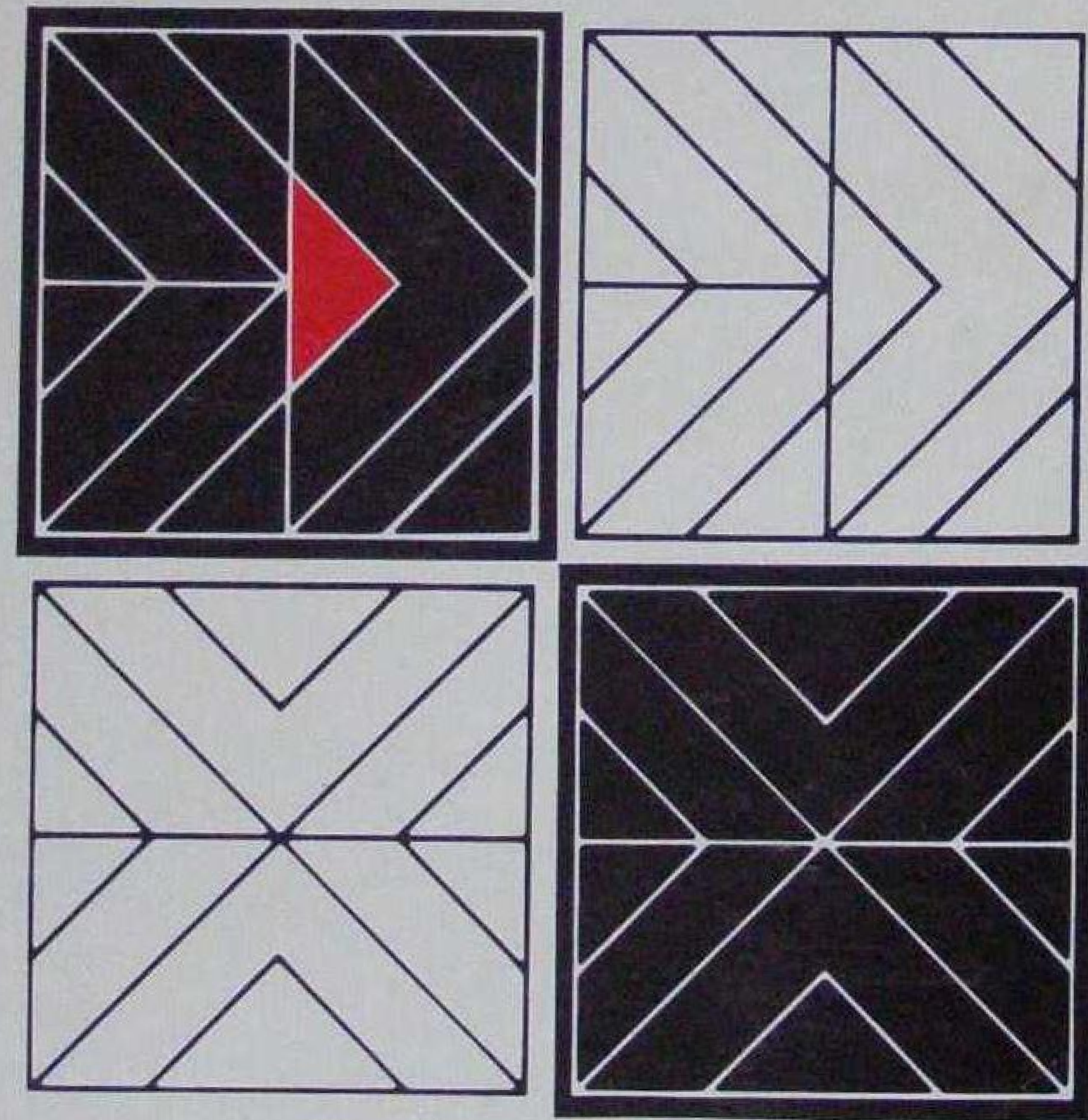
Przez całe wieki logika należała do dyscyplin, których nauczanie pozostawało tylko nieznacznie w tyle w stosunku do aktualnego stanu badań. Jeszcze pół wieku temu perspektywy otwierające się przed logiką (i całą nauką) w związku ze skonstruowaniem przez Jana Łukasiewicza logik wielowartościowych bywały przedmiotem rozmów towarzyskich w kręgach intelektualistów. Dziś natomiast przeciętny student nic zgoła nie wie o logikach wielowartościowych, intuicjonizmie czy rachunkach modalnych Lewisa – osiągnięciach logiki sprzed lat z górą pięćdziesięciu. Z każdym rokiem pogłębia się rozziew między aktualnym stanem badań a przeciętnym poziomem wiedzy logicznej. Podręcznik, który dajemy Czytelnikowi do rąk, ma służyć przybliżeniu podstawowych zagadnień logiki formalnej szerszemu gronu słuchaczy szkół wyższych, zwłaszcza studentom kierunków humanistycznych.

