ f)(n) = e^{n^2}$, $(g \circ f) * A = \{e^{n^2} : n \in \mathscr{N}\}$, $(g \circ f) * B = \{e^{4k^2} : k \in \mathscr{N}\}$.

6.2. Wykażemy, że $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \mathcal{R}^+$. Dla każdej liczby rzeczywistej nieujemnej x istnieje liczba naturalna n_x taka, że $n_x \leqslant x < n_x+1$. Istotnie, jako n_x można wziąć $E[x]$. A więc pokazaliśmy, że dla dowolnego $x \in \mathcal{R}^+$ istnieje n takie, że $x \in A_n$, a więc $x \in \mathcal{R}^+ \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n \in \mathcal{N}} A_n$.

Teraz wykażemy, że zachodzi też i implikacja w przeciwną stronę. Istotnie, jeśli $x \in \bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t$, to dla pewnego t_0 mamy $x \in A_{t_0}$. Ponieważ z założenia dla dowolnego t, $A_t \subset \mathcal{R}^+$, więc $x \in \mathcal{R}^+$, co kończy dowód.

Zupełnie podobnie można dowieść, że $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \mathcal{R}^+$.

Udowodnimy teraz, że $\bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = O$. Załóżmy bowiem, że istnieje taki x, że $x \in \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t$ i rozważmy liczbę n_x, o której była mowa poprzednio. Ponieważ $x < (n_x+1)-1$, więc oczywistym jest, że $x \notin A_{n_x+1}$, a więc nie jest prawdą, że x jest elementem wszystkich zbiorów A_t, co kończy dowód.

Jako prosty wniosek z poprzedniego rezultatu wynika, że $\bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = O$.

6.3. $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \mathcal{R}$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \{0\}$,

$\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \mathcal{R}$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \{0\}$,

6.4. $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \langle 0, +\infty)$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = O$,

$\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \langle 0, +\infty)$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = O$.

6.5. $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \langle 0, +1\rangle$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \{0\}$,

$\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \langle 0, +1)$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \{0\}$.

6.6. $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = (-1, 1\rangle$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \{0\}$,

$\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = (-1,1)$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \{0\}$.

6.7. $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \{0\} \cup \langle 1, +\infty)$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = O$,

$\bigcup\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \mathcal{R}^+$, $\quad \bigcap\limits_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = O$.

6.8. Wykażemy, że $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t = \langle 0,1)$. Niech bowiem x będzie dowolnym, ale ustalonym elementem $\bigcup\limits_{t \in \mathcal{N}} A_t$. Na mocy definicji sumy istnieje wtedy takie t_0, że $\frac{t_0}{t_0+1} \leqslant x < \frac{t_0+1}{t_0+2}$, skąd ze względu na to, że $t_0 \geqslant 0$ otrzymujemy natychmiast

$$0 \leqslant \frac{t_0}{t_0+1} \leqslant x < \frac{t_0+1}{t_0+2} < 1,$$

a więc $x \in \langle 0, 1)$.

Niech teraz x będzie dowolną, ale ustaloną liczbą przedziału $\langle 0, 1)$. Rozważmy zbiór $\left\{n \in \mathcal{N} : n > \frac{1-x}{x} - 1\right\}$. Jest to jak łatwo zauważyć zbiór niepusty, jest więc w nim liczba najmniejsza. Oznaczmy ją przez t_0. Mamy więc

$$t_0 > \frac{x}{1-x} - 1 \geqslant t_0 - 1,$$

skąd $t_0+1 > \frac{x}{1-x}$ i dalej $(t_0+1)(1-x) > x \quad (1-x > 0)$. Ostatecznie $t_0+1 > (t_0+2) \cdot x$ i wobec $t_0+2 > 0$ otrzymujemy $x < \frac{t_0+1}{t_0+2}$.

Z drugiej strony $\frac{x}{1-x} \geqslant t_0$, skąd $x \geqslant \frac{t_0}{t_0+1} \quad (t_0+1 > 0)$. A więc ostatecznie $x \in A_{t_0}$, co kończy dowód. $\bigcup_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \langle 0, 1)$, natomiast $\bigcap_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \bigcap_{t \in \mathcal{N}} A_t = O$.

6.9. $\bigcup_{t \in \mathcal{N}} A_t = (0, 3)$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{N}} A_t = \langle 1, 2\rangle$,

$\bigcup_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = (0, 3)$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \langle 1, 2\rangle$.

6.10. $\bigcup_{t \in \mathcal{N}} A_t = (-1, +1)$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{N}} A_t = \{0\}$,

$\bigcup_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = (-1, +1)$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = \{0\}$.

6.11. $\bigcup_{t \in \mathcal{N}} A_t = (0, 1) \cup (1, \sqrt[3]{3})$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{N}} A_t = O$,

$\bigcup_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = (0, 1) \cup (1, e^{1/e})$, $\quad \bigcap_{t \in \mathcal{R}^+} A_t = O$.

Wskazówka. Zbadać przebieg funkcji $t^{1/t}$.

6.12. Łatwo sprawdzić, że $\bigcup_{t \in \mathcal{N}} A_t = (-11, +\infty)$. Wykażemy teraz, że

$\bigcap_{t\in\mathcal{N}} A_t = \langle -10, -3)$. Rozważmy bowiem funkcję $f(t) = 2t^2 - 6t + 1$. Ze względu na to, że jest to trójmian kwadratowy, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, funkcja ta ma wartość minimalną. Korzystając ze znanych wzorów dochodzimy do wniosku, że funkcja nasza osiąga minimum dla $t = \frac{3}{2}$. A więc najmniejszą wartość dla t całkowitych funkcja może osiagnąć przy $t = 1$, bądź $t = 2$. Okazuje się jednak, że $f(1) = f(2) = -3$. A więc dla każdego t mamy $f(t) \geqslant -3$.

Niech teraz $x \in \bigcap_{t\in\mathcal{N}} A_t$. Mamy więc $x \in A_t$ dla każdego t, a więc w szczególności $x \in A_1$, skąd $x < 3$. Z drugiej strony jeśli $x < -10$, to biorąc jako najmniejszą spośród liczb t takich, że $t > \left|\frac{1}{x+10}\right| - 1$, otrzymujemy kolejno

$$t_0 > -\frac{1}{x+10} - 1, \quad (t_0+1)(x+10) < -1,$$

$$x+10 < -\frac{1}{t_0+1}, \quad x < -10 - \frac{1}{t_0+1},$$

skąd wynika, że $x \notin A_{t_0}$. A więc $-10 \leqslant x < -3$.

Jeśli jednak x jest takie, że $-10 \leqslant x < -3$, to dla dowolnego naturalnego t mamy $x > -10 - \frac{1}{t+1}$, a z analizy funkcji t wynika, że również dla każdego $t \in \mathcal{N}$, $f(t) \geqslant -3$, skąd dla każdego $t \in \mathcal{N}$ mamy $x < 2t^2 - 6t + 1$, co kończy dowód.

Natomiast $\bigcap_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = \langle -10, -\frac{7}{2})$, co wynika z faktu, że minimum $2t^2 - 6t + 1$ wynosi $-\frac{7}{2}$; $\bigcup_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = (-11, +\infty)$, co nie wymaga komentarzy.

6.13. $\bigcup_{t\in\mathcal{N}} A_t = \mathcal{R}^+ - \{x : \bigvee_{n\in\mathcal{N}} x = n^2\} = \mathcal{R}^+ - \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$,
$\bigcup_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = \mathcal{R}^+$, $\quad \bigcap_{t\in\mathcal{N}} A_t = O = \bigcup_{t\in\mathcal{R}^+} A_t$.

6.14. $\bigcup_{t\in\mathcal{N}} A_t = \mathcal{R} = \bigcup_{t\in\mathcal{R}^+} A_t$, $\quad \bigcap_{t\in\mathcal{N}} A_t = (-1, 2)$, $\quad \bigcap_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = \langle -1, \frac{15}{8})$.

6.15. $\bigcup_{t\in\mathcal{N}} A_t = \{x : \bigvee_{n\in\mathcal{Z}} (x = 2n\pi + \frac{1}{2}\pi \vee x = n\pi)\}$.

$$\bigcup_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = \{x : \sin x > 0\}, \quad \bigcap_{t\in\mathcal{N}} A_t = \bigcap_{t\in\mathcal{R}^+} A_t = O.$$

6.16. $\bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = O, \qquad \bigcup_{t\in\mathscr{R}^+} A_t = \{x : \bigvee_{n\in\mathscr{Z}} -\frac{1}{2}\pi+n\pi < x < \frac{1}{2}\pi+n\pi\}.$

6.17. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^2, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = \{\langle 0, 0\rangle\}.$

6.18. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^2, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = O.$

6.19. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}\times\mathscr{R}^+, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = \{\langle 0, 0\rangle\}.$

6.20. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^+\times\mathscr{R}, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = \{\langle 0, 0\rangle\}.$

6.21. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^2, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = O.$

6.22. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^2-\{\langle 0, 0\rangle\}, \quad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = O.$

6.23. $\bigcup_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}\times\mathscr{R}^+, \qquad \bigcap_{t\in\mathscr{R}} A_t = \mathscr{R}^+.$

6.24. $\bigcup_{n,m} A_{n,m} = \mathscr{R}^+, \quad \bigcap_{n,m} A_{n,m} = O, \quad \bigcup_n\bigcap_m A_{n,m} = \bigcap_n\bigcup_m A_{n,m} = O.$

6.25. $\bigcup_{n,m} A_{n,m} = \mathscr{R}^+, \quad \bigcap_{n,m} A_{n,m} = \bigcup_n\bigcap_m A_{n,m} = \bigcap_n\bigcup_m A_{n,m} = O.$

6.26. $\bigcup_n\bigcap_m A_{n,m} = \mathscr{R}^+, \quad \bigcup_m\bigcap_n A_{n,m} = \bigcap_n\bigcup_m A_{n,m} = O,$

$\bigcap_m\bigcup_n A_{n,m} = \mathscr{R}^+-\{k^2 : k\in\mathscr{N}\}.$

6.27. $\bigcup_n\bigcap_m A_{n,m} = \langle 1, \infty), \qquad \bigcap_n\bigcup_m A_{n,m} = O,$

$\mathscr{R}-\bigcup_n\bigcap_m A_{n,m} = (-\infty, 0), \quad \mathscr{R}-\bigcap_n\bigcup_m A_{n,m} = \mathscr{R},$

$\bigcap_m\bigcup_n A_{n,m} = \langle 1, \infty), \qquad \bigcup_m\bigcap_n A_{n,m} = O,$

$\bigcap_m\bigcup_n -A_{n,m} = \mathscr{R}, \qquad \bigcup_m\bigcap_n -A_{n,m} = (-\infty, 1).$

6.28. Wskazówka. Skorzystać z tautologii: $\bigwedge_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$.

6.29. Wskazówka. Skorzystać z tautologii: $\Phi(y) \Rightarrow \bigvee_x \Phi(x)$.

6.42. Nie. Wystarczy wziąć np. $A_t = \{x\in\mathscr{R}: x\leqslant t\}$, $B_t = \{x\in\mathscr{R}: t<x\}$, $T=\mathscr{R}$. 6.43. Nie. 6.44. Nie. 6.45. Nie.

6.47. Inkluzja zachodzi, ale nie może być zastąpiona równością.

6.57. PA_t jest zbiorem złożonym z jednego ciągu stale równego 1.

6.58. PA_t jest zbiorem wszystkich ciągów zerojedynkowych, tj. takich, których wyrazy są zerami bądź jedynkami.

6.59. PA_t jest zbiorem ciągów takich, że n-ty wyraz jest liczbą naturalną nie większą niż n.

6.60. PA_t jest zbiorem wszystkich funkcji o argumentach rzeczywistych i wartościach z przedziału $\langle 0, 1\rangle$.

6.61. PA_t jest zbiorem wszystkich funkcji f o argumentach rzeczywistych i takich, że $f(x) \leqslant x$.

6.62. PA_t jest zbiorem wszystkich funkcji f o argumentach rzeczywistych dodatnich takich, że $|f(x)| \leqslant x$.

6.63. PA_t składa się tylko z jednej funkcji $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określonej wzorem $f(x) = x$.

6.64. PA_t składa się tylko z jednej funkcji $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określonej wzorem $f(x) = -x$.

6.65. PA_t składa się tylko z jednej funkcji $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ określonej wzorem $f(x) = x^2+1$.

6.67. Uwaga. Konieczne jest skorzystanie z pewnika wyboru.

DO ROZDZIAŁU VII

7.1. Rozważmy zbiór $f = \{\langle 1, 5\rangle, \langle 2, 7\rangle\}$. Jest to jak łatwo sprawdzić funkcja taka, że $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, skąd $A \sim B$.

7.2. Wskazówka. Zauważyć, że oba zbiory mają po 7 elementów i skonstruować funkcję f jak w zadaniu 1.

7.4. Wskazówka. Rozważyć kolejno funkcje identyczności na A, odwrotną do $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ i superpozycję $g \circ f$, gdzie $g: B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C$.

7.6. Wskazówka. Jeśli $f: A_1 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B_1$, $g: A_2 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B_2$, to h określone wzorem $h(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle$ jest różnowartościowym odwzorowaniem $A_1 \times A_2$ na $B_1 \times B_2$.

7.7. Wskazówka. Jeśli $f: A_1 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B_1$, $g: A_2 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B_2$, to (przy założeniach zadania) $f \cup g$ odwzorowuje różnowartościowo $A_1 \cup A_2$ na $B_1 \cup B_2$.

7.8. Wskazówka. Jeśli $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, to (przy założeniach zadania) $f \cup Id_C: A \cup C \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B \cup C$.

7.9. Wskazówka. Jeśli $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, to $\tilde{f}$ określona wzorem $\tilde{f}(A_1) = f * A_1$ jest odwzorowaniem różnowartościowym $\mathscr{P}(A)$ na $\mathscr{P}(B)$.

7.10. Pokażemy, że $A = \{x \in \mathscr{N} : 10|x\}$ ma moc $\aleph_0$. W tym celu rozważmy funkcję $f(x) = 10 \cdot x$ określoną dla $x \in \mathscr{N}$. Jest to odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $\mathscr{N}$ na A. Funkcja f jest bowiem określona na całym zbiorze $\mathscr{N}$, wartościami jej są elementy zbioru A. Jest to także funkcja różnowartościowa, bo jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $10x_1 = 10x_2$, skąd $x_1 = x_2$.

Ponieważ $x \in A \Rightarrow \bigvee_{c \in \mathscr{N}} 10c = x$, więc $\bigvee_{c} f(c) = x$, zatem f jest odwzorowaniem na A.

7.11. Wskazówka. Rozważyć funkcję $f(m) = \ln(m+1)$ i skorzystać z monotoniczności funkcji logarytmicznej. Zbiór ma moc $\aleph_0$.

7.12. Wskazówka. Zauważyć, że jedynymi elementami zbioru są 0 i 1.

7.13. Zbiór ma moc $\aleph_0$.

7.16. Niech $f: A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathscr{N}$. Rozważmy $f * B$. Jeśli B jest zbiorem pustym, to oczywiście B jest zbiorem przeliczalnym. Załóżmy teraz, że B jest zbiorem niepustym. Oczywiście $f * B$ jest także zbiorem niepustym. Definiujemy przez indukcję różnowartościowe odwzorowanie zbioru $f * B$ na pewien odcinek początkowy zbioru $\mathscr{N}$. Odcinek ten jest bądź skończony bądź jest całym zbiorem $\mathscr{N}$. Złożenie $g \circ f$ odwzorowuje B na odcinek początkowy zbioru $\mathscr{N}$.

7.17. Oczywiście wystarczy udowodnić, że $A \cup B$ jest zbiorem przeliczalnym, bowiem pozostałe zbiory są jego podzbiorami (por. 7.16). Możemy przedstawić $A \cup B$ jako $A \cup (B-A)$. $B-A$ jest zbiorem przeliczalnym. Stąd A jest równoliczny z podzbiorem zbioru liczb parzystych, zaś $B-A$ z podzbiorem zbioru liczb nieparzystych. Ostatecznie $A \cup B$ jest równoliczny z podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

7.18. Wskazówka. Korzystając z zadania 7.14 przedstawić elementy zbioru $A \times B$ jako pary $\langle a_i, b_j \rangle$, gdzie $a_i \in A$, $b_j \in B$, a następnie pary te ustawić w ciąg według następującej relacji porządku R:

$$\langle a_i, b_j \rangle \; R \; \langle a_l, b_k \rangle \Leftrightarrow (i+j < l+k) \vee [(i+j = l+k) \wedge (i < l)].$$

Zbiór $A \times B$ ma moc $\aleph_0$ jedynie wówczas, jeśli A ma moc $\aleph_0$, a $B \neq O$ lub odwrotnie.

7.19. Zgodnie z założeniem istnieje $X_0 \subset X$ takie, że $\overline{\overline{X}}_0 = \aleph_0$. Niech $f : X_0 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{N}$. Określamy $X_1 = f^{-1} * \mathrm{Npar}$. Łatwo widzieć, że zachodzi $X - X_1 = (X - X_0) \cup f^{-1} * \mathrm{Par}$, $(X - X_0) \cap f^{-1} * \mathrm{Par} = O$. Określamy dla $x \in X - X_1$:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \in X - X_0 \\ f^{-1}(f(x)/2), & \text{jeśli } x \in f^{-1} * \mathrm{Par}. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $g : X - X_1 \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$.

7.21. Zbiór jest mocy $\aleph_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje n takie, że A_n jest pusty.

7.22. Określamy f na zbiorze liczb całkowitych wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jeśli } x \in \mathcal{N} \\ -2x - 1, & \text{jeśli } x \in \mathcal{Z} - \mathcal{N}. \end{cases}$$

Czytelnik sprawdzi, że $f : \mathcal{Z} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{N}$.

7.23. Wskazówka. Zadanie to można rozwiązać bądź udowadniając, że $\mathcal{W}$ jest równoliczne z podzbiorem $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$, a następnie korzystając z wyniku zadań 7.18. i 7.22, bądź też udowadniając wprost, że $\mathcal{W}^+$ jest zbiorem przeliczalnym, następnie pokazując, że $(\mathcal{W} - \mathcal{W}^+) \sim (\mathcal{W}^+ - \{0\})$ i wreszcie stosując rozumowanie z zadania 7.18.

7.26. Wskazówka. Skorzystać z zadań 7.25 i 7.21 (1).

7.27. Wskazówka. Zauważyć, że w każdym odcinku znajduje się jakaś liczba wymierna.

7.28. Wskazówka. Zauważyć, że jeśli funkcja ciągła ma ekstremum w punkcie x_0, to istnieje odcinek zawierający x_0 taki, że $f(x_0)$ jest wartością największą dla punktów tego odcinka i skorzystać z zadania 7.27.

7.29. Wskazówka. Zauważyć, że punkty nieciągłości funkcji monotonicznej wyznaczają na osi y rodzinę rozłącznych odcinków, a następnie skorzystać z zadania 7.27.

7.37. Zbiór ciągów ma moc $\aleph_0$, jeśli $A \neq O$.

7.38. Wskazówka. Każdy taki ciąg jest od pewnego miejsca stały i równy zero. Następnie korzystamy z zadania 7.20.

7.40. Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $f : \mathcal{N} \xrightarrow[\text{na}]{} A$. Definiuje-

---

(1) Zbiór, o którym mowa w zadaniu nazywa się zbiorem *liczb algebraicznych*.

my h na zbiorze A wzorem:

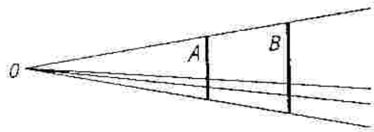
$$h(a) = n \Leftrightarrow f(n) = a \wedge \bigwedge_m (m < n \rightarrow f(n) \neq a).$$

W ten sposób otrzymujemy różnowartościowe odwzorowanie $h : A \rightarrow \mathcal{N}$. Stosując rozumowanie z zadania 7.16 otrzymujemy odwzorowanie g przekształcające A na odcinek początkowy zbioru $\mathcal{N}$. Jeśli $g : A \rightarrow \mathcal{N}$ i $g * A = \{0, \ldots, k-1\}$, to

$$f(n) = \begin{cases} g(n), & \text{jeśli } n < k, \\ g^{-1}(0), & \text{jeśli } n \geqslant k \end{cases}$$

odwzorowuje $\mathcal{N}$ na A. Jeśli wreszcie $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$ i $g : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{N}$, to $f = g^{-1}$ jest żądaną funkcją.

7.43. Wskazówka. Ścisły dowód oprzeć na następującej obserwacji z geometrii. Jeśli A i B są dowolnymi odcinkami otwartymi, to ustawiając je jak na rysunku 44 możemy punkty odcinków A i B leżące na tej samej siecznej wyprowadzonej z O zestawiać w pary i tak otrzymamy odwzorowanie różnowartościowe A na B.



Rys. 44

7.45. Ponieważ każde dwa odcinki otwarte są równoliczne (por. zadanie 7.43) wystarczy jako A wziąć np. odcinek $(0, 1)$ prostej liczbowej. Podobnie, jako B wystarczy na osi wziąć odcinek $(0, 1\rangle$. Funkcję $f : (0, 1\rangle \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (0, 1)$ definiujemy następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{dla} \quad x = \dfrac{1}{n}, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathcal{N} - \{0\}, \\ x & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że tak określona funkcja jest wzajemnie jednoznaczna.

7.51. Wskazówka. Dowieść najpierw, że kwadrat bez brzegów o boku 1 ma moc $\mathfrak{c}$.

W tym celu przedstawić jego punkty jako pary liczb rzeczywistych. Parze $\langle a, b\rangle$ przyporządkowujemy liczbę $0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots a_nb_n\ldots$, gdzie

$0, a_1a_2a_3\ldots$ jest rozwinięciem dziesiętnym liczby a, zaś $0, b_1b_2b_3\ldots$ jest rozwinięciem dziesiętnym liczby b.

Uwaga. To przyporządkowanie nie jest różnowartościowe, gdyż liczba może mieć dwa rozwinięcia dziesiętne, łatwo go już jednak zmodyfikować.

7.52. Wskazówka. W dowodzie tego, że $A \times B$ ma moc $\mathfrak{c}$ skorzystać z metody rozwiązania zadania 7.51.

7.54. Zbiór $A \times B$ ma moc $\mathfrak{c}$ chyba, że $B = O$ i wówczas $A \times B = O$.

7.57. Tak. **7.58.** Nie; jest to zbiór mocy $\aleph_0$.

7.59-67. Tak. **7.68.** Nie; jest to zbiór mocy $\aleph_0$.

7.69-74. Tak.

7.75. Wskazówka. Przeprowadzić dowód indukcyjny stosując metodę z zadania 7.51.

7.82. Wskazówka. Skorzystać z pewnika wyboru.

7.83. Uwaga. W dowodzie niezbędne jest skorzystanie z pewnika wyboru. Zbiór X spełniający warunki zadania nazywa się nieskończonym w sensie Dedekinda. Jeśli nie przyjmuje się aksjomatu wyboru, wówczas nie można dowieść, że zbiór, który nie jest nieskończony w sensie Dedekinda, jest skończony i moc takiego zbioru nazywa się *liczbą Dedekinda.*

7.85. $\overline{\overline{\underset{n \in \mathcal{N}}{P} A_n}} = \mathfrak{c}$, gdy zbiór $\{n \in \mathcal{N} : \overline{\overline{A}}_n \leqslant \aleph_0 \wedge \overline{\overline{A}}_n \geqslant 2\}$ ma moc $\aleph_0$.

7.93. Nie.

7.95. Niech $f: X \underset{\text{na}}{\to} \mathcal{P}(X)$. Rozważmy zbiór $Z = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Oczywiście $Z \subset X$, skąd $Z \in \mathcal{P}(X)$. Ponieważ f jest odwzorowaniem „na", istnieje więc $x_0 \in X$ takie, że $Z = f(x_0)$. Jeśli $x_0 \in Z$, to $x_0 \notin f(x_0) = Z$, co daje sprzeczność. Jeśli zaś $x_0 \notin Z$, to $x_0 \in f(x_0) = Z$, co też daje sprzeczność.

7.96. Wskazówka. Skorzystać z zadania 7.95.

Uwaga. Twierdzenie to zwane jest *twierdzeniem Cantora.*

DO ROZDZIAŁU VIII

8.1. b) Liczba 1 jest elementem najmniejszym, a więc jedynym elementem minimalnym.

c) Jeśli $x \in \mathcal{N}^+$, to $x | 2x$.

d) Są to zbiory postaci $\{k_1, k_1 \cdot k_2, k_1 \cdot k_2 \cdot k_3, \ldots\}$.

e) Są to podzbiory $X \subset \mathcal{N}^+$ takie, że dla każdych $x, y \in X$, $\mathrm{NWD}(x, y) \notin X$.

f) Relacja inkluzji jest porządkiem w każdej rodzinie zbiorów. Łańcuchy minimalne niepuste są to zbiory jednoelementowe. Łańcuch maksymalny ma następującą postać: Jeśli uporządkujemy taki łańcuch, to każda następna liczba w łańcuchu powstaje z liczby poprzedniej przez pomnożenie tej ostatniej przez liczbę pierwszą.

8.2. Elementem minimalnym jest O, maksymalnym X.

8.3. a) Nie. b) Nie.

c) Elementem minimalnym są zbiory jednoelementowe postaci $\{x\}$ dla $x \in X$. Elementami maksymalnymi są zbiory postaci $X - \{x\}$ dla $x \in X$.

d) Moc każdego z tych zbiorów jest równa $\overline{\overline{X}}$. Jeśli $X = \{x, y\}$, to $U = \{\{x\}, \{y\}\}$. Elementy maksymalne są wtedy równocześnie minimalnymi.

8.4. Tak. Jeśli $a \in Y$ jest elementem wyróżnionym w $\langle X, R\rangle$, to jest też elementem wyróżnionym w $\langle Y, Y^2 \cap R\rangle$.

8.5. a) Aby udowodnić twierdzenie zauważmy, że:

(1) Relacja odwrotna do relacji zwrotnej jest zwrotna.

(2) Jeśli $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$ i $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$, to $\langle y, x\rangle \in R$ i $\langle x, y\rangle \in R$, czyli $y = x$.

(3) Jeśli $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$ i $\langle y, z\rangle \in R^{-1}$, to $\langle z, y\rangle \in R$ i $\langle y, x\rangle \in R$, czyli $\langle z, x\rangle \in R$, czyli $\langle x, z\rangle \in R^{-1}$, co dowodzi przechodniości.

b) Tak. Wystarczy dowieść (ze względu na wynik punktu a) spójności, ale $\bigwedge_{x,y} [\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y]$ równoważne jest na mocy definicji $\bigwedge_{x,y} [\langle y, x\rangle \in R^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in R^{-1} \vee x = y]$, co oczywiście wyraża spójność relacji R^{-1}.

c) Nie; wystarczy wskazać kontrprzykład. Zbiór $\langle \mathcal{N}, \leqslant\rangle$ jest dobrze uporządkowany, ale zbiór $\langle \mathcal{N}, \geqslant\rangle$ nie jest dobrze uporządkowany.

d) Element minimalny (najmniejszy) w $\langle X, R\rangle$ staje się maksymalnym (największym) w $\langle X, R^{-1}\rangle$ i na odwrót.

8.6. a) Załóżmy, że x_0 jest elementem największym w $\langle X, R\rangle$, to znaczy $\bigwedge_x (x R x_0)$. Jeśli zachodzi $x_0 R x$ dla jakiegokolwiek x, wtedy (na mocy antysymetrii) $x_0 = x$, co należało udowodnić.

b) Wynika to łatwo z punktu a i z zadania 8.5 d.

8.7. Tak. I_X jest taką relacją.

8.8. Nie. Wymaga to dowodu. Zgodnie z założeniem $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$, są więc w zbiorze X elementy x, y takie, że $x \neq y$. Ponieważ relacja R jest spójna, zatem xRy lub yRx. Możemy założyć, że xRy. Na mocy symetrii (bo relacja R jest także równoważnością) mamy także yRx. Na mocy antysymetrii jest więc $x = y$, co jest sprzeczne z założeniem.

8.9. Zbiór X musi być skończony. Jeśli bowiem zbiór X jest nieskończony, to X zawiera podzbiór, o którym można założyć, że jest uporządkowany (przez relację $R \cap Z^2$), podobnie do zbioru liczb naturalnych. W relacji R^{-1} zbiór Z nie będzie miał elementu pierwszego.

Uwaga. Rozumowanie wymaga użycia pewnych środków wykraczających poza aksjomaty I-VII [3], rozdział II, na przykład tzw. *Zasady wyborów zależnych Tarskiego*. Dla każdego zbioru X i relacji $R \subset X^2$ takiej, że $\bigwedge_x \bigvee_y xRy$ istnieje ciąg $\underline{x} \in {}^{\mathcal{N}}X$ taki, że x_0Rx_1, $x_1Rx_2, \ldots$ $\ldots, x_nRx_{n+1}, \ldots$ Zasada ta jest konsekwencją pewnika wyboru.

8.10. Wskazówka. Dowód przez indukcję.

8.11. Porównaj zadanie 8.22.

8.12. Porównaj zadania 8.11 i 8.5 d.

8.13. a) Dowód przez indukcję ze względu na ilość elementów zbioru X. (1) Jeśli $\overline{\overline{X}} = 1$, to twierdzenie jest oczywiste.

(2) Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego zbioru X takiego, że $\overline{\overline{X}} = n$ oraz dowolnej relacji częściowo porządkującej $R \subset X^2$.

Rozważmy zbiór Y taki, że $\overline{\overline{Y}} = n+1$ oraz $R \subset Y^2$ częściowo porządkuje zbiór Y. Ponieważ Y jest zbiorem niepustym, to istnieje $y_0 \in Y$. Rozważmy zbiór

$$\langle Y - \{y_0\}, R \cap (Y - \{y_0\})^2 \rangle.$$

Zbiór ten jest częściowo uporządkowany i niepusty (możemy założyć $n \geqslant 1$). Zgodnie z założeniem indukcyjnym w zbiorze tym jest element maksymalny y_1. Rozważmy znowu zbiór $\langle Y, R \rangle$; w zbiorze tym zachodzi y_1Ry_0 lub $\sim y_1Ry_0$. W przypadku y_0 jest szukanym elementem maksymalnym, w drugim y_1 jest tym elementem.

b) Skorzystać z wyniku a oraz z zadania 8.5 d.

8.14. Wskazówka. Można udowodnić, przez odpowiednią modyfikację rozumowania z rozwiązania 8.13a, że dla każdego $x \in X$ istnieje element y taki, że xRy i y jest elementem maksymalnym. Stąd można wywnioskować, że jeżeli nie ma elementu największego, to istnieją w zbiorze X co najmniej dwa elementy maksymalne. Założenie skończoności jest istotne, na co wskazuje zadanie 8.11.

8.15. Wskazówka. Elementy x i y są *nieporównywalne* w sensie relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x, y\}$ tworzy antyłańcuch. Podzbiór antyłańcucha złożony z co najmniej dwóch elementów też jest antyłańcuchem.

8.16. Wskazówka. W zbiorze liniowo uporządkowanym każde dwa elementy są porównywalne.

8.17. Oznacza to, że zbiór $\langle A, R\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

8.18. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadań 8.4 i 8.10.

8.19. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadań 8.4, 8.13 a i b.

8.20. Na przykład $\langle X, I_X\rangle$, gdzie $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

8.21. a) (1) Relacja R jest zwrotna, bo ciąg x jest swoim własnym odcinkiem początkowym.

(2) Jeśli ciąg x jest odcinkiem początkowym ciągu y i odwrotnie, to muszą mieć identyczną długość (bo xRy pociąga za sobą $\mathrm{dł}x \leqslant \mathrm{dł}y$) i identyczne wyrazy.

(3) Przechodniość jest oczywista.

b) Nie. Dla każdego ciągu x można skonstruować ciąg późniejszy (w sensie relacji R), na przykład stawiając za ciągiem x liczbę 0.

c) Tak, istnieje nawet element najmniejszy — ciąg pusty.

d) Continuum.

8.22. a) Tak; maksymalne: liczba 3, minimalne: liczby 2 i 3.

b) Nie.

8.23. b) Elementy maksymalne: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, elementy minimalne: 2, 3, 5, 7.

c) $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 6, 12\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{2, 4, 12\}$.

8.24. b) Elementem najmniejszym jest funkcja tożsamościowa równa 0, elementów maksymalnych nie ma.

8.25. b) Na to, by w $\langle F, R\rangle$ były elementy minimalne (maksymalne) potrzeba i wystarcza, by w $\langle X, S\rangle$ były elementy minimalne (maksymalne). Postać ich jest następująca. Niech $I(J)$ będzie zbiorem elementów minimalnych (maksymalnych) w zbiorze $\langle X, S\rangle$. Wtedy każdy element zbioru ${}^{T}I({}^{T}J)$ jest minimalny (maksymalny) w $\langle F, R\rangle$. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, mianowicie elementy minimalne (maksymalne) w $\langle F, R\rangle$ są elementami zbioru ${}^{T}I({}^{T}J)$.

c) Na to, by w zbiorze $\langle F, R\rangle$ był element największy potrzeba i wystarcza, by w zbiorze $\langle X, S\rangle$ był element największy. Analogicznie dla elementu najmniejszego. Elementem największym jest funkcja stała, równa stałe największemu elementowi zbioru $\langle X, S \rangle$.

8.26. a) Elementem maksymalnym jest A_5. Elementami minimalnymi są A_0, A_1 i A_4.

b) Elementem największym jest A_5, elementu najmniejszego nie ma.

8.27. a) Elementem maksymalnym jest A_6. Elementami minimalnymi są A_1 i A_2.

b) Elementem największym jest A_6, elementu najmniejszego nie ma.

8.28. a) Elementami maksymalnymi są A_5 i A_6. Elementem minimalnym jest A_0.

b) Elementu największego nie ma, elementem najmniejszym jest A_0.

8.29. a) Zauważmy, że $A_0 = A_1 = O$ i że wobec tego w zbiorze istnieje element najmniejszy. Elementami maksymalnymi są A_2, A_3 i A_4.

8.30. b) Tak.

c) Elementem najmniejszym jest liczba 2, elementów maksymalnych nie ma.

8.31. a) Elementem najmniejszym jest liczba 1, elementów maksymalnych nie ma.

b) Tak.

8.32. b) Tak; jego liczbą porządkową jest $\omega+\omega$.

8.33. a) Elementem najmniejszym jest funkcja stała, równa 0. Elementów maksymalnych nie ma, dla każdego ciągu $\underline{a}$ ciąg $\underline{b}$ określony wzorem $b_n = a_n+1$ ma własność $\underline{a}R\underline{b}$ i $\underline{a} \neq \underline{b}$.

b) Nie. Ciągi $\underline{a} = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$ i $\underline{b} = \{0, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$ są nieporównywalne w sensie relacji R.

8.34. a) Zwrotność i asymetria są oczywiste, spójność wynika z tego, że na pierwszym miejscu k, na którym ciągi $\underline{a}$ i $\underline{b}$ są różne bądź $a_k > b_k$, bądź $b_k > a_k$.

Przechodniość. Niech k_1 będzie pierwszą liczbą k taką, że $a_k < b_k$, zaś k_2 pierwszą liczbą k taką, że $b_k < c_k$. Jeśli $k_1 \leqslant k_2$, to $a_{k_1} < b_{k_1} = c_{k_1}$. Jeśli natomiast $k_2 < k_1$, to $a_{k_2} = b_{k_2} < c_{k_2}$.

8.35. b) Nie. Liczby 1 oraz i nie są porównywalne w sensie relacji R.

8.36. b) Nie.

8.37. $xRy \wedge \bigwedge_z [(xRz \wedge zRy) \Rightarrow (z = x \vee z = y)]$.

8.38. Następnik elementu x jest pierwszym elementem w zbiorze

$\{y : xRy \wedge x \neq y\}$, o ile zbiór ten jest niepusty. Nie każdy element (nie będący pierwszym) musi mieć poprzednik. Na przykład zbiór $\{1-1/n : n \in \mathcal{N}-\{0\} \cup \{1\}\}$ z relacją $\leqslant$ ograniczoną do elementów tego zbioru jest dobrze uporządkowany. Natomiast, liczba 1 nie ma bezpośredniego poprzednika.

8.39. Warunek ten, chociaż konieczny na mocy zadania 8.38, nie jest warunkiem dostatecznym. Rozważmy mianowicie zbiór liczb całkowitych $\langle \mathcal{Z}, \leqslant \rangle$. W zbiorze tym każdy element ma następnik, ale nie jest on dobrze uporządkowany.

8.40. a) Rozważmy zbiór $\bigcup_{n \in \mathcal{N}} \{0, 1\}^n$, to znaczy zbiór wszystkich ciągów zero-jedynkowych skończonych. Relację R pomiędzy dwoma ciągami $\underline{a}$ i $\underline{b}$ określamy jak następuje $\underline{a}R\underline{b}$, jeśli $\underline{a} = \underline{b}$ lub ciąg $\underline{b}$ jest przedłużeniem ciągu $\underline{a}$.

b) Zbiór łańcuchów w dowolnie obranym przykładzie ma moc większą albo równą continuum.

8.42. a) Należy sprawdzić, że własność spójności zachowuje się przy relacji podobieństwa. Niech zatem $z, t \in Y$. Zgodnie z założeniem $z = f(x)$ i $t = f(y)$ (dla pewnych x i $y \in X$). Ponieważ relacja R jest spójna, zatem $x R y \vee y R x$, a więc $f(x) S f(y) \vee f(y) S f(x)$, czyli $z S t \vee t S z$.

b) Niech U będzie niepustym podzbiorem zbioru Y. Zgodnie z założeniem, że przekształcenie f jest „na", zbiór $f^{-1} * U \neq O$. Ma on więc element pierwszy x. Łatwo sprawdzić, że $f(x)$ jest pierwszym elementem zbioru U.

8.43. Zasady abstrakcji nie możemy stosować, bo wolno ją stosować do relacji, a więc do zbiorów par. W szczególności, jeśli opieramy się na aksjomatyce opisanej w [3], to rodzina wszystkich takich zbiorów $\langle Y, S \rangle$, że $\langle X, R \rangle \approx \langle Y, S \rangle$ nie tworzy zbioru.

8.44. a) Załóżmy, że a jest elementem maksymalnym w zbiorze $\langle X, R \rangle$. Twierdzimy, że $f(a)$ jest elementem maksymalnym w zbiorze $\langle Y, S \rangle$. Jeśli bowiem tak nie jest, to istnieje b takie, że $f(a) S b \wedge f(a) \neq b$. Ponieważ przekształcenie f jest „na", zatem istnieje $c \in X$ takie, że $b = f(c)$. Zgodnie z założeniem $f(a) S f(c)$ pociąga za sobą aRc. Równocześnie $a \neq c$, bo f jest funkcją. Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że a jest elementem maksymalnym.

b) Załóżmy, że A jest antyłańcuchem w $\langle X, R \rangle$, rozważmy $f * A$. Jeśliby $f * A$ nie było antyłańcuchem w $\langle Y, S \rangle$, to istniałyby elementy

$u, v \in f * A$ takie, że $u S v \vee v S u$. Zgodnie z założeniem mamy $u = f(x)$, zaś $v = f(y)$ dla pewnych $x, y \in A$. A więc $xRy \vee yRx$.

8.45. Wskazówka. $(R^{-1})^{-1} = R$.

8.46. a) Zauważmy, że jeśli $x < y$, to $x < \frac{x+y}{2} < y$.

8.47. Przypuśćmy przeciwnie. Istnieją wtedy zbiory $\langle X, R\rangle$ i $\langle Y, S\rangle$ takie, że $\langle X, R\rangle \approx \langle Y, S\rangle$, zbiór $\langle X, R\rangle$ gęsty, ale $\langle Y, S\rangle$ nie jest gęsty. Niech f ustala podobieństwo tych zbiorów. Ponieważ zbiór $\langle Y, S\rangle$ nie jest gęsty, zatem są w nim elementy z, t takie, że t jest bezpośrednim następnikiem z. Można założyć, że $z = f(x)$ i $t = f(y)$. Zgodnie z zadaniem 8.44 c y jest bezpośrednim następnikiem x, a zatem zbiór $\langle X, R\rangle$ nie jest gęsty.

8.48. Rozważmy x_0 pierwszy element zbioru $\langle X, R\rangle$. Nie jest on elementem największym, ponieważ $\overline{\overline{X}} \geqslant 2$. Niech x_1 będzie następnikiem x_0 w zbiorze $\langle X, R\rangle$. Oczywiście dla żadnego x_2 różnego od x_1 i x_0 nie zachodzi $x_0 R x_2$ i $x_2 R x_1$.

8.49. a) Zbiór ten nie jest gęsty. Na przykład ciąg $\{0, 1, 0, 0, \ldots\}$ jest jednym z bezpośrednich następników ciągu $\{0, 0, 0, \ldots\}$.

b) Zbiór ten nie jest gęsty.

Uwaga. Wynika to stąd, że w zbiorze X mogą istnieć relacje R i S takie, że $\langle X, R\rangle$ nie jest zbiorem gęstym, $\langle X, S\rangle$ jest zbiorem gęstym i $R \subset S$.

8.50. a) Tak. Jeśli $x R y$, to $x R \frac{x+y}{2}$ i $\frac{x+y}{2} R y$.

b) Tak.

8.51. Nie.

8.52. Wskazówka. Dobrze uporządkować oba zbiory w typ ω, a następnie konstruować odpowiednie przyporządkowanie w następujący sposób: Rozważać elementy na przemian z obu zbiorów zapewniając sobie dobór odpowiedniego elementu, bądź z drugiego, bądź z pierwszego ze zbiorów.

8.53. Wskazówka. Odpowiednim odwzorowaniem jest $f(x) = -(x+1)$.

8.54. Wskazówka. Odpowiednim odwzorowaniem jest $f(x) = -x$.

8.55. Porównaj zadanie 8.54.

8.56. Podamy szkic dowodu. Niech x_0 będzie dowolnym, ale ustalonym elementem zbioru X. Ustalamy $f(x) = 0$. Rozważamy teraz x_1, który jest poprzednikiem x_0 i definiujemy $f(x_1) = -1$. Analogicznie dla x_2, następnika

x_0, definiujemy $f(x_2) = 1$ itd. Dowodzimy teraz, że przedłużając konstrukcję wyczerpiemy cały zbiór X.

8.57. Nie; bowiem rozważany zbiór ma element ostatni, a zbiór liczb naturalnych nie ma elementu ostatniego (porównaj zadanie 8.44 a).

8.58. b) Wskazówka. Rozważyć konstrukcję Cantora (bądź konstrukcję Dedekinda) liczb rzeczywistych.

8.59. Wskazówka. Skorzystać z następującej własności zbioru liczb wymiernych. Dla każdego zbioru liniowo uporządkowanego $\langle X, R\rangle$ takiego, że $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$ istnieje przekształcenie f różnowartościowe takie, że $f: X \to \mathscr{W}$ i takie, że

$$x\,R\,y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Następnie przeprowadzić odpowiednio zmodyfikowaną konstrukcję Dedekinda liczb rzeczywistych.

8.60. Należy tylko udowodnić, że

$$\bigwedge_{x,y} [f(x)\,S\,f(y) \Rightarrow x\,R\,y].$$

Załóżmy, zatem, że $f(x)\,S\,f(y) \wedge \sim x\,R\,y$. Ponieważ relacja R jest spójna, zatem $y\,R\,x$ i $x \neq y$. Na mocy założenia $f(y)\,S\,f(x)$ i $f(y) \neq f(x)$. Jednakże na mocy antysymetrii relacji S mamy $f(x) = f(y)$.

8.61. Zbiór $\langle \mathscr{N}, \geqslant\rangle$ nie jest dobrze uporządkowany, ponieważ nie każdy jego podzbiór niepusty ma element pierwszy w sensie relacji $\geqslant$, na przykład cały zbiór $\mathscr{N}$ nie ma elementu pierwszego w sensie relacji $\geqslant$ (bo musiałaby to być największa liczba naturalna).

8.62. Wskazówka. Dowód przez kontrapozycję; założyć, że zbiór X jest nieskończony i znaleźć podzbiór $X_0 \subset X$ uporządkowany w typ ω, a następnie skorzystać z zadania 8.61.

8.63. (1) Zwrotność. Niech $x \in X$. W zbiorze $\{x\}$, który jest niepusty, musi być element pierwszy. Musi być nim x, a więc $x\,R\,x$.

(2) Spójność. Rozważyć zbiór $\{x, y\}$. Element pierwszy w tym zbiorze, powiedzmy x, ma własność $x\,R\,y$.

(3) Przechodniość. Rozważyć zbiór $\{x, y, z\}$.

Warunek (4) jest istotny, bo jeśli zbiór X jest niepusty i ma moc $\geqslant 2$, to relacja X^2 spełnia warunek e, ale nie jest dobrym porządkiem.

8.64. a) Są to skończone zbiory postaci $\{0, 1, \ldots, n\}$, oraz zbiór pusty.

b) Są to zbiory postaci $(-\infty, x) \cap W$, $(-\infty, x\rangle \cap W$ oraz zbiór pusty.

8.65. Wskazówka. Skorzystać z zadania 8.52.

8.67. Niech Z będzie zbiorem tych $x \in X$, że $\sim \Phi(x)$. Jeśli Z jest zbiorem pustym, to wszystkie elementy zbioru X mają własność Φ. Udowodnimy, że założenie $Z \neq O$ prowadzi do sprzeczności. Jeśli bowiem $Z \neq O$, wtedy Z ma element pierwszy z_0. Zgodnie z założeniem, że z_0 jest pierwszym elementem zbioru Z, warunek $t R z_0$ i $t \neq z_0$ pociąga za sobą $\Phi(t)$. A więc $t \in O_R(z_0) \Rightarrow \Phi(t)$. Stąd $\Phi(z_0)$.

8.68. Wskazówka. Skorzystać z zadania 8.67, dobierając odpowiednią własność Φ.

8.69. Wskazówka. Skorzystać z zadania 8.67, dobierając odpowiednią własność Φ.

8.70. Wskazówka. Konstruujemy odpowiedni łańcuch przez indukcję pozaskończoną w następujący sposób: x_0 wybieramy w dowolny sposób, $x_{\alpha+1}$ jako dowolny element zbioru $\{y : x_\alpha R y \wedge x_\alpha \neq y\}$, o ile ten ostatni zbiór jest niepusty, x_λ — jako dowolne ograniczenie górne zbioru $\{x_\mu : \mu < \lambda\}$. Udowodnić, że rozważane postępowanie musi się urwać.

8.71. Wskazówka. Udowodnić, że zbiór takich relacji S, że $R \subset S$ i S jest częściowym porządkiem zbioru X, spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Element maksymalny w rozważanej rodzinie relacji jest żądanym liniowym porządkiem.

8.72. Wskazówka. Zmodyfikować postępowanie z zadania 8.71, rozważając tylko takie relacje S, w których a jest elementem maksymalnym.

8.73. Skorzystać z zadania 8.5.

8.74. Wskazówka. Udowodnić, że rodzina wszystkich funkcji f takich, że:

1° Dziedzina Df funkcji f jest zawarta w T,

2° $\bigwedge\limits_{t \in Df} f(t) \in X_t$ wraz z relacją $R : f R g \Leftrightarrow$ funkcja g jest przedłużeniem funkcji f, spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

8.75. Wskazówka. Udowodnić, że rodzina wszystkich zbiorów U takich, że:

a) $W \subset \bigcup\limits_{t \in T} X_t$, b) $\overline{\overline{W \cap X_t}} \leqslant 1$

dla każdego $t \in T$, spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

8.76. Wskazówka. Udowodnić, że rodzina wszystkich ideałów właściwych w dowolnym pierścieniu z jednością, częściowo uporządkowana przez relację $\subset$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

8.77. Wskazówka. Udowodnić, że rodzina wszystkich zbiorów wektorów liniowo niezależnych w ustalonej przestrzeni liniowej spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

8.78. Wskazówka. Udowodnić, że rodzina wszystkich antyłańcuchów w ustalonym zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R\rangle$, częściowo uporządkowana przez relację $\subset$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

8.79. Zbiorowi $T \subset X$ przyporządkowujemy jego funkcję charakterystyczną χ_T, czyli funkcję określoną wzorem

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in T, \\ 1 & \text{dla } x \notin T. \end{cases}$$

8.80. a) Dowód jak w zadaniu 8.33.

b) Nie; w szczególności jeśli $\overline{\overline{T}} \geqslant 2$, zaś dla każdego $t \in T$ mamy $\overline{\overline{X}}_t \geqslant 2$, to zbiór $\langle \prod_{t\in T} X_t, R\rangle$ nie jest uporządkowany liniowo.

DO ROZDZIAŁU X

10.1. Należy udowodnić, że jeżeli

$$\langle A, R\rangle \approx \langle A_1, R_1\rangle,\ \langle B, S\rangle \approx \langle B_1, S_1\rangle \text{ i } A \cap B = A_1 \cap B_1 = O,$$

to

$$\langle A \cup B, R \cup S \cup (A \times B)\rangle \approx \langle A_1 \cup B_1, R_1 \cup S_1 \cup (A_1 \times B_1)\rangle.$$

Niech f ustala podobieństwo $\langle A, R\rangle$ i $\langle A_1, R_1,\rangle$, g — ustala podobieństwo $\langle B, S\rangle$ i $\langle B_1, S_1\rangle$. Ponieważ $A \cap B = O$, zatem suma $f \cup g$ jest funkcją.

Różnowartościowość $f \cup g$ zapewniona jest przez fakt, że $Wf \cap Wg = O$, a każda z funkcji jest różnowartościowa.

Podobnie sprawdzamy, że

$$x[R \cup S \cup (A \times B)]y \Leftrightarrow f(x)[R_1 \cup S_1 \cup (A_1 \times B_1)]f(y).$$

10.2. $\alpha = \omega$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$.

10.3. Wskazówka. W dowolnym zbiorze typu $\alpha+\beta$ jest dokładnie jeden odcinek typu α.

10.5. a) $\langle\{1-1/n : n \in \mathcal{N}-\{0\}\} \cup \{1\}, \leqslant\rangle$,

b) $\langle \{1-1/n : n\in\mathcal{N}-\{0\}\} \cup \{2-1/n : n\in\mathcal{N}-\{0\}\}, \leqslant\rangle$,

c) $\langle \{1-1/n : n\in\mathcal{N}-\{0\}\} \cup \{2-1/n : n\in\mathcal{N}-\{0\}\} \cup \{2\}, \leqslant\rangle$.

10.6. Wskazówka. $n+\omega$ jest typem podzbioru zbioru Z złożonego z liczb całkowitych większych równych od $-n$.

10.7. Wskazówka. W porządku typu ω każdy element ma skończoną ilość poprzedników, w porządku typu $\omega+\omega$ nie jest to prawdą.

10.8. $\alpha = 1$, $\beta = \omega$. Uwaga. Co najmniej jedna z liczb α i β musi być nieskończona.

10.9. Wskazówka. Jeśli f ustala podobieństwo zbiorów $\langle A, R\rangle$ i $\langle A_1, R_1\rangle$, zaś g — podobieństwo zbiorów $\langle B, S\rangle$ i $\langle B_1, S_1\rangle$, to h określone wzorem $h(\langle x, y\rangle) = \langle f(x), g(y)\rangle$ jest żądanym odwzorowaniem.

10.10. Wskazówka. Niech $\overline{\langle A, R\rangle} = \alpha$, zaś $\overline{\langle B, S\rangle} = \beta$. Niech x_0 będzie pierwszym elementem zbioru B (w porządku S). Wtedy zbiór $A\times\{x_0\}$ jest odcinkiem początkowym zbioru $\langle A\times B, T\rangle$ typu α.

10.11. $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\alpha = \omega$.

10.12. a) W zbiorze $N_1[x]$ wprowadzamy relację T wzorem

$$(ax+b)T(a_1x+b_1) \Leftrightarrow (b < b_1) \vee (b = b_1 \wedge a \leqslant a_1).$$

b) Rozważmy zbiór z przykładu a i dodajmy na końcu zbiór podobny do zbioru $\mathcal{N}$, na przykład zbiór $\langle\{1-1/n : n\in\mathcal{N}\}, \leqslant\rangle$.

c) Przykład z punktu b modyfikujemy dodając na końcu jeszcze zbiór trzyelementowy.

d) Wskazówka. Zbiór $N_3[x]$ uporządkowany za pomocą relacji T:

$$(ax^2+bx+c)\,T\,(a_1x^2+b_1x+c_1) \Leftrightarrow (c < c_1) \vee$$
$$\vee (c = c_1 \wedge b < b_1) \vee (c = c_1 \wedge b = b_1 \wedge a \leqslant a_1)$$

ma typ $\omega\cdot\omega\cdot\omega$.

10.14. $2\cdot\omega$ jest to typ takiego porządku, w którym jest ω par, jest to więc typ ω.

10.15. $2\cdot\omega = \omega$, $\omega\cdot 2 = \omega+\omega$.

10.16. $\alpha = \omega\cdot\omega$, $\beta = \omega$.

10.18. $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \omega$.

10.19. Wystarczy udowodnić, że jeśli pewien zbiór typu α jest podobny do odcinka pewnego zbioru typu β, to każdy zbiór typu α jest podobny do dowolnego odcinka typu β.

Niech $\langle A, R\rangle$ będzie miał typ α i będzie podobny do odcinka zbioru

$\langle B, S\rangle$ (typu β). Niech wreszcie $\langle A_1, R_1\rangle = \alpha$, $\langle B_1, S_1\rangle = \beta$. Zgodnie z definicją istnieją odwzorowania f i g ustalające podobieństwo $\langle A, R\rangle$ i $\langle A_1, R_1\rangle$ oraz $\langle B, S\rangle$ i $\langle B_1, S_1\rangle$. Niech na koniec t będzie elementem zbioru B takim, że $\langle A, R\rangle \approx \langle O_S(t), S \upharpoonright O_S(t)\rangle$. Niech h ustala to podobieństwo. Łatwo sprawdzić, że $f^{-1} \circ h \circ g$ ustala podobieństwo pomiędzy $\langle A_1, R_1\rangle$ i $\langle O_{S_1}(g(t)), S_1 \upharpoonright O_{S_1}(g(t))\rangle$.

10.20. Wskazówka. Odwzorować podzbiór, który jest podobny, na odcinek początkowy.

10.21. Kolejność kroków dowodu jest następująca: Udowadniamy, że $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$, a następnie, że część wspólna liczb porządkowych jest liczbą porządkową, i w końcu, że jeśli $\beta - \alpha \neq O$, to α jest elementem minimalnym (por. punkt 3 definicji) w $\alpha - \beta$.

10.22. Wskazówka. Relacja inkluzji jest przechodnia.

10.24. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadania 10.3.

10.25. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadania 10.20.

10.26. $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = \omega$.

10.27. Wskazówka. Skorzystać z zadania 10.24.

10.29. Wskazówka. b) Aby udowodnić implikację $\Leftarrow$ skorzystać z zadania 10.21 i z faktu, że warunek 3) definicji liczby porządkowej implikuje $\bigwedge_{\alpha} \sim \alpha \in \alpha$.

10.30. Wskazówka. Skorzystać z zadań 10.3 i 10.20.

10.31. Wskazówka. Dowód przez indukcję ze względu na liczbę α.

10.32. Załóżmy, że $\beta \cdot \gamma + \varrho = \beta \cdot \gamma_1 + \varrho_1$, przypuśćmy, że $\gamma \neq \gamma_1$. Możemy założyć, że $\gamma < \gamma_1$, zatem $\gamma + 1 \leqslant \gamma_1$. Jednakże $\varrho < \beta$, zatem $\beta \cdot \gamma + \varrho < \beta \cdot \gamma + \beta = \beta(\gamma+1) \leqslant \beta \cdot \gamma_1 \leqslant \beta \cdot \gamma_1 + \varrho_1$. Stąd

$$\beta \cdot \gamma + \varrho \neq \beta \cdot \gamma_1 + \varrho_1.$$

Ponieważ jednak oba wyrażenia są równe, stąd założenie $\gamma \neq \gamma_1$ doprowadziło nas do sprzeczności. A więc $\gamma = \gamma_1$. Przypuśćmy teraz, że $\gamma = \gamma_1$, ale $\varrho \neq \varrho_1$. Możemy założyć, że $\varrho < \varrho_1$. To jednak przeczy zadaniu 10.27.

10.33. Wskazówka. Dowód przez indukcję ze względu na liczbę γ.

10.34. Wskazówka. Dowód przez indukcję ze względu na max (α, β).

10.35. Dowód przez indukcję ze względu na liczbę α.

10.36. Znak $<$ w poprzedniku jest relacją wśród liczb porządkowych, natomiast znak $<$ w następniku jest relacją wśród liczb kardynalnych.

10.37. Gdyby $\beta + 1 = \alpha$, to α miałaby poprzednik.

10.38. Wskazówka. $\beta < \alpha \Rightarrow \overline{\beta} < \alpha$. Równocześnie $\overline{\beta} \cdot \overline{\beta} = \overline{\beta}$.

10.40. Na zbiorze $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ wprowadzamy relację

$$\langle \mu, \nu \rangle R \langle \mu_1, \nu_1 \rangle \Leftrightarrow [\max(\mu, \nu) < \max(\mu_1, \nu_1)] \vee$$
$$\vee [(\max(\mu, \nu) = \max(\mu_1, \nu_1)) \wedge (\mu = \max(\mu, \nu)) \wedge (\nu_1 = \max(\mu_1, \nu_1))] \vee$$
$$\vee [\max(\mu, \nu) = \max(\mu_1, \nu_1) = \mu = \mu_1 \wedge \nu < \nu_1] \vee$$
$$\vee [\max(\mu, \nu) = \max(\mu_1, \nu_1) = \nu = \nu_1 \wedge \mu \leqslant \mu_1].$$

Łatwo sprawdzić, że porządek ten jest dobrym porządkiem. Jest to porządek po brzegu kwadratu. Można sprawdzić, że odcinek wyznaczony przez parę $\langle \alpha, \beta \rangle$ ma moc $\overline{\max(\alpha, \beta)^2}$.

10.41. Wskazówka. Skorzystać z zadania 10.40.

10.42. Wskazówka. Skorzystać z zadania 10.41 i twierdzenia Cantora-Bernsteina.

10.44. a) Wskazówka. Zastosować indukcję ze względu na liczbę γ. b) Jak wyżej.

10.45. Wskazówka. Zastosować indukcję ze względu na liczbę ξ.

10.46. Wskazówka. Zauważyć, że suma mnogościowa liczb porządkowych jest liczbą porządkową.

10.47. Wskazówka. Skorzystać z własności sumy rodziny zbiorów.

10.48. Niech ξ_0 będzie dowolną liczbą. Definiujemy przez indukcję $\xi_{n+1} = \varphi(\xi_n)$. Niech $\xi = \lim\limits_{n \in \mathcal{N}} \xi_n$. Mamy

$$\varphi(\xi) = \varphi(\lim_{n \in \mathcal{N}} \xi_n) = \lim_{n \in \mathcal{N}} \varphi(\xi_n) = \lim_{n \in \mathcal{N}} \xi_{n+1} = \xi.$$

10.49. a) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$. b) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$.

c) Jeśli β jest liczbą nieskończoną, to rozważane liczby nie muszą być równe. W szczególności $\overline{\alpha}^{\overline{\beta}}$ jest mocą zbioru tych funkcji z β w α, które przyjmują wartości różne od zera tylko na skończonej ilości współrzędnych. Natomiast jeśli β jest liczbą skończoną, to wyrażenia po obu stronach są równe.

10.50. Niech X będzie dowolnym zbiorem liczb porządkowych. $\bigcup X$ jest także liczbą porządkową. Jej następnik oczywiście nie należy do X.

10.51. Ponieważ alefy są liczbami kardynalnymi, a są one numerowane liczbami porządkowymi, więc w szczególności alefy nie mogą tworzyć zbioru; a zatem i wszystkie liczby kardynalne nie mogą tworzyć zbioru.

10.52. Jeśli każdy zbiór daje się dobrze uporządkować, to w szczególności jest on równoliczny z liczbą porządkową, a więc i liczbą porządkową początkową i jego moc jest alefem. Jeśli moc zbioru X jest alefem, to jest on równoliczny z liczbą ω_α, więc daje się dobrze uporządkować.

10.53. Twierdzenie Zermelo implikuje pewnik wyboru w następujący sposób: Niech X będzie rodziną zbiorów niepustych rozłącznych, rozważmy $\bigcup X$. Zbiór ten dobrze porządkujemy. Ponieważ każdy zbiór $U \in X$ jest zawarty w $\bigcup X$, więc ma on pierwszy element. Zbiór złożony z pierwszych elementów zbiorów rodziny X jest żądanym zbiorem. Wnioskowanie w drugą stronę przebiega jak następuje.

Konstruujemy funkcję wyboru dla rodziny $\mathscr{P}(X)-\{O\}$. Za pomocą takiej funkcji f konstruujemy dobry porządek zbioru X:

$$x_0 = f(X), \qquad x_\alpha = f(X-\{x_\beta : \beta < \alpha\}).$$

10.54. W s k a z ó w k a. Wystarczy udowodnić, że $\alpha \in Z(\mathfrak{m}) \wedge \beta < \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta \in Z(\mathfrak{m})$.

10.55. Ponieważ $Z(\mathfrak{m})$ jest liczbą porządkową początkową, więc gdyby $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, to $Z(\mathfrak{m})$ należałoby do $Z(\mathfrak{m})$, co nie jest możliwe.

10.56. W s k a z ó w k a. Skorzystać z wyniku zadania 10.55.

10.57. W s k a z ó w k a. Każdemu elementowi α zbioru $Z(\mathfrak{m})$, gdzie $\mathfrak{m} = \overline{\overline{M}}$ przyporządkowujemy zbiór T_α podzbiorów zbioru M, które dają się uporządkować w typ α. Każdemu elementowi T_α przyporządkowujemy rodzinę wszystkich odcinków w porządku tego zbioru w typ α.

10.58. W s k a z ó w k a. Każdemu $\alpha \in Z(\mathfrak{m})$ przyporządkowujemy zbiór relacji o polu zawartym w M i dobrze porządkujących swoje pole w typ α.

10.59. Niech $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. Przy założeniu aksjomatu wyboru mamy $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}$. Stąd $2^{\mathfrak{m}}$ jest mocą zbioru wszystkich relacji na zbiorze M. Stąd zbiór W wszystkich relacji będących dobrymi porządkami w zbiorze M ma moc $\leqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Na zbiorze W definiujemy relację $\sim$ jak następuje:

$$R \sim S \Leftrightarrow \overline{R} = \overline{S}.$$

Oczywiście $\sim$ jest relacją równoważności i $\overline{\overline{W/_\sim}} = \aleph(\mathfrak{m})$. Zatem $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \overline{\overline{W}}$ (tu też korzystamy z aksjomatu wyboru), a zatem $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$.

10.60. W s k a z ó w k a. Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{B}} = \aleph(\mathfrak{m})$. Rozłożyć zbiór $A \times B$ na zbiory rozłączne mocy odpowiednio $\mathfrak{m}$ i $\aleph(\mathfrak{m})$.

10.61. $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}\aleph_0}$.

10.62. Rozważmy dowolną liczbę kardynalną $\mathfrak{m}$. Udowodnimy, że jest ona alefem (co ze względu na wynik zadań 10.52 i 10.53 jest wystarczające). Niech $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Mamy

$$\mathfrak{p}+1 = \mathfrak{m}^{\aleph_0}+1 \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0+1} = \mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{p},$$

a stąd $\mathfrak{p}+1 = \mathfrak{p}$. Jeśli udowodnimy, że $\mathfrak{p}$ jest alefem, to i $\mathfrak{m}$ jest alefem. Rozważmy liczbę $\aleph(\mathfrak{p})$ i badamy $[\mathfrak{p}+\aleph(\mathfrak{p})]^2$. Liczba ta jest równa

$$\mathfrak{p}^2+2\mathfrak{p} \cdot \aleph(\mathfrak{p})+\aleph^2(\mathfrak{p}),$$

czyli

$$(\mathfrak{p})+\mathfrak{p} \cdot \aleph(\mathfrak{p})+\aleph(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cdot \aleph(\mathfrak{p})+\aleph(\mathfrak{p}) = \aleph(\mathfrak{p})\,[\mathfrak{p}+1] = \aleph(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p}.$$

A więc

$$\mathfrak{p}+\aleph(\mathfrak{p}) = \aleph(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p},$$

skąd wynika, że $\mathfrak{p}$ jest alefem.

10.63. Niech $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} = \mathfrak{m}$, $X \cap Y = O$. Rozkładamy zbiór $\mathscr{P}(X \cup Y)$ na sumę dwu zbiorów rozłącznych Z_1 i Z_2, $\overline{\overline{Z}}_1 = \mathfrak{n}$, $\overline{\overline{Z}}_2 = \mathfrak{m}$. Zachodzi wtedy

$$\mathscr{P}(X \cup Y) \sim \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y).$$

Oczywiście Z_1 nie może zawierać $\langle t, u\rangle$ dla każdego $t \in X$ (bo wtedy istniałoby odwzorowanie zbioru X na $\mathscr{P}(X)$), a więc dla pewnego $t \in \mathscr{P}(X)$, zbiory w o własności: $w \cap X = t$ należą wszystkie do Z_2. A stąd $\overline{\overline{Z}}_2 \geqslant \mathscr{P}(X)$.

10.64. Wskazówka. Korzystamy z zadania 10.63.

10.65. $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha^2} = 2^{\aleph_\alpha}$.

10.66. $2^{\aleph_\omega} = 2^{\sum\limits_n \aleph_n} = \prod\limits_n 2^{\aleph_n} = \prod\limits_n 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$.

DO ROZDZIAŁU XI

11.1. Wskazówka. Skorzystać z zadania 7.21.

11.6. Wskazówka. Skorzystać z tautologii: $\alpha \Rightarrow [\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)]$.

11.7. Wskazówka. Skorzystać z tautologii:

$$[(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\gamma \Rightarrow \beta)] \Rightarrow (\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta).$$

11.8. Niech $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\}$ będzie dowodem formuły $\Phi \Rightarrow \Psi$ w oparciu o zbiór X. Wówczas ciąg $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n, \Phi, \Psi\}$ jest jak łatwo sprawdzić dowodem formuły Ψ w oparciu o zbiór $X \cup \{\Phi\}$.

Niech teraz $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\}$ będzie dowodem formuły Ψ w oparciu o zbiór $X \cup \{\Phi\}$. Przez indukcję względem i można łatwo dowieść, że $\Phi \Rightarrow \Rightarrow \Phi_i \in \mathrm{Cn}(X)$, co wobec $\Phi_n = \Psi$ kończy dowód.

Uwaga. Twierdzenie to nazywane jest *twierdzeniem o dedukcji.*

11.14. Wskazówka. Skorzystać z faktu, że każdy dowód wykorzystuje tylko skończoną ilość zdań ze zbioru X.

11.17. Wskazówka. Skorzystać z zadania 11.4. Zbiór $\mathscr{F}_{\mathrm{J}}$ jest teorią, bo $\mathrm{Cn}(X) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$ dla każdego $X \subset \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$.

11.18. a) Nie. b) Nie. c) Tak.

11.19. Nie. Weźmy bowiem $X = \mathbf{L} \cap \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$, a jako Y zbiór X rozszerzony o zdanie Φ, będące negacją tezy logiki (np. o zdanie $\bigwedge_x x \neq x$). Mamy więc $X \subset Y$, a Y nie jest teorią, gdyż $Y \neq \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$, chociaż $\mathrm{Cn}(Y) = \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$. Jeśli X jest teorią, a $Y \subset X$, to Y nie musi być teorią, co wynika w szczególności z faktu, że zbiór pusty nie jest teorią (patrz zad. 11.18 b).

11.20. Wskazówka. Skorzystać z tautologii:

$$\bigwedge_x [\Phi(x) \Rightarrow \bigwedge_x \Phi(x)] \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_x \Psi(x) \Rightarrow \Psi(x).$$

11.23. Wskazówka. Dla dowodu implikacji od strony prawej do lewej należy przyjąć, że istnieją zdania Φ i Ψ takie, że $\Phi \in X - Y$; $\Psi \in Y - X$ i rozważyć zdanie $\Phi \wedge \Psi$.

11.29. System S jest zbiorem tez logiki dla formuł danego języka.

11.35. Wskazówka. Skorzystać z zadania 11.14.

11.37. Wskazówka. Niech $\Psi \in S' \cap \mathscr{F}_{\mathrm{J}}$ i niech $\{\Psi_0, \ldots, \Psi_m\}$ będzie dowodem Ψ w oparciu o S'. Każdej formule $\Psi_i(\ldots, f(x_1, \ldots, x_n), \ldots)$ można przyporządkować formułę $\Psi_i' = \bigvee_y \Psi_i(\ldots, y, \ldots) \wedge \Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$, gdzie y — zmienna nie występująca w Ψ_i, Φ natomiast jest formułą definiującą w S' funkcję f. Dowieść, że $\Psi_m' = \Psi_m$, oraz że dla każdego $i \leqslant m$ mamy $\Psi_i' \in \mathrm{Cn}(S \cup \{\Psi_0, \ldots, \Psi_{i-1}\})$, a następnie skorzystać z zadania 11.2.

Uwaga. Twierdzenie, o którym mowa w zadaniu jest nazywane twierdzeniem o *eliminacji definicji symboli funkcyjnych.*

11.38. Wskazówka. Zastosować metodę podobną do tej, która była użyta w zadaniu 11.37, z tą różnicą, że formułę Ψ_i' otrzymuje się z Ψ_i

przez zastąpienie wszędzie symbolu predykatywnego R przez wyrażenie Φ, które symbol ten definiuje.

Uwaga. Twierdzenie, o którym mowa w zadaniu nazywa się *twierdzeniem o eliminacji definicji symboli predykatywnych.*

11.39. Wskazówka. Skorzystać z zadań 11.38 i 11.37.

11.40. Tak.

11.43. Relacja $\leqslant$ ma elementy minimalne. Są nimi systemy zbudowane w języku zawierającym znak $=$ jako jedyny symbol pozalogiczny. Element najmniejszy nie istnieje. Podobnie nie istnieją elementy maksymalne (przy założeniu, że nie istnieje zbiór wszystkich symboli). Jeśli zbiór symboli istnieje, to można udowodnić istnienie elementów maksymalnych za pomocą lematu Kuratowskiego-Zorna.

11.44. Wskazówka. Skorzystać z zadań 11.37 i 11.38.

11.45. Formuła ta nie może być definicją symbolu funkcyjnego. Dowód tego faktu polega na zbudowaniu modeli dla systemu S, w którym formuła

$$\bigwedge_{x_3}\bigwedge_{x_1}[\bigvee_{x_2} x_1 \leqslant x_2 \wedge \bigvee_{x_2} x_3 \leqslant x_2 \Rightarrow x_1 = x_3]$$

nie jest prawdziwa.

Uwaga. Opieramy się tutaj na twierdzeniu Gödla (patrz str. 121).

11.48. Wskazówka. Dowieść przez indukcję ze względu na ilość kwantyfikatorów, że dla każdej formuły Φ istnieje formuła Φ' bez kwantyfikatorów taka, że $\Phi \Leftrightarrow \Phi' \in S$.

Dowód prowadzić dla formuły w postaci normalnej (patrz zad. 3.119).

11.49-51. Wskazówka. Patrz zadanie 11.48.

11.52-54. Wskazówka. Patrz zadanie 11.45.

11.55. Relacja Int nie jest słabo asymetryczna ani symetryczna. Żeby wykazać pierwsze wystarczy wziąć dwa systemy różniące się tylko symboliką. Przykładem systemów S_1 i S_2 takich, że S_1 Int S_2, ale $\sim S_2$ Int S_1 mogą być dowolne dwa systemy zawierające $=$ jako jedyny predykat takie, że $S_1 \subset S_2 \wedge S_1 \neq S_2$.

11.56. Relacja Int$/_\sim$ ma element najmniejszy (a więc minimalny). Jest nią rodzina systemów tworząca klasę abstrakcji relacji $\sim$ wyznaczoną przez system $S_=$ o aksjomatach:

$$\bigwedge_x x = x,$$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y x = y \Rightarrow y = x$$

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z.$$

11.57. Wskazówka. Zauważyć, że jeśli $\Phi \in \mathrm{Cn}\, X$ i $\{\Phi_0, \ldots, \Phi_n\}$ jest dowodem Φ, to $\{\varphi\Phi_0, \ldots, \varphi\Phi_n\}$ jest dowodem $\varphi\Phi_n$ w S.

11.58. Wskazówka. Skorzystać ze wskazówki do zadania 11.57 oraz z faktu, że $\varphi(\sim\Phi) = \sim\varphi\Phi$.

11.59. Wskazówka. Przyjąć $\Theta(x) = (x = x)$, $\varphi(x \leqslant y) = [(xRy) \vee \vee (x = y)]$ oraz $\Theta(x) = (x = x)$ i $\varphi(xRy) = [(x \leqslant y) \wedge (\sim x = y)]$.

11.60. Wskazówka. Rozważyć nieistotne rozszerzenie S_1', powstające przez dodanie do systemu S_1 następujących definicji:

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge \sim(x = y),$$

$$x \underset{n}{<} y \Leftrightarrow \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} x < x_1 \wedge x_1 < x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n < y.$$

$$x \underset{n}{\leqslant} y \Leftrightarrow \bigvee_{x_1} \ldots \bigvee_{x_n} [x \leqslant x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leqslant y \wedge \bigwedge_z (x \leqslant z \wedge$$

$$\wedge z \leqslant y \Rightarrow x = z \vee x_1 = z \vee \ldots \vee x_n = z \vee y = z)],$$

$$x \underset{n}{=} y \Leftrightarrow x \underset{n}{<} y \wedge x \underset{n}{\leqslant} y,$$

a następnie zastosować metodę podobną jak przy rozwiązywaniu zadania 11.48 i skorzystać z zadania 11.39.

11.63. Wskazówka. Przyjąć $\Theta(x) = x \geqslant 0$ oraz $\varphi(x \leqslant y) = (x \leqslant y)$.

11.64. Wskazówka. Przyjąć $\Theta(x) = (x = x)$ oraz $\varphi(x \leqslant y) = = (\bigvee_z x+z = y)$.

11.65. Wskazówka. Niech Pn oznacza n-tą liczbę pierwszą. Jako formułę $\Theta(x)$ przyjąć następującą własność liczby x: x nie jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej i dla dowolnego układu liczb $m_1, \ldots, m_n$, jeśli $Pm_1|m_2 \ldots Pm_{n-1}|m_n \wedge Pm_n|x$, to m_1 nie jest podzielne przez kwadrat liczby pierwszej. Zbiór $\{x \in \mathcal{N}: \Theta(x)\}$ nazywany jest *zbiorem liczb dziedzicznie wolnych od kwadratów*. Funkcję φ określamy w sposób następujący: $\varphi(x \in y) = (Px|y)$.

11.66. Wskazówka. Rozważyć zbiór A określony jako najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór o następującej własności: $O \in A$ oraz jeśli $X \in A$, to $X \cup \{X\} \in A$.

Dowód istnienia takiego zbioru oprzeć na aksjomacie nieskończoności. Następnie na elementach zbioru A określić relację $\sim$ jak następuje: $X \sim Y \Leftrightarrow \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ i oznaczając zbiór klas abstrakcji tej relacji przez N przyjąć $\Theta(x) = x \in N$.

Na elementach zbioru N określić operacje $*, \circ, \times$ w następujący sposób:

Jeśli $X = [X_1]$, to $X^* = [X_1 \cup \{X_1\}]$.

Jeśli $X = [X_1]$ i $Y = [Y_1]$, to $X \circ Y = [X_1' \cup Y_1']$, gdzie X_1' i Y_1' takie, że $X_1' \in [X_1]$, $Y_1' \in [Y_1]$ i $X_1' \cap Y_1' = O$.

Jeśli $X = [X_1]$ i $Y = [Y_1]$, to $X \times Y = [Z]$, gdzie $Z \in A$ i $\overline{\overline{Z}} = \overline{\overline{X_1 \times Y_1}}$.

Ostatecznie funkcję φ zdefiniować jak następuje:

$$\varphi(0) = [O],$$

$$\varphi(Sx) = X^*,$$

$$\varphi(x+y) = x \circ y,$$

$$\varphi(x \circ y) = x \times y.$$

DO ROZDZIAŁU XII

12.1. Ponieważ wszystkie inne spójniki są zdefiniowane za pomocą spójników $\sim, \vee$ i kwantyfikatora $\bigvee_{x_i}$.

12.2. $\mathfrak{a} \models (\Phi \vee \Psi)[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{a} \models \Phi[X]$ lub $\mathfrak{a} \models \Psi[X]$.

12.3. Spełnianie jest relacją pomiędzy formułami systemu formalnego (a więc ciągami symboli — znaków) a ciągami elementów wybranego systemu relacyjnego. I tak np. $\Leftrightarrow$ jest znakiem języka systemu formalnego, zaś $\equiv$ skrótem zwrotu wtedy i tylko wtedy — języka, w którym relację spełniania opisujemy (metajęzyka).

W dalszym ciągu nie będziemy bardzo skrupulatnie przestrzegali tego rozróżnienia. Z kontekstu zawsze bowiem wynika, w jakim sensie dany symbol jest użyty.

12.4. $\mathfrak{a} \models (\Phi \Rightarrow \Psi)[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{a} \models \sim\Phi[X]$ lub $\mathfrak{a} \models \Psi[X]$ (skorzystaliśmy z tautologii $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$). Natomiast

$\mathfrak{a} \models \bigwedge_{x_i} \Phi[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$ $\mathfrak{a} \models \Phi\left[X\binom{i}{a}\right]$ (skorzystaliśmy z tautologii $\bigwedge_{x_i} \Phi \Leftrightarrow \sim \bigvee_{x_i} \sim \Phi$).

12.5. a) Nie. b) Nie.

12.6. a) Nie. b) Tak.

12.7. a) Nie, nie, tak. b) Nie, nie, nie. c) Nie, tak, tak.

12.8. Przeprowadzić dowód przez indukcję ze względu na stopień komplikacji formuły.

12.10. Implikacja od lewej do prawej strony jest oczywista; mianowicie $A \neq \Phi$ i wobec tego jeśli $a \in A$, to ciąg stały $\underline{a}$ określony wzorem

$$\bigwedge_n \underline{a}_n = a$$

spełnia Φ.

W drugą stronę; jeśli istnieje ciąg $\underline{X}$ taki, że $\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}]$, to każdy ciąg $\underline{Y}$ spełnia Φ w $\mathfrak{a}$ (na podstawie zadania 12.9).

12.11. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadania 12.10.

12.12. Wskazówka. Dowód przez indukcję ze względu na ilość zmiennych wolnych w Φ.

12.13. Załóżmy $\mathfrak{a} \models \bigwedge_{v_0} \bigvee_{v_1} \Phi(v_0, v_1)$. Niech dla każdego $a \in A$ $U_a = \{b : \mathfrak{a} \models \Phi[a, b, \ldots]\}$ (definicja ta jest poprawna — patrz zadanie 12.8).

Niech f będzie funkcją wyboru dla rodziny $\{U_a : a \in A\}$, to znaczy $f(a) \in U_a$, wtedy f jest żądaną funkcją.

W drugą stronę wnioskowanie jest oczywiste.

12.14. Przypuśćmy, że nie jest prawdą, że $\mathfrak{a} \models \Phi[X]$. Wtedy zgodnie z definicją $\mathfrak{a} \models \sim\Phi[X]$.

12.15. Zupełność wynika z zadania 12.14. Niesprzeczność wynika z faktu, że zgodnie z definicją, jeśli $\sim\Phi \in \mathfrak{a}^*$, to $\Phi \notin \mathfrak{a}^*$.

12.16. A jest zbiorem dwuelementowym; $A = \{0, 1\}$, działanie zadane jest tabelką:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$B = \mathcal{N} - \{0\}$, $0' = 0$, zaś działanie $+'$ jest zwykłym działaniem dodawania.

12.17. Wskazówka. Przeprowadzić dowód przez indukcję ze względu na długość dowodu formuły Φ. Sprawdzić uprzednio, że jeżeli $\mathfrak{a} \models \Phi$ i $\mathfrak{a} \models \Phi \Rightarrow \Psi$, to $\mathfrak{a} \models \Psi$, i że jeżeli $\mathfrak{a} \models \Phi(x)$, to $\mathfrak{a} \models \bigwedge_y \Phi(y)$ (porównaj zadanie 12.12).

12.18. Przypuśćmy na przykład, że zdanie $\bigwedge_x (x+x = 0)$ może być wyprowadzone z podanego zbioru zdań. Wtedy zgodnie z wynikiem zadania 12.17 w każdym systemie, co najmniej dwuelementowym, w którym działanie oznaczone znakiem $+$ jest przemienne i łączne, zdanie $\bigwedge_x (x+x=0)$ jest prawdziwe. Ale w zbiorze $\mathscr{Z}$ zdanie to jest fałszywe. Zatem nie może ono wynikać z rozważanych zdań. Podobnie jest z negacją tego zdania.

12.19. Zgodnie z podaną definicją Φ jest niezależne od zbioru zdań S, jeśli istnieją $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ takie, że $S \cup \{\Phi\} \subset \mathfrak{a}^*$, zaś $S \cup \{\sim\Phi\} \subset \mathfrak{b}*$. Ponieważ $\mathfrak{a} \models \Phi$, zatem $\Phi \in \mathfrak{a}^*$, czyli $S \cup \{\Phi\} \subset \mathfrak{a}^*$. Podobnie $S \cup \{\sim\Phi\} \subset \mathfrak{b}^*$.

12.20. Zdanie A_3 orzeka, że w systemie $\mathfrak{a}$ są dokładnie 3 elementy. Jest ono prawdziwe w ciele $\mathscr{Z}_3$ — reszt modulo trzy. Jest ono fałszywe na przykład w ciele $\mathscr{W}$.

12.21. Zdanie A_6 orzeka, że w systemie $\mathfrak{a}$ jest dokładnie 6 elementów. Jednakże w teorii ciał udowadniamy, że 1° Jeśli ciało ma charakterystykę, większą od zera, to jest ona liczbą pierwszą. 2° Jeśli ciało P jest skończone, to ilość jego elementów jest potęgą charakterystyki. A zatem nie ma ciała sześcioelementowego, co dowodzi, że zdanie A_6 nie jest niesprzeczne z aksjomatyką ciał, a więc tym bardziej nie jest od niej niezależne.

12.22. Zdanie A_4 orzeka, że w systemie $\mathfrak{a}$ są co najwyżej cztery elementy. Ponieważ istnieje ciało czteroelementowe jak też i ciała o innej ilości elementów, zatem zdanie to jest istotnie niezależne od aksjomatyki ciał.

12.23. Na przykład grupa permutacji zbioru trzyelementowego jest grupą nieprzemienną, zaś grupa $\langle \mathscr{Z}, + \rangle$ jest grupą przemienną.

12.24. Zdanie to mówi, że rozważany porządek jest gęsty. Jest ono spełnione w systemie $\langle \mathscr{W}, \leqslant \rangle$, natomiast nie jest spełnione w systemie $\langle \mathcal{N}, \leqslant \rangle$.

12.25. Nie.

12.26. a) Zauważmy, że wystarczy rozważać formuły otwarte, ponieważ zgodnie z warunkiem zadania 12.12 jeśli Φ jest formułą otwartą, to $\mathfrak{a} \models \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{a} \models \bigwedge_{v_{i_0},\ldots,v_{i_n}} \Phi$. Pozostałe formuły otwarte powstają za pomocą spójników logicznych z formuł atomowych. Ze względu na definicję spełniania wystarczy udowodnić twierdzenie dla formuł atomowych.

b) Jeśli Φ jest formułą egzystencjalną, to $\sim\Phi$ równoważne jest formule uniwersalnej. Jeśliby więc nie było prawdą, że Φ jest spełnione w $\mathfrak{b}$, to $\sim\Phi$ byłoby spełnione w $\mathfrak{b}$ i wobec tego $\sim\Phi$ byłoby spełnione w $\mathfrak{a}$ (na mocy punktu a), co nie jest możliwe.

12.27. Zauważyć, że aksjomaty pierścienia mogą być zapisane w formie zdań uniwersalnych.

12.28. Jak wyżej.

12.29. Gdyby zdanie A_4 było równoważne zdaniu uniwersalnemu, to ze względu na wynik zadania 12.26 byłoby ono prawdziwe w każdym podsystemie ciała czteroelementowego, a więc i w ciele dwuelementowym.

12.30. Wynik otrzymuje się natychmiast na mocy aksjomatów równości.

12.31. W s k a z ó w k a. Skorzystać z zadania 11.49. Można udowodnić tezę mocniejszą, mianowicie że $\langle \mathscr{W}, \leqslant\rangle \prec \langle \mathscr{R}, \leqslant\rangle$ (por. zadanie 12.23 i dalsze), korzystając z następującego faktu. Dla każdych liczb wymiernych a i b oraz dowolnej liczby rzeczywistej c; jeśli $a < c < b$, to istnieje funkcja φ wzajemnie jednoznaczna przekształcająca $\mathscr{R}$ na siebie, zachowująca porządek i taka, że $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) \in \mathscr{W}$.

12.33. W s k a z ó w k a. Skorzystać z wyniku zadania 12.11.

12.34. $\mathfrak{b} = \langle \mathscr{N}, \leqslant\rangle$, $\mathfrak{a} = \langle \mathscr{N} - \{0\}, \leqslant\}$. Oczywiście $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Zachodzi $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, a nawet $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są izomorficzne. Ale ciąg stały $a_n = 1$ spełnia w $\mathfrak{a}$ formułę $\bigvee_{v_0} (v_0 < v_1 \vee v_0 \neq v_1)$, natomiast w $\mathfrak{b}$ nie spełnia tej formuły.

12.35. b) Ponieważ $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ pociąga za sobą $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, więc mamy $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
c) Załóżmy, że $\mathfrak{a} \models \Phi[X]$, wtedy $\mathfrak{b} \models \Phi[X]$ (zgodnie z $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$). Ponieważ jednak $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{c}$, więc $\mathfrak{c} \models \Phi[X]$.

12.36. Skoro $A \subset B$, a więc ${}^{\mathscr{N}}A \subset {}^{\mathscr{N}}B$. Załóżmy, że $\mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}]$. Zgodnie z założeniem $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{c}$ mamy $\mathfrak{c} \models \Phi[\underline{X}]$. Jednak $\underline{X} \in {}^{\mathscr{N}}B$ i $\mathfrak{c} \models \Phi(\underline{X}]$, a zatem $\mathfrak{b} \models \Phi[\underline{X}]$.

12.37. Wnioskowanie od lewej do prawej jest oczywiste. Załóżmy zatem, że dla każdej formuły Φ i dla każdego ciągu $\underline{X} \in {}^{\mathscr{N}}A$, $\mathfrak{b} \models \bigvee_{x_k} \Phi[\underline{X}]$

pociąga za sobą istnienie $a \in A$ takiego, że $\mathfrak{b} \models \Phi\left[\underline{X}\binom{k}{a}\right]$. Udowodnimy, że

$$(*) \qquad \mathfrak{b} \models \Phi[\underline{X}] \Rightarrow \mathfrak{a} \models \Phi[\underline{X}]$$

dla $\underline{X} \in {}^{\mathcal{N}}A$ (przez indukcję ze względu na stopień komplikacji formuły Φ). Możemy zakładać, że formuła Φ zbudowana jest wyłącznie za pomocą spójników $\sim$, $\wedge$ i kwantyfikatora $\bigvee_{x_j}$. Jeżeli jest formułą atomową, to wzór $(*)$ jest oczywisty (ze względu na wynik zadania 12.26). Jeśli wzór $(*)$ prawdziwy jest dla formuły Φ, to prawdziwy jest też dla $\sim\Phi$. Podobnie dla spójnika $\wedge$. Ostatni przypadek kwantyfikatora szczegółowego zapewnia nam założenie twierdzenia.

12.38. Istotną rzeczą jest tu, że zgodnie z zadaniem 12.8 fakt, czy ciąg $\underline{X}$ spełnia formułę Φ zależy tylko od skończonej ilości wyrazów ciągu $\underline{X}$.

12.41. Należy udowodnić, że jeśli $f_1 \sim g_1, \ldots, f_{n_i} \sim g_{n_i}$ i $U = \{t: R_{t_i}(f_1(t), \ldots, f_{n_i}(t))\} \in F$, to $S = \{t: R_{t_i}(g_1(t), \ldots, g_{n_i}(t))\} \in F$.

Niech $U_k = \{t: f_k(t) = g_k(t)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ oraz niech $V = U_1 \cap \ldots \cap U_{n_i} \cap U$. Ponieważ zbiory $U_1, \ldots, U_{n_i}, U$ należały do ultrafiltru F, a więc i V jako ich część wspólna też należy do F. Udowodnimy, że $V \subset S$, a stąd i S będzie należało do F. Niech $t \in V$, wtedy $f_1(t) = g_1(t), \ldots, f_{n_i}(t) = g_{n_i}(t)$ oraz $R_{t_i}[f_1(t), \ldots, f_{n_i}(t)]$. Ale wtedy $R_{t_i}[g_1(t), \ldots, g_{n_i}(t)]$, a więc $t \in S$. Podobnie udowadniamy, że jeśli $S \in F$, to i $U \in F$. Rozumowanie dla funkcji jest analogiczne.

12.42. Zauważmy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by $f \sim_F g$ jest, by $f(i_0) = g(i_0)$. A zatem każda klasa abstrakcji wyznaczona jest przez element zbioru A_{i_0}. Następnie $S_i([f_1], \ldots, [f_{n_i}])$ równoważne jest $R_{i,i_0}[f_1(i_0), \ldots, f_{n_i}(i_0)]$.

12.43. Dla formuł atomowych twierdzenie jest oczywiste. Rozważmy dla danego ciągu $\underline{X}$ i formuły Φ zbiór $U_{\Phi,\underline{X}} = \{t: \mathfrak{a}_t \models \Phi[x_0(t), x_i(t), \ldots]\}$. Zauważmy, że $U_{\Psi\wedge\Phi,\underline{X}} = U_{\Phi,\underline{X}} \cap U_{\Psi,\underline{X}}$, a zatem, jeśli oba zbiory stojące po prawej stronie należą do F, to także zbiór znajdujący się po lewej stronie należy do F. Załóżmy teraz, że nieprawda, że $\prod_{i\in I} \mathfrak{a}_i/F \models [\underline{X}]$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym nie jest prawdą, że $U_{\Phi,\underline{X}} \in F$. Uzupełnienie zatem $I - U_{\Phi,\underline{X}}$ należy do F. Jednakże jest to $\{t: \mathfrak{a}_t \models \sim\Phi[x_0(t), x(t), \ldots]\}$, a zatem $U_{\sim\Phi,\underline{X}} \in F$.

Dla kwantyfikatora egzystencjalnego rozumowanie polega na skonstruowaniu funkcji, której rzut na odpowiednie współrzędne jest przykładem dla zdania Φ.

12.44. Zauważyć, że przyporządkowanie $\varphi([f]_{\sim F}) = [f \upharpoonright X]_{\sim F \upharpoonright X}$ jest różnowartościowe i że zachowuje relacje oraz funkcje.

12.45. Niech ciąg $\{[f_i]\}_{i \in \mathcal{N}}$ spełnia formułę Φ w $\mathfrak{a}^I_{/F}$, zaś funkcje f_i będą stałe $f_i(t) = a_i$. A zatem $\{t : \mathfrak{a} \models \Phi[a_0, a_1, \ldots]\} \in F$. Zbiór ten jako należący do ultrafiltru jest niepusty i w szczególności $\mathfrak{a} \models \Phi[a_0, a_1, \ldots]$, czyli $\varphi * \mathfrak{a} \models \Phi[[f_0], [f_1], \ldots]$.

12.46. Zauważmy, że jeśli φ jest izomorfizmem „w", to $\mathfrak{a}$ jest izomorficzne z $\varphi * \mathfrak{a}$, a więc tym bardziej $\mathfrak{a} \equiv \varphi * \mathfrak{a}$. Zgodnie z zadaniem 12.33 mamy $\varphi * \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ i na mocy zadania 12.30 c mamy $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

12.47. Niech $\overline{\overline{A}} = n$. Rozważmy zdanie A_n: $\bigvee\limits_{v_0 \ldots v_{n-1}} \bigwedge\limits_{v_n} [v_n = v_0 v \ldots v v_n \equiv \equiv v_{n-1}]$. Zdanie to orzeka, że $\overline{\overline{A}} = n$, tj. $\mathfrak{a} \models A_n \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} = n$. Zdanie to jest także prawdziwe w $\mathfrak{a}^I_{/F}$ (na mocy zadań 12.46 i 12.45). A więc $\overline{\overline{A^I_{/F}}} = n$. Stąd też izomorfizm φ badany w zadaniu 12.45 jest „na", bo zbiór n-elementowy nie ma podzbioru właściwego n-elementowego.

12.48. Jak stwierdziliśmy w zadaniu 12.47 zdanie A_n charakteryzuje własność: $\overline{\overline{A}} = n$. Jeśli więc $\{i : \overline{\overline{A_i}} = n\} \in F$, to $\{i : \mathfrak{a}_i \models A_n\} \in F$, a zatem zgodnie z twierdzeniem Łosia mamy $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F \models A_n$, czyli $\overline{\overline{\prod\limits_{i \in I} A_i/F}} = n$, a więc tym bardziej jest zbiorem skończonym.

12.49. Niech $\mathfrak{a}_i = \langle A_i, A_i^2 \rangle$, gdzie $\overline{\overline{A_i}} = i+1$, zaś $i \in \mathcal{N}$. Niech F będzie dowolnym ultrafiltrem niegłównym na zbiorze $\mathcal{N}$. Niech zdanie B_i orzeka, że $\overline{\overline{A}} \geqslant i$, na przykład

$$B_i\colon \bigvee_{v_0 \ldots v_{i-1}} [v_0 \neq v_1 \wedge v_0 \neq v_2 \wedge v_0 \neq v_{i-1} \wedge v_1 \neq v_2 \wedge \ldots \wedge v_1 \neq$$
$$\neq v_{i-1} \wedge \ldots \wedge v_{i-2} \neq v_{i-1}].$$

Łatwo widzieć, że $\{l : \mathfrak{a}_l \models B_n\} \in F$ (istotnie, uzupełnienie tego zbioru jest zbiorem skończonym). A więc $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F \models b_l$ dla każdego $l \in \mathcal{N}$. Stąd $\prod\limits_{i \in I} A_i/F \geqslant \aleph_0$, co kończy dowód.

12.50. Niech T będzie podrodziną zbioru $\mathscr{P}(I)$ skonstruowaną z rodziny S w następujący sposób: najpierw rozważamy rodzinę W złożoną z wszystkich zbiorów postaci $a_1 \cap \ldots \cap a_n$, gdzie $a_i \in S$, $n \in \mathcal{N}$, a następnie definiujemy: $X \in T \Leftrightarrow \bigvee\limits_{Y \in W} (Y \subset X)$. Łatwo sprawdzić, że rodzina

T jest filtrem. Jeśli $X_1 \in T$ i $X_2 \in T$, to $a_1 \cap \ldots \cap a_n \subset X_1, b_1 \cap \ldots \cap b_k \subset X_2$. Wtedy $a_1 \cap \ldots \cap a_n \cap b_1 \cap \ldots \cap b_k \subset X_1 \cap X_2$, czyli $X_1 \cap X_2 \in T$. Jeśli $X_1 \in T$ i $X_2 \subset X_2$, to $X_2 \in T$.

Rozważmy teraz rodzinę wszystkich filtrów F takich, że $T \subset F$. Spełnia ona założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Element maksymalny w tej rodzinie jest ultrafiltrem zawierającym T, a ponieważ $S \subset T$, więc zawiera także i S.

12.51. Niech bowiem $A_F = \bigcap F$ będzie zbiorem co najmniej dwuelementowym. Załóżmy, że $a_1, a_2 \in A_F$, $a_1 \neq a_2$, bo $\{a_1\} \in F$, albo $I - \{a_1\} \in F$. Jeśli $\{a_1\} \in F$, to $A_F \subset \{a_1\}$, czyli $A_F = \{a_1\}$ i $a_2 \notin A_F$. Jeśli $I - \{a_1\} \in F$, to $A_F \subset I - \{a_1\}$ i wobec tego $a_1 \notin a_F$.

12.52. Wystarczy udowodnić (zgodnie z zadaniem 12.50), że rodzina ta ma własność przecięć skończonych. Niech $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{N}_\infty$. Rozważmy zbiór $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$. Twierdzimy, że zbiór ten jest niepusty. Udowodnimy, że $\mathcal{N} - X$ jest zbiorem skończonym. Istotnie $\mathcal{N} - X = (\mathcal{N} - X_1) \cup \ldots \cup (\mathcal{N} - X_n)$, a suma skończonej ilości zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym.

Niech F będzie ultrafiltrem zawierającym $\mathcal{N}_\infty$. Ponieważ zbiory $U_0 = \mathcal{N} - \{0\}$, $U_1 = \mathcal{N} - \{1\}, \ldots, U_n = \mathcal{N} - \{n\}$ należą do $\mathcal{N}_\infty$, a więc należą one i do F, a zatem $\bigcap F = O$.

12.53. Możemy założyć, że $A = \mathcal{N}$. Udowodnimy, że istnieje rodzina funkcji $S \subset {}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ taka, że jeśli $f, g \in S$, $f \neq g$, to $\{n : f(n) = g(n)\} < \aleph_0$ i taka, że $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_0}$. Istotnie dla każdego ciągu $\varphi \in {}^{\mathcal{N}}2$ definiujemy $f_\varphi(n) = \sum\limits_{m<n} f(m)2^m$. Łatwo widzieć, że jeśli $\varphi \neq \psi$, to $\{n : f_\varphi(n) = f_\psi(n)\}$, jest skończony i mianowicie składa się z liczb n, mniejszych od pewnej liczby k takiej, że $\varphi(k) \neq \psi(k)$. Ponieważ $\{n : f_\varphi(n) \neq f_\psi(n)\} \in \mathcal{N}_\infty$, zatem należy też do F, a stąd $[f_\varphi] \neq [f_\psi]$, o ile tylko $\varphi \neq \psi$. A zatem $\overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}/F}} \geqslant \overline{\overline{\{[f_\varphi] : \varphi \in {}^{\mathcal{N}}2\}}} = 2^{\aleph_0}$. Równocześnie $\overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}/F}} \leqslant \overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}}} = 2^{\aleph_0}$. Na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina $\overline{\overline{{}^{\mathcal{N}}\mathcal{N}/F}} = 2^{\aleph_0}$.

12.54. Udowodnimy tylko, że dla każdego zbioru X bądź $X \in \bigcup\limits_{i \in I} F_i/G$, bądź $(\bigcup\limits_{i \in I} A_i - X) \in \bigcup\limits_{i \in I} F_i/G$. Istotnie niech $U_X = \{i : X \cap A_i \in F_i\}$. Jeśli $U_X \notin S$, to $\{i : X \cap A_i \notin F_i\} \in G$, ale $\{i : X \cap A_i \notin F_i\} = \{i : (\bigcup\limits_{i \in I} A_i - X) \cap A_i \in F_i\}$.

12.55. Wskazówka. Jeśli M jest zbiorem mocy m, to zbiór

$N = \{X : X \subset M \wedge \overline{\overline{X}} < \aleph_0\}$ też jest mocy m. Podobnie zbiór $P = \{X : X \subset N \wedge \overline{\overline{X}} < \aleph_0\}$. Skonstruować 2^{2^m} ultrafiltrów na zbiorze P. Następnie pokazać, jak z ultrafiltru na zbiorze P zbudować ultrafiltr na zbiorze M.

12.56. a) Wskazówka. Jeśli $\bigcap F_i = \{a\}, \bigcap F_2 = \{b\}$, to dowolne przekształcenie różnowartościowe zbioru I na siebie o własności $\varphi(a) = b$ jest żądanym izomorfizmem.

b) Wskazówka. Skorzystać z zadania 12.55 i z faktu że, $m^m = 2^m < 2^{2^m}$.

12.57. Przypomnijmy, że $\mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{b}_i \Leftrightarrow \mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{b}_i^*$. Załóżmy, że $\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i/F \models \Phi$. Wtedy zgodnie z twierdzeniem Łosia $\{i : \mathfrak{a}_i \models \Phi\} \in F$, czyli $\{i : \Phi \in \mathfrak{a}_i^*\} \in F$, a więc $\{i : \Phi \in \mathfrak{b}_i^*\} \in F$, czyli $\{i : \mathfrak{b}_i \models \Phi\} \in F$, a stąd $\prod_{i \in I} \mathfrak{b}_i/F \models \Phi$.

Uwaga. Wystarczy założyć, że $\{i : \mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{b}_i\} \in F$.

12.58. Niech $\mathfrak{a} \in K$. Zgodnie z definicją $K^* \subset \mathfrak{a}$, a stąd $\mathfrak{a} \in K^{**}$.

12.59. Jeśli $S^* \neq O$, to istnieje $\mathfrak{a}$ takie, że $S \subset \mathfrak{a}^*$. S jest klasą wszystkich modeli takich, że $S \subset \mathfrak{a}^*$. Oczywiście $S \subset \bigcap_{\mathfrak{a} \in S^*} \mathfrak{a}^*$, czyli $S \subset S^{**}$.

12.60. Wnioskowanie od prawej do lewej zostało przeprowadzone w zadaniu 12.15. W drugą stronę skorzystać z twierdzenia Gödla.

12.61. Przypuśćmy, że S nie ma modelu. Zgodnie zatem z twierdzeniem o niesprzeczności S jest sprzeczny. Jest więc dowód D zdania $\Phi \wedge \sim\Phi$, w którym użyte są aksjomaty i zdania ze zbioru S. Ponieważ zbiór formuł występujących w dowodzie D jest skończony, więc użyta w nim liczba zdań ze zbioru S jest skończona. Niech zdania te tworzą zbiór S_0. Zbiór ten jest sprzeczny, a więc zgodnie z zadaniem 12.15 nie ma modelu.

12.62. a) $X \in B_{U_1} \cap B_{U_2} \Leftrightarrow X \in B_{U_1} \wedge X \in B_{U_2}$, ale wtedy $U_1 \subset X \wedge U_2 \subset X$ i $U_1 \cup U_2 \subset X$.

Implikacja w drugą stronę jest oczywista.

b) Wskazówka. Udowodnić, że rozważana rodzina ma własność przecięć skończonych.

c) Niech S będzie zbiorem zdań takim, że dla każdego skończonego $S_0 \subset S$, istnieje model M_{S_0} taki, że $S_0 \subset (M_{S_0})^*$.

Rozważmy rodzinę T wszystkich skończonych podzbiorów zbioru S. W zbiorze tym skonstruujemy ultrafiltr. Jest on mianowicie dowolnym ultrafiltrem rozważanym w punkcie b. Niech F będzie takim ultrafiltrem. Tworzymy ultraprodukt $\prod_{S_0 \in T} M_{S_0}/F$. Ponieważ dla każdego $\Phi \in S$ $B_{\{\Phi\}} \in F$, zatem $\prod_{S_0 \in T} M_{S_0}/F \models \Phi$. A więc $S \subset (\prod_{S_0 \in T} M_{S_0}/F)^*$.

12.63. Wskazówka. Implikacja od prawej do lewej jest oczywista (porównaj zadanie 12.46). Aby udowodnić implikację w drugą stronę, rozszerzamy język **J** o stałe dla elementów zbioru A.

Rozszerzamy też model $\mathfrak{a}$ o funkcje zeroargumentowe odpowiadające elementom zbioru $\mathfrak{a}$. Rozważamy wreszcie zbiór I zdań rozszerzonego języka, prawdziwych w rozszerzonym modelu. Jeśli zdanie rozszerzonego języka jest prawdziwe w $\mathfrak{a}$, powiedzmy Φ zawiera stałe $C_{a_1}, \ldots, C_{a_n}$, to można znaleźć elementy modelu $\mathfrak{b}$ spełniające Φ w $\mathfrak{b}$. Teraz konstruujemy w zbiorze I ultrafiltr metodą podobną do stosowanej w zadaniu 12.62.

12.64. Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia Frayne'go (zadanie 12.63) oraz z wyniku zadania 12.47.

12.65. Aby udowodnić, że F_x jest ultrafiltrem, należy pokazać, że

a) $R_\xi \in F_x \wedge R_\zeta \subset R_\zeta \Rightarrow R_\zeta \in F_x$,

b) $R_\xi \in F_x \wedge R_\zeta \in F_x \Rightarrow R_\xi \cap R_\zeta \in F_x$,

c) $R_\xi \in F_x \vee A - R_\xi \in F_x$.

a) Jeśli spełnione są założenia, to $\mathfrak{a} \models \bigwedge_x [P_\xi(x) \Rightarrow P_\zeta(x)]$. Ponieważ $\mathfrak{a}'$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{a}$, więc

$$\mathfrak{a}' \models \bigwedge_x [P_\xi(x) \Rightarrow P_\zeta(x)], \quad \text{czyli} \quad R'_\xi \subset R'_\zeta,$$

a więc jeśli $x \in R'_\xi$, to $x \in R'_\zeta$, czyli $R_\zeta \in F_x$. (Przypomnijmy, że P_ξ jest symbolem języka używanym dla oznaczenia R_ξ).

b) Zauważyć, że $x \in R'_\xi \wedge x \in R'_\zeta \Rightarrow x \in R'_\xi \cap R'_\zeta$.

c) Zauważyć, że $\mathfrak{a} \models \bigwedge_x [P_\xi(x) \vee \sim P_\xi(x)]$, a więc $\mathfrak{a}' \models \bigwedge_x [P_\xi(x) \vee \sim P_\xi(x)]$.

12.66. Zgodnie z definicją $K \in EC$ równoważne jest, że $K = \{\Phi\}^*$ dla pewnego $\Phi \in \mathbf{J}$. Oczywiście $X - K = \{\sim\Phi\}^*$ (na mocy zadania 12.13).

12.67. Wskazówka. Skorzystać z zadania 12.61.

12.68. Wskazówka. Załóżmy, że $K = (S^*)$ dla pewnego S. Udowodnić, że $K = \bigcap_{\Phi \in S} \{\Phi\}^*$.

12.69. a) Zgodnie z wynikiem zadania 12.45, mamy $\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{a}^I_{/F})^*$. Jeśli więc $S \subset \mathfrak{a}^*$, to $S \subset (\mathfrak{a}^I_{/F})^*$.

b) Jeśli $S \subset (\mathfrak{a}_t)^*$ dla wszystkich $t \in I$, to $\{t : S \subset (\mathfrak{a}_t)^*\} = I$, a więc należy do ultrafiltru.

c) Przypomnijmy, że $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ jest równoważne $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$.

12.70. Rozważmy K^*. Pokażemy, że $K = K^{**}$. Zawieranie od lewej do prawej jest oczywiste (zadanie 12.58). W drugą stronę; jeśli $\mathfrak{a} \in K^{**}$, to $K^* \subset \mathfrak{a}^*$. Na zbiorze $\mathfrak{a}^*$ konstruujemy filtr metodą analogiczną do użytej w twierdzeniu Frayne'go. Otrzymujemy ultraprodukt $\mathfrak{b}$ pewnej rodziny elementów klasy K elementarnie równoważny modelowi $\mathfrak{a}$. Ponieważ klasa K jest zamknięta ze względu na branie ultraproduktu, więc $\mathfrak{b} \in K$, a ponieważ $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, więc $\mathfrak{a} \in K$.

12.71. Wskazówka. Jeśli K jest zamknięta ze względu na relację elementarnej równoważności $\equiv$, to $X-K$ też jest zamknięta ze względu na $\equiv$. Stąd zarówno K jak i $X-K$ są klasami elementarnymi w szerszym sensie i zgodnie z uwagą do zadania 12.68 są one elementarne w węższym sensie.

12.72. Wskazówka. Skorzystać z zadania 12.26 a.

12.73. Wnioskowanie od lewej do prawej jest oczywiste. Aby udowodnić, że klasa spełniająca warunki a, b, c jest UC_Δ rozważamy zbiór T wszystkich zdań uniwersalnych prawdziwych we wszystkich elementach klasy K i dowodzimy, że $K = T^*$. Robimy to mianowicie w ten sposób, że każdy element klasy T^* zanurzamy izomorficznie w ultraprodukt elementów z klasy K.

12.74. a) Tak, można znaleźć aksjomatykę grup tak, by była ona uniwersalna.

b) Tak.

c) Nie. Podsystem ciała wcale nie musi być ciałem, zatem klasa K wszystkich ciał nie może być UC_Δ (porównaj zadanie 12.72).

12.75. a) Nie. K nie jest bowiem zamknięta ze względu na branie ultraproduktu swoich elementów.

b) Tak. Aksjomatyka klasy K składa się ze zdań B_n, $n \in \mathcal{N}$ (porównaj zadanie 12.49).

c) Tak. Klasa ta jest nawet UC_Δ.

d) Nie. Klasa ta nie jest bowiem zamknięta ze względu na operację ultraproduktu. Udowodnimy, że $\langle \mathcal{N}, \leqslant \rangle^N/_F$, gdzie F jest dowolnym ultrafiltrem niegłównym na zbiorze $\mathcal{N}$, nie jest zbiorem dobrze uporządkowanym. Rozważmy w tym celu funkcje $f_0 = [0, 1, 2, \ldots]$, $f_1 = [0, 0, 1, 2, 3, \ldots]$, $f_2 = [0, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots]$ itd., ogólnie $f_k(l) = \max(0, l-k)$. Zauważmy, że funkcje te mają następujące własności:

a) $\bigwedge\limits_{n,k} [n \neq k \Rightarrow \sim(f_n \sim_F f_k)]$,

b) $n < k \Rightarrow \{l : f_k(l) < f_n(l)\} \in F$.

A więc skonstruowaliśmy ciąg nieskończony zstępujący $\{[f_n]\}$ elementów ultrapotęgi. Stąd też relacja porządku w ultrapotędze nie jest dobrym porządkiem.

Uwaga. Można udowodnić, że jeżeli ultrapotęga $\langle \mathcal{N}, \leqslant \rangle^I_{/F}$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to F jest ultrafiltrem σ-zupełnym, to znaczy takim, że dla dowolnego ciągu $\{A_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ elementów F, $\bigcap_{n \in \mathcal{N}} A_n \in F$. Ultrafiltry takie na zbiorach małych mocy (na przykład mniejszych od pierwszej liczby mocno nieosiągalnej) muszą być ultrafiltrami głównymi.

Zdanie mówiące, że istnieje zbiór I oraz ultrafiltr F na zbiorze I niegłówny i σ-zupełny nazywa się *aksjomatem liczby mierzalnej*. Istnienia takiej liczby nie można udowodnić w aksjomatycznej teorii mnogości (na przykład w takim układzie aksjomatów jaki jest przyjęty w [3]). Natomiast jest niesprzecznym zdanie mówiące, że liczby kardynalne mierzalne nie istnieją.

12.76. Wskazówka. Jeżeli $\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph_0$, $\overline{\overline{I}} = \mathfrak{m}$, F jest ultrafiltrem niegłównym na zbiorze I, zawierającym wszystkie uzupełnienia podzbiorów zbioru A mocy mniejszej od $\overline{\overline{A}}$, to $A^I_{/F} > \mathfrak{m}$. Mając w ten sposób elementarne rozszerzenie modelu $\mathfrak{a}$ mocy większej od $\mathfrak{m}$, zbudować (korzystając z dolnego twierdzenia Skolema-Löwenheima-Tarskiego) odpowiedni podsystem, a następnie skorzystać z zadania 12.36.

12.77. Wskazówka. Odpowiednio dobierając zbiory I_1 i I_2 oraz ultrafiltry F_1 i F_2 zbudować dwie nieizomorficzne ultrapotęgi systemu $\mathfrak{a} \in X^*$.

12.78. Załóżmy, że zbiór S nie jest zupełny. Istnieje więc zdanie Φ oraz systemy $\mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{a}_2$ takie, że

$$S \cup \{\Phi\} \subset \mathfrak{a}_1^*, \quad S \cup \{\sim\Phi\} \subset \mathfrak{a}_2^*.$$

Budujemy teraz dwa modele $\mathfrak{b}_1$ i $\mathfrak{b}_2$ mocy $\mathfrak{m}$ takie, że $\mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{a}_1$ i $\mathfrak{b}_2 \equiv \mathfrak{a}_2$ (korzystając z odpowiedniej wersji twierdzenia Skolema-Löwenheima-Tarskiego). Zgodnie z założeniem, $\mathfrak{b}_1$ jest izomorficzne z $\mathfrak{b}_2$, co prowadzi do sprzeczności.

12.79. Wskazówka. Zgodnie z twierdzeniem Cantora (por. [3] str. 202), każde dwa przeliczalne gęste porządki liniowe bez pierwszego i ostatniego elementu są izomorficzne. Zastosować kryterium Łosia-Vaughta.

12.80. Wskazówka. Skorzystać z następującego twierdzenia Steinitza: Dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ i każdej liczby $p \in \mathcal{N}$ wszystkie ciała algebraicznie domknięte mocy $\mathfrak{m}$ i charakterystyki p są izomorficzne, następnie zastosować kryterium Łosia-Vaughta.

12.81. Wskazówka. Jeżeli V jest przestrzenią wymiaru n nad K, to V izomorficzne z K^n. Następnie skorzystać z zadania 12.80.

12.82. Jeśli zbiór zdań S jest zupełny, to zgodnie z twierdzeniem Gödla dla każdego Φ, bądź $\Phi \in \mathrm{Cn}S$, bądź $\sim\Phi \in \mathrm{Cn}S$. Ponieważ, zgodnie z wynikiem zadania 12.17, jeśli $S \subset \mathfrak{a}^*$, to $\mathrm{Cn}S \subset \mathfrak{a}^*$ mamy więc, że dla dowolnego $\mathfrak{a} \in S^*$ jest $\mathfrak{a}^* = \mathrm{Cn}S$, a stąd oczywiście $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}$. W drugą stronę w rozumowaniu korzystamy z twierdzenia Skolema-Löwenheima-Tarskiego.

12.83. Przypuśćmy, że takie zdanie istnieje. Na mocy twierdzenia o zwartości wnioskujemy, że istnieje skończona ilość zdań $\Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_l}$ takich, że $\{\Phi_{i_0}, \ldots, \Phi_{i_l}\} \vdash \Psi$. Ponieważ ciąg $\{\Phi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jest rosnący, więc $\Phi_k \Rightarrow \Psi$ jest zdaniem prawdziwym ($k = \max(i_0, \ldots, i_l)$). Jednakże $\Psi \Rightarrow \Phi_{k+1}$ jest zdaniem prawdziwym, a stąd $\Phi_k \Rightarrow \Phi_{k+1}$ jest zdaniem prawdziwym, co jest sprzeczne z założeniem.

12.84. Wskazówka. Skonstruować ciąg $\{\Phi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, gdzie Φ_n orzeka, że charakterystyka ciała jest większa lub równa n. Udowodnić, że ciąg ten jest rosnący.

12.85. Wskazówka. Zauważyć, że jeżeli $\{\Phi_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ jest rosnącym ciągiem zdań, to $\{\Phi_n : n \in \mathcal{N}\}$ nie jest EC.

12.86. Zdania $\{B_n : n \in \mathcal{N}\}$ (porównaj zadanie 12.49) tworzą ciąg rosnący.

12.88. Teoria ciał algebraicznie domkniętych ustalonej charakterystyki.

12.89. Zbiór zdań prawdziwych w modelu $\langle \mathcal{N}, \leqslant \rangle$.

12.90. Wskazówka do wnioskowania $\Rightarrow$. Zauważyć, że rozszerzanie $\mathfrak{a}'$ modelu $\mathfrak{a}$ ma własność

$$\mathfrak{a} \models \Phi(x_0 \ldots x_n)[a_0, a_1, \ldots] \Leftrightarrow \mathfrak{a}' \models \Phi(c_{a_0}, \ldots, c_{a_n}).$$

Ostatnie zdanie musi być prawdziwe w $\mathfrak{b}'$, a stąd $\mathfrak{b}' \models \Phi(c_{a_0}, \ldots, c_{a_n})$ i wreszcie $\mathfrak{b} \models \Phi(x_0 \ldots x_n)[a_0, a_1, \ldots]$.

Wskazówka do wnioskowania $\Leftarrow$. Jeśli X nie jest zbiorem modelowo zupełnym, to rozważamy odpowiedni model $\mathfrak{a}$ i niezależną formułę Φ języka $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$. Mając dwa modele $\mathfrak{b}_1'$ i $\mathfrak{b}_2'$ (w języku $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$) takie, że $\mathfrak{b}_1' \models \Phi$, $\mathfrak{b}_2' \models \sim\Phi$, możemy zakładać, że $\mathfrak{b}_1' \subset \mathfrak{b}_2'$. To jednakże sprzeczne jest z faktem, że $\mathfrak{b}_1' \prec \mathfrak{b}_2'$.

12.91. Wskazówka. Rozważyć formuły języka $\mathbf{J}_{\mathcal{N}}$:

$$\Phi_n(x) : x = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}.$$

W każdym modelu dla arytmetyki jest dokładnie jeden obiekt x, który ją spełnia.

12.92. Wskazówka. Najpierw skonstruować wewnątrz ciała izomorficzną kopię pierścienia Z, a następnie przeprowadzić konstrukcję liczb wymiernych z liczb całkowitych.

12.94. Wskazówka. W pierścieniach uporządkowanych nie ma dzielników zera.

12.95. Wystarczy udowodnić, że dla dowolnych $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in X^*$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$. Zgodnie z założeniem, istnieją $\mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'$ takie, że $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ izomorficzne z $\mathfrak{a}_0$. Ponieważ teoria X jest modelowo zupełna, zatem $\mathfrak{a}' \lesssim \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' \lesssim \mathfrak{b}$ (na mocy zadania 12.90). Ponieważ $\mathfrak{a}'$ jest izomorficzne z $\mathfrak{b}'$, zatem $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{b}'$. Zgodnie z wynikiem zadania 12.33 mamy $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}$. Stąd na mocy przechodniości relacji $\equiv$ zachodzi $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

12.96. Dowolna teoria modelowo zupełna ale nie zupełna (por. zadanie 12.88).

12.97. Wskazówka. Jeśli φ jest automorfizmem $\mathfrak{b}$, to

$$\mathfrak{b} \models \Phi[\underline{X}] \Leftrightarrow \mathfrak{b} \models \Phi[\varphi \circ \underline{X}],$$

gdzie $\varphi \circ \underline{X}$ jest następującym ciągiem $(\varphi \circ \underline{X})_n = \varphi(\underline{X}_n)$. Następnie skorzystać z wyniku zadania 12.8.

12.98. Wskazówka. Jest to w istocie uogólnione twierdzenie o zupełności teorii modelowo zupełnej z modelem pierwszym (por. zadanie 12.95). Istotnie $\varphi * \mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{c}$, $\varphi * \mathfrak{b} \lesssim \mathfrak{c}$, czyli $\varphi * \mathfrak{a} \equiv \varphi * \mathfrak{b}$. Stąd $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

12.99. a) Należy udowodnić, że przestrzeń posiada bazę otwarto-domkniętą. Jest to w istocie treścią zadania 12.66.

b) Zwartość wynika z twierdzenia o zwartości, zaś to, że przestrzeń jest Hausdorffa udowadniamy w następujący sposób:

Częścią wspólną wszystkich zupełnych i niesprzecznych zbiorów zdań zawierających Φ jest $\{\Phi\}$. Stąd $\{\Phi\}$ jest zbiorem domkniętym.

12.100. Wskazówka. Zauważmy, że dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ istnieje $\mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ takie, że $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$ (mianowicie $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{m}\aleph_0}$). Stąd mamy system $\mathfrak{a} = \langle A, P\rangle$, gdzie A jest zbiorem mocy $\mathfrak{n}$, zaś P funkcją odwzorowującą różnowartościowo A^2 na A. Na mocy dolnego twierdzenia Skolema-Löwenheima mamy $\mathfrak{b} \lesssim \mathfrak{a}$, $\overline{\overline{\mathfrak{b}}} = \mathfrak{m}$. W ten sposób mamy funkcję odwzorowującą $\mathfrak{b}^2$ różnowartościowo na $\mathfrak{b}$. Stąd $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. W ten sposób dla każdego $\mathfrak{n}$, mamy $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$, a z zadania 10.62 wynika, że zdanie to jest równoważne aksjomatowi wyboru.

12.101. Jeśli $K_1 = \{\Phi\}^*$, $K_2 = \{\Psi\}^*$, to $K_1 \cap K_2 = \{\Phi \wedge \Psi\}^*$, $K_1 \cup K_2 = \{\Phi \vee \Psi\}^*$.

12.102. Jeśli $K_1 = S^*$, $K_2 = T^*$, to $K_1 \cap K_2 = (S \cup T)^*$, $K_1 \cup K_2 = \{\Phi \vee \Psi : \Phi \in S \wedge \Psi \in T\}^*$.

12.103. Zadanie 12.101 mówi, że suma i iloczyn mnogościowy elementów z bazy także należy do bazy. Zadanie 12.102 mówi, że suma i iloczyn dwóch zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

12.104. Niech $\mathfrak{a} = \langle A, \lesssim \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Rozszerzmy język $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ przez dodanie stałych dla elementów zbioru A. Rozważmy diagram systemu $\mathfrak{a}$, to znaczy zbiór $T = \{c_a \lesssim c_b : a < b\}$. Dla każdego skończonego zbioru zdań $T_0 \subset T$ istnieje relacja $\leqslant$, będąca liniowym porządkiem taka, że $c_a \lesssim c_b \Rightarrow a \leqslant b$, a następnie korzystamy z twierdzenia o zwartości.

DO ROZDZIAŁU XIII

13.5. Wskazówka. Zauważyć, że każda funkcja powstaje ze skończonego zbioru funkcji wyjściowych przez stosowanie skończoną ilość razy operacji definiowania przez superpozycję i rekursję (ewentualnie jeszcze przez minimum bądź minimum efektywne) i skorzystać z zadania 7.21.

13.11. Wskazówka. Zdefiniować najpierw indukcyjnie funkcję $P(x)$ poprzednika jak następuje:

$$P(0) = 0, \quad P(x+1) = x.$$

13.12. Wskazówka. Zauważyć, że $x \leqslant y \Leftrightarrow x \dot{-} y = 0$.

13.13. Wskazówka. Zauważyć, że $x = y \Leftrightarrow (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = 0$.

13.14. Wskazówka. Zauważyć, że $x < y \Leftrightarrow (x+1) \dot{-} y = 0$.

13.18. Wskazówka. Skorzystać z zadania 13.15.

13.22. Wskazówka. Skorzystać z zadania 13.20.

13.23. Wskazówka. Przyjmując, że $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$ i $f * (\mathcal{N}) = A$, gdzie f — funkcja rekurencyjna, rozważyć funkcję g określoną następująco:

$$g(0) = f(0),$$
$$g(n+1) = f(\mu m)[f(m) > g(n)]$$

i skorzystać z zadania 13.24.

13.24. Wskazówka. Zauważyć, że jeśli f rosnąca:

$$f*(\mathcal{N}) = A, \quad \text{to} \quad n \in A \Leftrightarrow \bigvee_{m \leqslant n} n = f(m).$$

Dla dowodu w drugą stronę rozważyć funkcję g określoną następująco:

$$g(0) = (\mu n)f(n) = 0,$$

$$g(n+1) = (\mu m)\,[m > g(n) \wedge f(m) = 0].$$

13.33. Wskazówka. Zauważyć, że jeśli

$$f(x, y) = (\mu z \leqslant x)\,[g(z, y) = 0],$$

gdzie g jest funkcją obliczalną, to $f(x, y)$ można określić następująco: $f(0, y) = 0$,

$$f(n+1, y) = \begin{cases} n+1, & \text{jeśli } f(n, y) = 0 \wedge g(0, y) \neq 0 \wedge g(n+1, y) = 0, \\ f(n, y), & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

13.35. Wskazówka. Zauważyć, że np. dla $n = 2$ jako szukane funkcje można wziąć funkcje z zadania 5.88.

13.36. Wskazówka. Skorzystać z zadania 13.35.

13.37. Wskazówka. Niech $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ będzie funkcją określoną następująco:

$$f(x_1, \ldots, 0) = g(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h[x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)].$$

Rozważyć funkcję:

$$\Psi(x, y) = J_{n+2}\{J_n^1(x), \ldots, J_n^h(x), y, f[J_n^1(x) \ldots J_n^h(x), y]\}.$$

Dowieść, że funkcję $\Psi(x, y)$ można określić za pomocą superpozycji i rekursji typu

$$\Psi(x, 0) = \chi(x),$$

$$\Psi(x, y+1) = \Theta[\Psi(x, y)].$$

Ostatecznie wprowadzić funkcję $\varphi(x, y)$ taką, że

$$\varphi(x, 0) = x,$$

$$\varphi(x, y+1) = \Theta\,[\varphi(x, y)]$$

i dowieść, że $\Psi(x, y) = \varphi[\chi(x), y]$.

13.39. Wskazówka. Zauważyć, że $0^2 = 0$, a $(x+1)^2 = \varphi(x^2)+1$, gdzie

$\varphi(y) = y+2[\sqrt{y}]$ i dowieść, że funkcja φ może być uzyskana przez iterowanie funkcji $\Psi(z) = z+1+2sq\big((x+4)-[\sqrt{x+4}]^2\big)$.

13.40. Wskazówka. Rozważyć funkcję $(x+y)^2+5x+3y+4$ i zauważyć, że jeśli $x \geqslant y$, to

$$(x+y+2)^2 \leqslant (x+y)^2+5x+3y+4 < (x+y+3)^2,$$

skąd

$$q(x, y) = (x+y)^2+5x+3y+4-[\sqrt{(x+y)^2+5x+3y+4}]^2 =$$
$$= \begin{cases} x-y & \text{dla } x \geqslant y \\ 3x+y+3 & \text{dla } x < y. \end{cases}$$

Z drugiej strony wprowadzając funkcję

$$sqy = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 2|x, \\ 1, & \text{jeśli } 2\nmid x \end{cases}$$

można zdefiniować za jej pomocą funkcję

$$f(x) = x^2+E\left[\frac{x}{2}\right]$$

i ostatecznie $E\left[\frac{x}{2}\right] = q[f(x), x^2]$.

13.41. Wskazówka. Skorzystać z zad. 13.40 i 13.39.

13.42. Wskazówka. Zauważyć, że

$$x \cdot y = \frac{q\big(q((x+y)^2 \cdot x^2) \cdot y^2\big)}{2}.$$

13.43. Wskazówka. Skorzystać z funkcji q i sq.

13.44. Wskazówka. Ze względu na zadanie 13.37 wystarczy wykazać, że jeśli f zdefiniowana jest następująco:

$$f(x, 0) = x,$$
$$f(x, y+1) = g[f(x, y)],$$

to f może być też zdefiniowana za pomocą czystej iteracji. W tym celu rozważyć funkcje $v(x) = Q(\sqrt{x})$ i $w(x, y) = \big((x+y)^2+y^2\big)+x$ i dowieść, że

$$Q[w(x, y)] = x, \quad v[w(x+y)] = y$$

oraz, jeżeli $Q(x+1) \neq 0$, to $Q(x+1) = Q(x)+1$ i $v(x+1) = v(x)$.

Wprowadzić następnie funkcję $\Theta(x) = f[v(x), \Phi(x)]$ i dowieść, że może ona być zdefiniowana z funkcji wyjściowych oraz funkcji g przez superpozycję i iterację czystą. W końcu zauważyć, że $f(x, y) = \Theta[w(y, x)]$.

13.45. Wskazówka. Skorzystać z wyniku zadania 13.35. Określić funkcję $U(n, x)$ następująco:

$$U(0, x) = S(x), \quad U(1, x) = Q(x), \quad U(2, x) = J_2^1(x), \quad U(3, x) = J_2^2(x),$$

a dalej dla $n > 3$:

$$U(4n, x) = U(J_2^1(n), x) + U(J_2^2(n), x),$$

$$U(4n+1, x) = U\{J_2^1(n), U[J_2^2(n), x]\},$$

$$U(4n+2, 0) = U(n, 0),$$

$$U(4n+2, x+1) = U[n, U(n, x)].$$

Dowieść, że jest to funkcja rekurencyjna. Zauważyć, że jest to funkcja uniwersalna dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych jednej zmiennej.

13.46. Wskazówka. Zauważyć, że jeśli $U(n, x)$ jest funkcją uniwersalną, to $U(n, n)+1$ nie może należeć do F.

13.47. Wskazówka. Skorzystać z zadań 13.46 i 13.45.

13.48. Wskazówka. Przeprowadzić dowód indukcyjny ze względu na stopień komplikacji definicji funkcji obliczalnej.

DO DODATKU I

DI.1. Niech A będzie dowolnym ale ustalonym niepustym zbiorem liczb naturalnych. Oznaczmy przez Z zbiór określony następująco:

$$Z = \{n \in \mathcal{N} : \bigwedge_{m \in A} n < m\}.$$

Możliwe są dwa przypadki:

1° $0 \in A$ i wówczas oczywiście istnieje w A element najmniejszy, jest nim bowiem liczba 0.

2° $0 \notin A$ i wtedy $0 \in Z$, gdyż 0 będąc w ogóle najmniejszą liczbą naturalną jest tym bardziej mniejsze od wszystkich elementów zbioru A. Zbiór Z jest z A rozłączny, gdyż jeśli $n \in Z \cap A$, to $n < n$, co nie jest możliwe. Ponadto, jeśli $n \in Z$, $m \in \mathcal{N}$ i $m < n$, to $m \in Z$, co wynika łatwo z określenia Z.

Pokażmy teraz, że w zbiorze Z musi istnieć element największy. Istotnie, w przeciwnym bowiem razie dla dowolnego $k \in Z$ istniałaby liczba $k_1 \in Z$ taka, że $k < k_1$, skąd $k+1 \leqslant k_1 \in Z$. Ponieważ także $0 \in Z$, więc zgodnie z zasadą indukcji, Z zawierałby wszystkie liczby naturalne, a więc i elementy zbioru A, z którym jak to dowiedliśmy zbiór Z jest rozłączny.

Niech więc k_0 będzie elementem największym w Z. Wobec tego $\bigwedge_{m \in A} k_0 < m$ i $\bigvee_{m \in A} k_0+1 \geqslant m$, skąd $k_0+1 = m_0$ dla pewnego $m_0 \in A$. Ponieważ z faktu, że $\bigwedge_{m \in A} k_0 < m$ wynika, że $\bigwedge_{m \in A} k_0+1 \leqslant m$, więc m_0 jest najmniejszym elementem A, co kończy dowód.

D1.2. Wskazówka. Rozpatrzyć zbiór $Z = \{n \in \mathcal{N} : \bigvee_{m \in A} n \leqslant m\}$, gdzie A dowolny ale ustalony, niepusty i ograniczony od góry zbiór liczb naturalnych. Stosując podobne rozumowanie jak w zadaniu D1.1 dowieść, że jeśli w A nie ma elementu największego, to $Z = \mathcal{N}$.

D1.3. Wskazówka. Mając dany zbiór Z spełniający warunki zadania rozpatrzyć zbiór $Z' = Z \cup \{0, \ldots, k-1\}$ i dowieść, że spełnia założenia zasady indukcji.

D1.4. Wskazówka. Mając dany zbiór Z spełniający warunki zadania rozpatrzyć zbiór $Z' = \{n \in \mathcal{N} : n < k \vee \bigwedge_{k \leqslant m < n} m \in Z\}$. Dowieść, korzystając z zasady indukcji, że $Z' \supset \mathcal{N}$ oraz, że $Z' - \{0, \ldots, k-1\} \subset Z$.

D1.5. Wskazówka. Mając dany zbiór Z spełniający warunki $1°$ i $2°$ rozpatrzyć zbiór $A = \{n \in \mathcal{N} : n \notin Z\}$. Dowieść, że jeśli Z nie zawiera wszystkich liczb naturalnych, to w A istnieje element najmniejszy $n_0 \neq 0$ i wówczas $n_0 - 1 \in \mathcal{N}$, ale $n_0 - 1 \in Z$, chociaż $(n_0-1)+1 \notin Z$, bo A rozłączne z Z.

D1.6. Wskazówka. Dla danego zbioru A niepustego i ograniczonego z góry rozpatrzyć zbiór $Z = \{n \in \mathcal{N} : \bigwedge_{m \in A} m < n\}$.

D1.7. Wskazówka. Dla danego zbioru Z spełniającego warunki $1°$ i $2°$ zasady indukcji uogólnionej rozpatrzyć zbiór $Z' = \{n \in \mathcal{N} : k \leqslant n \wedge n \notin Z\}$.

D1.8. Wskazówka. Zbiór A liczb całkowitych rozbić na sumę $A_1 \cup A_2$, gdzie A_1 — zbiór liczb całkowitych ujemnych. Jeśli $A_1 \neq O$, wówczas zbiór

$A_1^* = \{-c : c \in A_1\}$ jest niepustym podzbiorem liczb naturalnych ograniczonym z góry.

D1.9. Wskazówka. Zastosować rozumowanie podobne jak w rozwiązaniu zadania D1.8.

D1.10. Wskazówka. Podobnie jak w zadaniach D1.8 i D1.9 skorzystać z faktu, że zbiór liczb całkowitych jest sumą zbioru $\mathcal{N}$ i zbioru $\mathcal{N}^* = \{-n : n \in \mathcal{N}\}$.

D1.11. Niech $Z = \left\{n \in \mathcal{N} : 0+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right\}$. Łatwo sprawdzić, że $0 \in Z$, spełniony jest więc warunek 1° zasady indukcji.

Niech teraz n będzie dowolną ale ustaloną liczbą naturalną taką, że $n \in Z$. Wynika stąd, że $0+1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dodając do obu stron równości $n+1$ otrzymujemy:

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},$$

więc pokazaliśmy, że $n+1 \in Z$. Tym samym wykazaliśmy, że są spełnione wszystkie założenia zasady indukcji, które pozwolą nam wnosić, że $\mathcal{N} \subset Z$, czyli równość zachodzi dla wszelkich naturalnych n.

D1.17. $k = 1$.

D1.36. Wskazówka. Prowadzić rozumowanie dla

$$Z = \left\{n \in \mathcal{N} : \bigwedge_{\theta} \sum_{i=0}^{n} \cos i\theta = \tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right\}.$$

D1.46. Rozważmy zbiór $Z = \{n \in \mathcal{N} : 2^n > n\}$. Ponieważ $2^0 = 1 > 0$, więc $0 \in Z$. Zakładając teraz, że $n \in Z$ mamy $2^n > n$. Mnożąc obie strony tej nierówności przez 2 otrzymujemy $2^{n+1} > 2n$ i dalej $2^{n+1} > n+n$. Jeśli $n = 0$, to $2^{0+1} = 2^1 = 2 > 0+1$, gdy $n \geqslant 1$, wówczas $2^{n+1} > n+n \geqslant n+1$. A więc w każdym wypadku $2^{n+1} > n+1$, co kończy dowód tego, że i warunek 2° zasady indukcji jest spełniony, a tym samym i dowód naszej nierówności.

D1.52. Wskazówka. Zapisać $6^{n+3}+7^{2n+3}$ jako $6^{n+2}\cdot 6+7^{2n+1}\cdot(43+6)$.

D1.54. Niech p — dowolna ale ustalona liczba pierwsza i niech $Z = \{n \in \mathcal{N} : p|n^p-n\}$. Jak łatwo sprawdzić $0 \in Z$, załóżmy więc że dla dowolnego ale ustalonego n mamy $p|n-n$. Będziemy starali się dowieść, że $p|(n+1)^p-(n+1)$. W tym celu rozważmy wyrażenie $(n+1)^p-(n+1)$. Korzystając z dwumianu Newtona (patrz zadanie D1.30) i dokonując odpowiednich redukcji dostajemy kolejno:

$$(n+1)^p-(n+1) = n^p+\binom{p}{i}n^{p-1}+\ldots+\binom{p}{p-1}n+1-n-1 =$$

$$= (n^p-n)+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{i}n^{p-i}.$$

Widoczne jest, że wystarczy dowieść $p|\binom{p}{i}$ dla $0 < i < p$. Rozważmy w tym celu wyrażenie $\binom{p}{i}=\frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}$. Jest ono liczbą całkowitą, oznaczamy ją przez k (dowód tego faktu wynika bezpośrednio z zadania D1.30). Mamy więc

$$\frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i} = k, \quad \text{skąd} \quad p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1) = i!\cdot k.$$

Wynika stąd, że $p|i!\cdot k$ i ponieważ p jest liczbą pierwszą, a $i < p$, to p nie ma żadnych wspólnych dzielników z $i!$. Wynika więc stąd, że $p|k$. Ostatecznie więc, wobec $k = \binom{p}{i}$ mamy $p|\binom{p}{i}$, co kończy dowód.

D1.55. Wskazówka. Skorzystać z łatwego do udowodnienia faktu, że $2|n^2+n$.

D1.58. Wskazówka. Zapisać $11^{n+3}+12^{2n+3}$ jako $11^{n+1}\cdot 11+ +12^{2n+1}\cdot(133+11)$.

D1.61. Wskazówka. Skorzystać z zasady indukcji uogólnionej dla $k = 3$.

D1.62. Dla 0 oraz dla $n > 3$. **D1.63.** Dla 0, 1 oraz dla $n > 7$.
D1.64. Dla 0 i $n > 5$. **D1.65.** Dla $n > 2$. **D1.66.** Tylko dla 3 i 4.
D1.67. Nierówność nigdy nie zachodzi. **D1.68.** Dla $n > 6$.
D1.75. Wskazówka. Skorzystać z zad. D1.18.

D1.77. Wskazówka. Skorzystać z zad. D1.34 przyjmując $f(n) = 2^n$.

D1.78. Wskazówka. Skorzystać z zadania D1.77.

D1.79. Wskazówka. Przy dowodzie indukcyjnym skorzystać z nierówności:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} \geqslant \frac{(a+b)^2}{c+d} \qquad (a, b, c, d > 0).$$

DO DODATKU II

D2.1. Załóżmy, że $a = a \vee b$. Wtedy możemy w $a \wedge b$ podstawić $a \vee b$ zamiast a, nie zmieniając wartości wyrażenia. Mamy więc $a \wedge b = (a \vee b) \wedge b$. Korzystając z przemienności obu działań (aksjomaty L2) otrzymujemy $a \wedge b = b \wedge (b \vee a)$. Korzystając teraz z L4a otrzymujemy $b \wedge (b \vee a) = b$ i wreszcie $a \wedge b = b$. Wnioskowanie odwrotne jest analogiczne.

D2.2. Należy udowodnić, że relacja $\leqslant$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Aby udowodnić zwrotność zauważmy, że $a \leqslant a$ jest równoważne temu, że $a \vee a = a$. Ale to jest aksjomatem L1 b. Załóżmy teraz, że $a \leqslant b$ i $b \leqslant a$, wtedy

$$a \vee b = b \quad \text{i} \quad b \vee a = a.$$

Ponieważ działanie $\vee$ jest przemienne (aksjomat L2 b), zatem z drugiej równości otrzymujemy $a \vee b = a$ i na mocy przechodniości relacji równości mamy $a = b$.

Pozostaje udowodnić przechodniość. Załóżmy więc, że $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, to znaczy $a \vee b = b$ i $b \vee c = c$. Rozważmy teraz wyrażenie $a \vee c$. Na mocy drugiej z powyższych równości mamy $a \vee c = a \vee (b \vee c)$. Jednakże działanie $\vee$ jest łączne (aksjomat L3 b) i stąd $a \vee c = (a \vee b) \vee c$, ponieważ $a \vee b = b$, zatem

$$(a \vee b) \vee c = b \vee c, \quad \text{a stąd} \quad (a \vee c) = b \vee c = c.$$

D2.3. Istotnie, takim c jest $a \vee b$.

D2.4. a) Wystarczy udowodnić, że jeżeli $d \leqslant a$ i $d \leqslant b$, to $d \leqslant a \wedge b$. Zgodnie z wynikiem zadania D2.1 mamy $d \leqslant a \Leftrightarrow d \wedge a = a, d \leqslant b \Leftrightarrow \Leftrightarrow d \wedge b = b$, stąd $d \wedge (a \wedge b) = (d \wedge a) \wedge b = d \wedge b = d$, czyli $d \leqslant a \wedge b$.

b) Wskazówka. Udowodnić, że jeżeli $a \leqslant d$ i $b \leqslant d$, to $a \vee b \leqslant d$.

D2.5. Rozważmy wyrażenie $(a \wedge b) \wedge a$. Jest ono równe $a \wedge (a \wedge b)$ (na mocy przemienności L2 a) $(a \wedge a) \wedge b$ (na mocy łączności L3 a) i wreszcie

$a \wedge b$ (na mocy idempotentności L1 a), a zatem $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$, stąd $a \wedge b \leqslant a$. Drugiej i trzeciej nierówności dowodzimy korzystając z zadania D2.4.

D2.6. Należy sprawdzić, czy aksjomaty L1-L5 są spełnione. Dla L1 i L2 jest to oczywiste. L3 tłumaczy się na język arytmetyki w sposób następujący:

$$\mathrm{NWD}[x, \mathrm{NWD}(y, z)] = \mathrm{NWD}[\mathrm{NWD}(x, y), z],$$

$$\mathrm{NWW}[x, \mathrm{NWW}(y, z)] = \mathrm{NWW}[\mathrm{NWW}(x, y), z].$$

Oba te zdania są prawdziwe. Ponieważ

$$x \mid \mathrm{NWW}(x, y) \quad \text{oraz} \quad x \mid y \Rightarrow [(\mathrm{NWD}(x, y) = x) \wedge (\mathrm{NWW}(x, y) = y)],$$

zatem i aksjomat L4 jest prawdziwy.

Podobnie dowodzimy prawdziwości aksjomatu L5.

Uwaga. Można udowodnić, że rozważana krata jest izomorficzna ze słabym produktem kartezjańskim przeliczalnej ilości krat $\langle \mathcal{N}, \wedge, \vee \rangle$, gdzie $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$. Istotnie *słaby produkt kartezjański* jest to zbiór ciągów od pewnego miejsca równych stale zero. Na ciągach wprowadzamy działania $\wedge$ i $\vee$ jak następuje:

$$\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}} \wedge \{y_n\}_{n \in \mathcal{N}} = \{\min(x_n, y_n)\}_{n \in \mathcal{N}},$$

$$\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}} \vee \{y_n\}_{n \in \mathcal{N}} = \{\max(x_n, y_n)\}_{n \in \mathcal{N}}.$$

Ponieważ każda liczba x może być jednoznacznie przedstawiona jako iloczyn $x = p_0^{x_0}, p_1^{x_1}, \ldots, p_n^{x_n}$, gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$ itd.), zatem przyporządkowanie $x \to (x_0, x_1, \ldots)$ jest jednoznaczne. Można udowodnić, że jest to izomorfizm.

D2.7. Wprowadzamy w zbiorze X działania $\min_{\leqslant}$ i $\max_{\leqslant}$ wzorami:

$$\min_{\leqslant}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \leqslant y, \\ y, & \text{jeśli } y \leqslant x, \end{cases} \quad \max_{\leqslant}(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } y \leqslant x, \\ y, & \text{jeśli } x \leqslant y. \end{cases}$$

$\langle X, \min_{\leqslant}, \max_{\leqslant} \rangle$ jest kratą, a porządek wyznaczony przez te działania jest identyczny z $\leqslant$.

D2.8. Dowód przez indukcję ze względu na ilość elementów w skończonym zbiorze X_0. Dla zbiorów jednoelementowych twierdzenie jest oczywiste. Niech zatem zbiór X_0 liczy $k+1$ elementów $X_0 = \{x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k\}$.

Zbiór $X_1 = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ liczy k elementów i z założenia indukcyjnego ma kres dolny y.

Rozważmy element $y \wedge x_k$. Jest on oczywiście wcześniejszy (w sensie $\leqslant$) od każdego z elementów zbioru X_0, jako wcześniejszy od każdego elementu zbioru X_1 i jednocześnie jest wcześniejszy od x_{k-1}. Należy więc pokazać, że jeśli t jest wcześniejsze od wszystkich elementów zbioru X_0, to t jest wcześniejsze od $y \wedge x_k$. Istotnie, ponieważ t jest wcześniejsze od wszystkich elementów zbioru X_0, a więc tym bardziej od wszystkich elementów zbioru X_1 i wobec tego od y. Podobnie t jest wcześniejsze od x_k. Jest więc ono wcześniejsze także od $y \wedge x_k$ (por. zadanie D2.4 a).

D2.9. Sformułowanie to powinno brzmieć: Jeśli $X \subset L$, to t jest kresem górnym X, jeśli spełnia ono warunek

$$\bigwedge_x \bigwedge_y [(y \in X \Rightarrow y \leqslant x) \Rightarrow t \leqslant x].$$

Każdy skończony podzbiór $X \subset L$ ma kres górny. Dowód jest analogiczny jak w zadaniu D2.8.

D2.10. Przykład. Krata L składa się z podzbiorów X zbioru $\mathcal{N}$ takich, że $\mathcal{N} - X$ jest zbiorem skończonym. Działania $\wedge$ i $\vee$ definiujemy jak następuje:

$$X \wedge Y = X \cap Y, \qquad X \vee Y = X \cup Y.$$

Rodzina złożona ze zbiorów $\mathcal{N} - \{0\}, \mathcal{N} - \{1\}, \ldots, \mathcal{N} - \{k\}, \ldots, (k \in \mathcal{N})$ oczywiście kresu dolnego (w tej kracie) nie posiada, ponieważ relacją $\leqslant$ wyznaczoną przez działania jest tu inkluzja, a zbiór zawarty we wszystkich spośród tych zbiorów musi być pusty.

Oczywiście zbiór L nie może być skończony, ponieważ każdy podzbiór zbioru skończonego jest także skończony, a zgodnie z wynikiem zadania D2.8 każdy skończony podzbiór kraty ma kres dolny.

Uwaga 1. W rozważanej kracie każdy zbiór ma natomiast kres górny.

Uwaga 2. Opisana konstrukcja powinna nasunąć czytelnikowi sposób konstrukcji kraty o następującej własności: Każda przeliczalna rodzina elementów ma kres dolny, ale istnieją rodziny nie posiadające kresu dolnego.

D2.11. Wskazówka. Przeprowadzić dowód przez indukcję ze względu na ilość elementów w sumie $X \cup Y$.

D2.12. Dowód faktu, że definicja relacji $\leqslant$ jest poprawna. Załóżmy, że $A \sim A_1$, $B \sim B_1$, $A - B$ jest zbiorem skończonym. Wówczas $A_1 - B_1 \subset$

$\subset (A_1 \dot{-} A) \cup (A - B) \cup (B_1 \dot{-} B)$. Ponieważ zaś każdy ze zbiorów po prawej stronie inkluzji jest skończony, ich suma także jest skończona i zbiór znajdujący się po lewej stronie także jest skończony. A więc prawdziwość naszego zdania nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy abstrakcji.

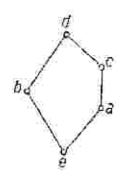
Definiujemy teraz $[A] \wedge [B] = [A \cap B]$, $[A] \vee [B] = [A \cup B]$. Należy sprawdzić, że definicje te są poprawne (to znaczy nie zależą od wyboru reprezentantów). Reszta już jest oczywista.

D2.13. Wynika to z tego, że aksjomaty są dualne w tym sensie, że zastąpienie w każdym z nich znaku $\wedge$ przez $\vee$ i na odwrót prowadzi od aksjomatu do aksjomatu. Zauważmy, że ponieważ tę samą własność mają aksjomaty L5 a i L5 b, zatem z kraty rozdzielnej otrzymamy kratę rozdzielną. Krata będąca wynikiem opisanego postępowania nazywana jest *kratą dualną* do kraty $\mathfrak{L}$. Zauważmy jeszcze, że $(\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}$.

D2.14. Część wspólna dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięta (a więc tym bardziej rodziny dwuelementowej). Suma dwóch zbiorów domkniętych jest domknięta. Rozdzielność wynika z prawa rozdzielności dla działań $\cap$ i $\cup$.

D2.15. Załóżmy, że krata $\mathfrak{L}$ jest rozdzielna oraz, że $a \leqslant c$. Wtedy $a \vee c = c$, zaś $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$.

D2.16. Łatwo sprawdzić, że jeśli krata $\mathfrak{L}$ posiada podkratę postaci opisanej rysunkiem 45, to nie jest modularna. Odwrotnie, jeśli krata $\mathfrak{L}$ nie jest modularna, to istnieją elementy a, b, c takie, że $a \leqslant c$, ale $a \vee (b \wedge c) \neq$ $\neq (a \vee b) \wedge c$. Weźmy teraz $b \vee c$ jako d, zaś $b \wedge c$ jako e. Należy sprawdzić, że pięć opisanych elementów tworzy podkratę kraty $\mathfrak{L}$ żądanej postaci.



Rys. 45

D2.17. Przykład kraty rozdzielnej: $\langle \mathscr{P}(X), \bigcap, \bigcup \rangle$, gdzie X jest dowolnym zbiorem.

Przykład kraty nierozdzielnej: krata nie modularna jest tym bardziej nierozdzielna. Rozważyć kratę pięcioelementową z zadania D2.16.

Udowodniliśmy w ten sposób, że zarówno aksjomat L5 jak i jego negacja są niesprzeczne z aksjomatami L1-L4. Aksjomat L5 jest więc od nich niezależny.

D2.18. a) Porównać zadanie D2.16 b. Rozważmy rodzinę wszystkich podprzestrzeni liniowych przestrzeni Hilberta. Definiujemy działania jak następuje: $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B$ jest to najmniejsza przestrzeń liniowa zawierająca A i B. Jest to krata modularna, ale nierozdzielna. Zauważyć, że udowodniliśmy w ten sposób niezależność aksjomatu L5 od aksjomatów L1-L4, L4 $\frac{1}{2}$.

D2.19. Wskazówka. Działania $\wedge$ i $\vee$ są zwykłymi działaniami mnogościowymi $\cap$ i $\cup$.

D2.20. Działanie $\wedge$ definiujemy jako część wspólną. Ponieważ udowodniliśmy uprzednio, że część wspólna dwóch relacji równoważności jest relacją równoważności (zadanie 4.125), definicja ta jest poprawna. Natomiast $R \vee S$ definiujemy jako część wspólną wszystkich relacji równoważności, zawierających R oraz S. Spełnienie aksjomatów L1 i L2 jest oczywiste, L3 i L4 mniej oczywiste, ale też łatwe. Zauważmy, że $R = R \vee S$ pociąga za sobą $R \cup S \subset R$, czyli tym bardziej $S \subset R$.

Odwrotnie $S \subset R$ pociąga za sobą $S \cup R = R$, a wtedy R jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą zarówno R jak i S, czyli $S \leqslant R$.

D2.21. a) Rozważmy wyrażenie $a \vee a$. Zgodnie z aksjomatem L1 a mamy $a \vee a = a \vee (a \wedge a)$. Ostatnie wyrażenie zgodnie z aksjomatem L4 b jest równe a.

b) Wystarczy udowodnić, że L1 b jest zależne od L2, L3 i L4. Istotnie $a = a \vee (a \wedge b)$ (na mocy L4 b), zaś $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)$. Ostatnie wyrażenie jest szczególnym przypadkiem L4 a — jeśli zamiast b wstawimy $a \wedge b$, stąd $a \wedge a = a$.

c) Aby udowodnić L5 b rozważmy wyrażenie $a \vee (b \wedge c)$. Na mocy aksjomatu L4 b mamy $a = a \vee (a \wedge c)$, a stąd

$$a \vee (b \wedge c) = [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c), \quad \text{czyli} \quad a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$$

na mocy L3 b. Stosując teraz L5 a, mamy

$$a \vee [c \wedge (a \vee b)] \quad \text{i} \quad [a \wedge (a \vee b)] \vee [c \wedge (a \vee b)],$$

czyli (jeszcze raz L5 a) $(a \vee c) \wedge (a \vee b)$, skąd na mocy przemienności otrzymujemy ostatecznie $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

D2.22. a) Kres dolny jest największym elementem mniejszym od wszystkich elementów x. W szczególności jest mniejszy od dowolnego $x \in X$.

b) Analogicznie.

c) Z założenia $X \neq O$. Niech więc $x \in X$. Mamy $\bigcap X \leqslant x$ (na mocy a), $x \leqslant \bigcup X$ na mocy b), stąd na mocy przechodniości $\bigcap X \leqslant \bigcup X$.

D2.23. Wskazówka. Jeśli $x \in X$, to $x \leqslant a \vee x \leqslant \bigcup \{a \vee x : x \in X\}$, a stąd (ze względu na dowolność x) mamy $\bigcup X \leqslant \bigcup \{a \vee x : x \in X\}$.

D2.25. a) Zauważmy, że $\bigcap_{t \in T} a_t \leqslant a_t \vee b_t$ (dla każdego $t \in T$). Stąd też $\bigcap a_t$ jest wcześniejszy od b_t (dla każdego $t \in T$), a więc i od ich kresu dolnego.

b) Analogicznie.

D2.26. a) Należy udowodnić, że:

1° $\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t) \leqslant (\bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t)$

oraz

2° $\bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t \leqslant \bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t)$.

1° Ponieważ dla każdego t mamy $a_t \leqslant \bigcup_{t \in T} a_t$ i $b_t \leqslant \bigcup_{t \in T} b_t$, zatem dla każdego t

$$a_t \vee b_t \leqslant \bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t.$$

Jednakże z ostatniej nierówności wynika, że kres górny $\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t)$ jest też wcześniejszy od $\bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t$.

2° Ponieważ dla każdego t mamy $a_t \leqslant a_t \vee b_t$, a więc dla każdego t

$$a_t \leqslant \bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t),$$

stąd

$$\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t)$$

jest późniejszy od a_t dla każdego t i wobec tego

$$\bigcup_{t \in T} a_t \leqslant \bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t).$$

Podobnie $\bigcup_{t \in T} b_t \leqslant \bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t)$, a stąd i suma $\bigcup_{t \in T} a_t \vee \bigcup_{t \in T} b_t$ jest wcześniejsza od $\bigcup_{t \in T} (a_t \vee b_t)$.

b) Analogicznie.

c) Ponieważ dla każdego t mamy $a_t \leqslant a_t \vee b_t$ oraz $b_t \leqslant a_t \vee b_t$, więc korzystając z zadania D2.25 a otrzymujemy

$$\bigcap_{t\in T} a_t \leqslant \bigcap_{t\in T} (a_t \vee b_t), \qquad \bigcap_{t\in T} b_t \leqslant \bigcap_{t\in T} (a_t \vee b_t)$$

i wreszcie

$$\bigcap_{t\in T} a_t \vee \bigcap_{t\in T} b_t \leqslant \bigcap_{t\in T} (a_t \vee b_t).$$

D2.27. Krata $\langle \mathscr{P}(X), \cap, \cup \rangle$ jest zupełna. Krata niezupełna — patrz zadanie D2.10. Zupełność krat skończonych — porównaj zadanie D2.8.

D2.28. b) Załóżmy, że istnieją dwa elementy a_0 i a_1 spełniające warunki:

$$\bigwedge_x (a_0 \vee x = a_0), \qquad \bigwedge_x (a_1 \vee x = a_1).$$

Ponieważ działanie $\vee$ jest przemienne, mamy $\bigwedge\limits_x (a_0 \vee x = a_0)$, $\bigwedge\limits_x (x \vee a_1 = a_1)$. Podstawiając w pierwszym wypadku a_1 za x, a w drugim a_0 otrzymujemy równości:

$$a_0 \vee a_1 = a_0, \qquad a_0 \vee a_1 = a_1, \qquad \text{a stąd} \qquad a_0 = a_1.$$

c) Porównać zadanie D2.6.

d) Rozważyć kratę dualną do przykładu znalezionego w punkcie c.

e) Tak, jeżeli zbiór L jest jednoelementowy.

D2.29. b) Załóżmy, że a jest jednością w $\mathscr{L}'$, to znaczy $\bigwedge\limits_x (x \vee a = a)$. Zgodnie z definicją $\bigwedge\limits_x (x \wedge a = a)$, a więc a jest zerem w $\mathscr{L}$.

f) Krata dualna do modularnej jest modularna. Jeśli bowiem krata dualna $\mathscr{L}$ miałaby jako podkratę kratę pięcioelementową, opisaną w zadaniu D2.16, to krata $\mathscr{L}$ miałaby jako podkratę kratę dualną do kraty pięcioelementowej w zadania D2.16. Jednakże krata dualna do kraty pięcioelementowej z zadania D2.16 jest z nią izomorficzna.

D2.31. Załóżmy I1 i I2. Wtedy implikacja w jedną stronę w I1½ jest po prostu zdaniem I1, zaś implikacja w drugą stronę wynika z faktu, że

$$a \leqslant a \vee b \quad \text{i} \quad b \leqslant a \vee b.$$

Załóżmy I1½. Ponieważ $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ jest tautologią, zatem I1½ wynika I1. Ponieważ $b \leqslant a$ jest równoważne $b \vee a = a$, a równocześnie $a \in I$, zatem $b \vee a \in I$ i stąd $b \in I$.

D2.32. b) Ponieważ ideał jest zawsze niepusty, więc jeśli $x \in I$, to 0 jako element wcześniejszy od x też należy do I.

c) Jest to wniosek z a i b.

D2.23. Jeśli $x \in (a)$ i $y \in (a)$, to $x \leqslant a$ i $y \leqslant a$, a zatem $x \vee y \leqslant a$, czyli $x \vee y \in (a)$.

Jeśli $x \leqslant y$ i $y \in (a)$, to $x \leqslant y \leqslant a$ i stąd $x \leqslant a$, czyli $x \in (a)$.

D2.34. Jeśli w kracie jest zero, to na mocy D2.32 c $\{0\}$ jest częścią wspólną wszystkich ideałów w $\mathscr{L}$, a więc część wspólna jest niepusta.

Odwrotnie jeśli część wspólna wszystkich ideałów jest niepusta, to jest ona jednopunktowa, bo jeśli T jest tą częścią wspólną, $x \in T$, $y \in T$, $x \leqslant y$ i $x \neq y$, to ponieważ (x) jest ideałem, więc $T \subset (x)$, a więc $y \in (x)$, czyli $y \leqslant x$ i wraz z nierównością $x \leqslant y$ mamy $x = y$. A zatem wiemy, że część wspólna jest jednoelementowa.

Niech u będzie jedynym elementem zbioru T. Na mocy rozumowania przeprowadzonego powyżej jeśli $y \leqslant x$, to $y = x$. Rozważmy dowolne $z \in L$ takie, że $z \wedge x \leqslant x$, a zatem $z \wedge x = x$. Ze względu na dowolność z element x musi być zerem.

D2.35. Porównać zadanie D2.30. Pamiętać stale o rozróżnieniu $\wedge$ jako koniunkcji i $\wedge$ jako działania w kracie.

D2.36-38. Porównaj D2.31-D2.34.

D2.39. Przykładowo udowodnijmy, że każdy filtr w kracie skończonej jest główny.

Ponieważ filtr F sam jest zbiorem skończonym, ma więc on swój kres dolny t_F. Udowodnimy, że $F = [t_F]$. Łatwo widzieć, że $F \subset [t_F]$.

Aby udowodnić inkluzję w drugą stronę, należy pokazać, że każdy filtr jest zamknięty ze względu na branie przecięć skończonych podrodzin, co łatwo udowodnić dokładnie tak samo, jak w zadaniu D2.8.

Uwaga. Zauważmy, że jeśli $x \in F$, to $[x] \subset F$.

D2.40. Przykład. Rozważmy zbiór liczb wymiernych $\mathscr{W}$ oraz działania kratowe wyznaczone w nim przez naturalny porządek $\leqslant$. Rozważmy $\{x : x < \sqrt{2}\}$. Zbiór ten jest ideałem, ale ponieważ nie istnieje największa liczba wymierna mniejsza od $\sqrt{2}$, zatem ideał ten nie jest główny.

D2.41. Zauważyć, że $0 = \bigcap L$, $1 = \bigcup L$. Zastosować następnie zadanie D2.27.

D2.42. Zauważyć, że jeśli x i y są nieporównywalne w sensie relacji $\leqslant$, to $\{x, y\}$ nie jest podkratą kraty L (działania $\vee$ i $\wedge$ wyprowadzają nas ze zbioru).

D2.43. Załóżmy, że $a \wedge b_0 = 0$, $a \vee b_0 = 1$, $a \wedge b_1 = 0$, $a \vee b_1 = 1$. Wtedy $(a \wedge b_0) \vee b_1 = 0 \vee b_1 = b_1$, czyli $(a \vee b_1) \wedge (b_0 \vee b_1) = b_1$, skąd $1 \wedge (b_0 \vee b_1) = b_0 \vee b_1 = b_1$, a więc $b_0 \leqslant b_1$. Analogicznie udowodnimy $b_1 \leqslant b_0$, a zatem $b_0 = b_1$.

D2.44. Jest to w istocie ten sam dowód co w zadaniu D2.43.

D2.45. $a \vee (\sim a) = 1$, $a \wedge (\sim a) = 0$, $(\sim a) \vee (\sim \sim a) = 1$, $(\sim a) \wedge (\sim \sim a) = 0$. Teraz wystarczy skorzystać z przemienności działań.

D2.46. Udowodnimy pierwszą równość. W oparciu o zadanie D2.44 wystarczy udowodnić, że

1° $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q) = 1$, $\quad 2^\circ$ $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q) = 0$.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q) &= [p \vee (\sim p \vee \sim q)] \wedge [q \vee (\sim p \vee \sim q]) = \\ &= [(p \vee \sim p) \vee \sim q] \wedge [(q \vee \sim q) \vee \sim p] = \\ &= [1 \vee \sim q] \wedge [1 \vee \sim p] = 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ\ (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q) &= [(p \wedge q) \wedge \sim p] \vee [(p \wedge q) \wedge \sim q] = \\ &= [(p \wedge \sim p) \wedge q] \vee [(q \wedge \sim q) \wedge p] = \\ &= [0 \wedge q] \vee [0 \wedge p] = 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

D2.47. $\sim' x = \sim x$, $0' = 1$, $1' = 0$. Ideał będzie teraz filtrem. Filtr stanie się ideałem.

D2.48. Uwaga. Choć dowód jest banalny należy zwrócić nań uwagę, bo rozważana algebra ma wielką wagę w zastosowaniach.

D2.49. Dowód tego faktu nie jest banalny. Pokażemy kroki dowodu, to znaczy fakty, jakie muszą być po kolei udowodnione:

a) Jeśli $P \subset Q$, to $X - \mathrm{Cl}\,Q \subset X - \mathrm{Cl}\,P$.

b) Jeśli $P = \mathrm{Int}\,P$, to $P \subset \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,P$.

c) $X - \mathrm{Cl}\,P = X - \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,P$.

d) $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,(P \cup Q) = \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,P \cap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,Q$.

D2.50. Skorzystać z zadania D2.49 b.

D2.51. Załóżmy, że $a = \bigcup_{t \in T} a_t$. Wtedy dla każdego $t \in T$ mamy $a_t \leqslant a$, a więc $\sim a \leqslant \sim a_t$ (na mocy zadania D2.45 drugi punkt).

Załóżmy teraz $q \leqslant \sim a_t$ (dla każdego $t \in T$). Wtedy $\sim q \geqslant \sim \sim a_t$, a więc $\sim q \geqslant a_t$ (dla każdego t). Stąd $\sim q \geqslant \bigcup_{t \in T} a_t$, czyli $\sim q \geqslant a$, a więc $\sim \sim q \leqslant \sim a$ i $q \leqslant \sim a$. Stąd $\sim a$ jest kresem dolnym $\{\sim a_t : t \in T\}$.

D2.52. Aby udowodnić równoważność należy wykazać dwie implikacje.

a) Załóżmy $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F \vee b \in F$. Ponieważ $1 \in F$ (por. zadanie D2.37 b)), i $a \vee \sim a \in F$, więc $a \in F$ lub $\sim a \in F$.

b) Załóżmy $a \in F \vee \sim a \in F$ (dla każdego a), załóżmy ponadto $a \vee b \in F$. Gdyby $a \notin F$ i $b \notin F$, to $\sim a \in F$ i $\sim b \in F$, czyli $\sim a \wedge \sim b \in F$, a więc (na mocy praw de Morgana) $\sim(a \vee b) \in F$, a więc $(a \vee b) \wedge \sim(a \vee b) \in F$, skąd $0 \in F$, a także $a \in F$ i $b \in F$.

D2.53. Dowodzbny twierdzenia odwrotnego: Załóżmy, że filtr F jest maksymalny, tzn. jeśli $F \subset G$ jest filtrem, to $F = G \vee G = A$. Należy udowodnić, że F jest filtrem pierwszym, tzn. że dla każdego $a \in A$; $a \in F \vee \vee \sim a \in F$. Przypuśćmy przeciwnie, to znaczy $a \notin F$ i $\sim a \notin F$. Rozważmy

$$G = \{x : \bigvee_{y \in F} y \wedge a \leqslant x\}.$$

Oczywiście G jest filtrem. Przy tym $F \subset G$ i $a \in G$, skąd $F \neq G$ i $a \in G$. Zatem $F \neq G$ i na mocy maksymalności filtru F mamy $G = a$, czyli $\sim a \in G$. A więc istnieje $y \in F$ takie, że $y \wedge a \leqslant -a$. To oczywiście daje $(y \wedge a) \wedge a \leqslant \leqslant \sim a \wedge a$, czyli $y \wedge a \leqslant 0$. Jeśli tak to oczywiście $y \leqslant \sim a$, ale ponieważ $y \in F$, więc $\sim a \in F$ i otrzymaliśmy sprzeczność.

D2.54. W dowodzie korzystamy z lematu Kuratowskiego-Zorna. Wystarczy udowodnić, że suma łańcucha filtrów właściwych jest filtrem właściwym.

Istotnie, niech W będzie sumą łańcucha $\{F_t\}_{t \in T}$ filtrów właściwych. Jeśli $a, b \in W$, to istnieje t takie, że $a \in F_t$ i $b \in F_t$, co jest równoważne (na mocy F1$\frac{1}{2}$) temu, że $a \wedge b \in F_t$, a więc $a \wedge b \in W$.

Wykazaliśmy więc, że założenia lematu Kuratowskiego-Zorna są spełnione; mamy więc element maksymalny. Jest to żądany filtr.

D2.55. Wskazówka. Jest to drobna modyfikacja dowodu z zadania D2.54. Zamiast rodziny wszystkich filtrów rozważamy jedynie filtry nie zawierające a. Udowadniamy, że rozważany zbiór W nie zawiera a.

D2.56. Udowodnimy, że $f^{-1} * \{1_1\}$ jest filtrem. Załóżmy, że $a, b \in \in f^{-1} * \{1_1\}$, wtedy $f(a) = f(b) = 1_1$, a ponieważ $f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b)$, więc $f(a \wedge b) = 1_1$.

Załóżmy $a \wedge b \in f^{-1} * \{1_1\}$. Wtedy $f(a \wedge b) = 1_1$, czyli $f(a) \wedge_1 f(b) = 1$. Ale $x \wedge y = 1$ pociąga za sobą $x = 1 \wedge y = 1$, a więc $f(a) = 1_1$, $f(b) = 1_1$, czyli $a \in f^{-1} * \{1_1\}$, $b \in f^{-1} * \{1_1\}$.

D2.57. Dowodzimy twierdzenia odwrotnego. Załóżmy, że $h : \mathfrak{a} \rightarrow 2$

17*

jest homomorfizmem Boole'a. Rozważmy $h^{-1} * \{1\}$. Na mocy zadania D2.56 jest to ideał. Należy więc udowodnić, że dla dowolnego $x \in A$, $x \in h^{-1} * \{1\}$ lub $\sim x \in h^{-1} * \{1\}$.

Przypuśćmy przeciwne, wtedy $x \in h^{-1} * \{0\}$ i $\sim x \in h^{-1} * \{0\}$, ale wtedy

$$h(1) = h(x \vee \sim x) = h(x) \vee h(\sim x) = 0 \vee 0 = 0.$$

Jednakże $h(1) \neq 0$, bo h jest homomorfizmem Boole'a.

D2.58. Rozważyć $\{0_a, 1_a\}$.

D2.59. Jest rzeczą oczywistą, że warunek jest wystarczający, ponieważ wartościowanie formuły jest w istocie wartościowaniem w algebrę Boole'a $2 = \{0, 1\}$.

Dowód konieczności. Gdyby tak nie było, to byłaby algebra Boole'a $\mathfrak{a}$, i wartościowanie v takie, że przy tym wartościowaniu wartość zdania φ byłaby równa a dla pewnego $a \neq 1$. Korzystając z zadania D2.55 mamy filtr maksymalny F w algebrze $\mathfrak{a}$ taki, że $a \notin F$. Na mocy zadania D2.57 istnieje homomorfizm algebry $\mathfrak{a}$ w 2 taki, że $h(a) = 0$. To pozwala nam skonstruować wartościowanie v_1 wyrażenia φ w algebrę Z takie, że $\bar{v}_1\varphi = 0$.

D2.60. Zauważyć, że warunek I$1\frac{1}{2}$ jest dualny do F$1\frac{1}{2}$.

D2.61. Zwrotność i symetria są banalne. Przechodniość wynika z wielokrotnego zastosowania rozdzielności. W zbiorze $\{[x] : x \in A\}$ definiujemy działania wzorami:

$$[a] \wedge_1 [b] = [a \wedge b], \quad [a] \vee_1 [b] = [a \vee b], \quad \sim_1 [a] = [-\sim a].$$

Łatwo sprawdzić, że definicje nie zależą od wyboru reprezentantów.

D2.62. Dowód jest dokładnym naśladownictwem przerabianego w algebrze tzw. pierwszego twierdzenia o izomorfizmie.

D2.63. Uwaga. Zauważyć, że jest to szczególny przypadek zadania D2.64, gdzie $T = \{1, 2\}$ z tym, że zamiast algebry $\mathfrak{a}_2$ bierzemy algebrę dualną do $\mathfrak{a}_2$.

D2.64. Uwaga. Z zadania można dodatkowo wyprowadzić wnioski: Iloczyn uogólniony krat jest kratą.

Jeżeli wszystkie czynniki są modularne, to i iloczyn jest modularny, podobnie z rozdzielnością. (Łatwo zresztą widzieć, że i na odwrót).

D2.65. W rozważanej algebrze atomami są zbiory jednoelementowe $\{t\}$ dla $t \in X$. Jeśli więc $U \in \mathscr{P}(X)$ i $U \neq 0$, to dla dowolnego $t \in U$ zachodzi $\{t\} \subset U$. Jeśli natomiast zbiór X jest pusty, to twierdzenie jest oczywiste.

D2.66. Można to udowodnić wprost, ale następujący dowód nieefektywny jest krótki: niech $0 \neq x \in A$, rozważmy $[x]$ filtr główny wyznaczony przez x. Rozważmy dowolny filtr G maksymalny właściwy zawierający $[x]$ jako podzbiór (patrz zadanie D2.54). Na mocy zadania D2.39 filtr G jest główny. Niech $G = [t]$, łatwo widzieć, że t jest atomem i $t \leqslant x$.

D2.67. Oczywiście h zachowuje działanie. Aby udowodnić izomorfizm wystarczy pokazać różnowartościowość.

Niech $a \neq b$. Można założyć, że $a \wedge {\sim} b \neq 0$, a zatem że jest atom $t \leqslant a \wedge {\sim} b$. Ale wtedy $t \in h(a)$ i $t \notin h(b)$.

Zauważyć, że zupełność interweniuje w dowodzie, że h jest odwzorowaniem „na". Stąd też możemy wywnioskować następujące twierdzenie: Każda atomowa algebra Boole'a $\mathfrak{a}$ jest izomorficzna z podalgebrą algebry $\langle \mathscr{P}(At), \cap, \cup, -, O, At \rangle$, gdzie At jest zbiorem atomów algebry $\mathfrak{a}$.

D2.68. Ponieważ algebra $\mathfrak{a}$ jest skończona, więc jest zupełna i atomowa; a zatem izomorficzna z ciałem wszystkich podzbiorów swego zbioru atomów.

D2.69. Załóżmy, że a jest atomem, i $x \notin [a]$, to znaczy $x \wedge a = 0$, wtedy ${\sim} x \wedge a$ nie może być równe 0, bo mielibyśmy

$$(x \wedge a) \vee ({\sim} x \wedge a) = a = 0.$$

A więc ${\sim} x \wedge a = 0$, czyli $a \leqslant {\sim} x$.

D2.71. a) Załóżmy, że $F \in X_{a \wedge b}$, skąd $a \wedge b \in F$ na mocy $F1\frac{1}{2}$ mamy $a \in F$ i $b \in F$, czyli $F \in X_a$ i $F \in X_b$, a więc $X_{a \wedge b} \subset X_a \cap X_b$.

Załóżmy $F \in X_a \cap X_b$. Wtedy $a \in F$ i $b \in F$, czyli $a \wedge b \in F$, a więc $F \in X_{a \wedge b}$ i $X_a \cap X_b \leqslant X_{a \wedge b}$.

b) $F \in X_a \cup X_b$ jest równoważne $F \in X_a \vee F \in X_b$, czyli $a \in F$ lub $b \in F$, skąd $a \vee b \in F$, czyli $F \in X_{a \vee b}$.

Jeśli $F \in X_{a \vee b}$, to $a \vee b \in F$, ale F jest filtrem pierwszym; stąd $a \in F$ lub $b \in F$, czyli $F \in X_a \vee F \in X_b$, a więc $F \in X_a \cup X_b$.

c) Jeśli $F \in X - X_a$, to $F \notin X_a$, czyli $a \notin F$, to zaś na mocy założenia, że filtr F jest pierwszy, zapewnia nam, że ${\sim} a \in F$, czyli $F \in X_{\sim a}$. Jeśli $F \in X_{\sim a}$, to ${\sim} a \in F$. Ponieważ filtr jest właściwy, więc $a \notin F$, czyli $F \notin X_a$.

D2.72. Zauważyć, że zbiory X_a są otwarto domknięte. Jeśli a i b są różne, to jeśli $a \wedge {\sim} b \neq 0$, to istnieje ideał pierwszy zawierający a i nie zawierający b.

D2.73. Jest to konsekwencja konstrukcji opisanej w zadaniach D2.71 i D2.72. Twierdzenie to nazywa się twierdzeniem Stone'a.

D2.74. Istotnie, jeśli a jest atomem, to nie ma $x \neq 0$, $x \neq a$ takiego, że $0 \leqslant x \leqslant a$.

D2.75. Oczywiście $a \dot{-} b = b \dot{-} a$. Dowód łączności dodawania i rozdzielności mnożenia względem dodawania także nie jest trudny. Odejmowaniem jest tu to samo działanie co dodawanie. Istotnie,

$$a+a = a+a^2 = a^2+a^2+a^2+a^2 = (a+a)+(a+a),$$

stąd

$$a+a = 0.$$

D2.76 Dla przykładu sprawdzimy rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$a \cdot'(b+'c) = a \cdot'(b+c-2bc) = a \cdot b+a \cdot c-2abc = a \cdot b+a \cdot c-2a^2bc =$$
$$= a \cdot b+a \cdot c-2(ab) \cdot (ac) = (a \cdot' b) = (a \cdot' c).$$

D2.77. Sprawdźmy, że $a \wedge (a \vee b) = a$;

$$a \wedge (a \vee b) = a \cdot (a+b+ab) = a^2+ab+a^2b = a+ab+ab = a,$$

bo $ab+ab = 0$.

D2.78. Dowodzimy przez indukcję ze względu na stopień komplikacji:

a) Zmienne, 0, 1 są wielomianami normalnymi.

b) Załóżmy, że dla wielomianów f i g potrafimy znaleźć wielomiany normalne f_1 i g_1 odpowiednio równe.

Dla wielomianu $f \vee g$ jest to wielomian $f_1 \wedge g_1$. Dla wielomianu $f \wedge g$ powstaje on z $f_1 \wedge g_1$ przez wielokrotne stosowanie rozdzielności. Podobnie dla $\sim f$: tu stosujemy najpierw prawa de Morgana, a potem rozdzielność.

D2.79. Relacja $\varphi \sim \psi$, która zachodzi jeżeli $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią, jest relacją równoważności. Jej klasy abstrakcji tworzą algebrę Boole'a. Zadanie 1.80 jest szczególnym przypadkiem zadania D2.78 dla tej algebry Boole'a.

D2.80. Oczywiście 0, 1 są elementami booleowskimi. Jeśli a i b są elementami booleowskimi, to $(a \wedge b) \vee (\sim a \vee \sim b) = 1$, zaś $(a \wedge b) \wedge (\sim a \vee \sim b) = 0$. (Porównaj zadania D2.43, D2.46).

Analogicznie dowodzimy, że $a \vee b$ jest elementem booleowskim. Jeśli a jest booleowskie, to $\sim a$ też, bo $\sim\sim a = a$.

D2.81. Jeśli $t = \langle x_1 \dots x_n \rangle$ i $x_1 \geqslant \dots \geqslant x_n$, zaś u jest uzupełnieniem t, $u = \langle y_1 \dots y_n \rangle$, to $x_1 \cup y_1 = \dots = x_n \cup y_n = 1$, $x_1 \cap y_1 = \dots = x_n \cap y_n = 0$, a zatem $y_1 = -x_1, \dots, y_n = -x_n$, ale wtedy $y_1 \leqslant y_2 \dots \leqslant y_n$. Ponieważ równocześnie $y_1 \geqslant \dots \geqslant y_n$, to $y_1 = \dots = y_n$ i $x_1 = \dots = x_n$. Teraz już widać, że odwzorowanie $x \to \langle x, \dots, x \rangle$ jest izomorfizmem $\mathscr{B}$ i zbioru elementów booleowskich w P.

D2.82. Nie, nie musi bowiem zawierać 0 bądź 1. Na przykład niech $\mathfrak{a} = \langle \mathscr{P}(\mathscr{N}), \cap, \cup, -, O, \mathscr{N} \rangle$. Niech $\mathscr{L} = \langle \mathscr{P}(\mathrm{Par}), \cap, \cup \rangle$, wtedy $\mathscr{L}$ jest podkratą kraty $\langle \mathscr{P}(\mathscr{N}), \cap, \cup \rangle$, ale $\langle \mathscr{P}(\mathrm{Par}), \cap, \cup, -, O, \mathrm{Par} \rangle$ nie jest podkratą Boole'a algebry $\mathfrak{a}$.

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1] A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1969.
[2] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1971.
[3] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Warszawa 1966.
[4] R. Lyndon, *O Logice Matematycznej*, Warszawa 1968.
[5] A. I. Мальцев, *Алгорифмы и рекурсивные функции*, Москва 1968.
[6] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic**, Princeton 1964.
[7] A. Mostowski, *Logika matematyczna*, Warszawa 1948.
[8] A. W. Mostowski, Z. Pawlak, *Logika matematyczna dla inżynierów*, Warszawa 1970.
[9] Z. Moszner, *O teorii relacji*, Warszawa 1967.
[10] J. Onyszkiewicz, *Wiadomości z teorii zbiorów*, Warszawa 1971.
[11] A. Pogorzelski, J. Słupecki, *O dowodzie matematycznym*, Warszawa 1962.
[12] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1971.
[13] H. Rasiowa, R. Sikorski, *Mathematics of the Metamathematics**, Warszawa 1970.
[14] A. Robinson, *Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra**, Amsterdam 1963.
[15] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Reading 1967.
[16] W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Warszawa 1965.
[17] W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, Warszawa 1928.
[18] R. Sikorski, *Boolean Algebras**, Berlin–Heidelberg–New York 1964.
[19] J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1963.
[20] T. Traczyk, *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, Warszawa 1970.
[21] S. Winogradow, A. Kuźmin, *Logika*, Warszawa 1951.

---

* Pozycje oznaczone gwiazdką były tłumaczone na język rosyjski.

SPIS WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI I OZNACZEŃ

$\mathscr{N}$ — zbiór liczb naturalnych
Par — zbiór liczb naturalnych parzystych
NPar — zbiór liczb naturalnych nieparzystych
$\mathscr{X}$ — zbiór liczb całkowitych
$\mathscr{W}$ — zbiór liczb wymiernych
$\mathscr{W}^+$ — zbiór liczb wymiernych nieujemnych
$\mathscr{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych
$\mathscr{R}^+$ — zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$\mathscr{C}$ — zbiór liczb zespolonych
$\mathscr{N}[x]$ — zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach naturalnych
$\mathscr{C}[x]$ — zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych
$\mathscr{W}[x]$ — zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach wymiernych
$\mathscr{R}[x]$ — zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych
$\mathscr{R}_n[x]$ — zbiór wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych stopnia co najwyżej n
$\mathscr{C}_\infty[x]$ — zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej posiadających pochodne dowolnie wysokich rzędów
Z_k — pierścień reszt modulo k
(a, b) — odcinek obustronnie otwarty o końcach a i b
$\langle a, b)$ — odcinek lewostronnie domknięty o końcach a i b
$(a, b\rangle$ — odcinek prawostronnie domknięty o końcach a i b
$a|b$ — relacja podzielności (a dzieli b)
NWD — największy wspólny dzielnik
NWW — najmniejsza wspólna wielokrotność
$\mathrm{Im}\, x$ — część urojona x
$\mathrm{Re}\, x$ — część rzeczywista x
$E[x]$ — część całkowita liczby x

SKOROWIDZ WAŻNIEJSZYCH TERMINÓW

SPIS TREŚCI