(*Z Przedmowy*)

ISBN 83-01-09980-1

Małgorzata Porębska
Wojciech Suchoń

Elementarne wprowadzenie w logikę formalną



Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Projekt okładki
Cecylia Staniszewska

Redaktor
Maria Szymaniak

Redaktor techniczny
Anna Grzegorowska

Korektor
Zygmunt Stolarski

Tytuł dotowany przez
Ministra Edukacji Narodowej

ISBN 83-01-09980-1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Wydanie I. Ark. wyd. 14,75. Ark. druk. 16,25. Papier offsetowy kl. III, 61 × 86 cm. Oddano do składania w lutym 1990 r. Podpisano do druku w czerwcu 1991 r. Druk ukończono w lipcu 1991 r. Zam. 0129.

ZAKŁAD GRAFICZNY WYDAWNICTW NAUKOWYCH
Łódź, ul. Żwirki 2

Przedmowa

Osiągnięcia logiki formalnej – najważniejszego i ciągle dynamicznie rozwijającego się działu logiki – są na ogół nieznane szerokim kręgom ludzi wykształconych, zwłaszcza – humanistycznie. Przyczyny tego stanu rzeczy należy z jednej strony szukać w programach szkół średnich i wyższych, z drugiej zaś w profilu dostępnej literatury przedmiotu.

Zazwyczaj podręczniki do logiki albo koncentrują się na innej problematyce, logikę formalną traktując marginalnie, albo prezentują jej dokonania przy użyciu skomplikowanego aparatu matematycznego, zakładającego wysoki stopień przygotowania czytelników. Jest jeszcze trzeci typ podręcznika: książka o logice formalnej adresowana do humanistów. Tu jednak wykład ogranicza się najczęściej do prezentacji logiki klasycznej.

Przez całe wieki logika należała do dyscyplin, których nauczanie pozostawało tylko nieznacznie w tyle w stosunku do aktualnego stanu badań. Jeszcze pół wieku temu perspektywy otwierające się przed logiką (i całą nauką) w związku ze skonstruowaniem przez Jana Łukasiewicza logik wielowartościowych bywały przedmiotem rozmów towarzyskich w kręgach intelektualistów. Dziś natomiast przeciętny student nic zgoła nie wie o logikach wielowartościowych, intuicjonizmie czy rachunkach modalnych Lewisa – osiągnięciach logiki sprzed lat z górą pięćdziesięciu. Z każdym rokiem pogłębia się rozziew między aktualnym stanem badań a przeciętnym poziomem wiedzy logicznej. Podręcznik, który dajemy Czytelnikowi do rąk, ma służyć przybliżeniu podstawowych zagadnień logiki formalnej szerszemu gronu słuchaczy szkół wyższych, zwłaszcza studentom kierunków humanistycznych. Powstał on jako rozszerzenie przygotowanego dla

Wydawnictwa Uniwersytetu Jagiellońskiego skryptu pt. „Elementy logiki formalnej dla studentów kierunków humanistycznych" i jest zapisem kursu logiki realizowanego przez autorów kilka lat z rzędu na różnych kierunkach studiów.

W podręczniku przedstawiamy pięć podstawowych rachunków logicznych:

- klasyczny rachunek zdań,
- intuicjonistyczny rachunek zdań,
- trójwartościowy rachunek zdań Łukasiewicza,
- modalny rachunek zdań S4 Lewisa,
- klasyczny węższy rachunek predykatów.

Wykład każdego z nich przebiega według tego samego schematu, na który składają się cztery zagadnienia:

- opis języka symbolicznego danego rachunku,
- jego opis semantyczny,
- jego ujęcie syntaktyczne jako systemu aksjomatycznego,
- porównanie wersji semantycznej i syntaktycznej w tzw. twierdzeniu o pełności.

Staraliśmy się usilnie, by wykład prowadzić przy użyciu środków najprostszych, nie zakładając, że Czytelnik posiada jakąkolwiek wiedzę logiczną. Dlatego w rozdziale I przedstawiamy ogólne wiadomości o użytej w toku wykładu aparaturze pojęciowej i wyjaśniamy szczegółowo jego schemat. Liczymy jednak na to, że Czytelnik zna ze szkoły średniej pojęcie funkcji, relacji, ideę dowodu wprost i niewprost oraz zasadę indukcji matematycznej.

Regułą jest przedstawianie pełnych dowodów poszczególnych lematów i twierdzeń oraz ilustrowanie omawianych technik sprawdzania i dowodzenia szeregiem wyczerpująco komentowanych przykładów. Czasem jednak łatwe, lecz zajmujące wiele miejsca fragmenty dowodów lub nawet całe dowody bliźniaczo podobne do już przeprowadzonych – pomijamy. Gorąco w tym miejscu zachęcamy Czytelnika, by starał się samodzielnie wypełnić wszystkie luki tekstu.

Jak należy korzystać z podręcznika, w jakiej kolejności studiować poszczególne rachunki? Wydaje się, że najkorzystniejsze jest czytanie rozdziałów po kolei, od pierwszego do ostatniego, choćby z tej przyczyny, że w kolejnych rozdziałach narastają komplikacje techniczne. Drugą ważną przyczyną jest sukcesywne porównywanie ze sobą prezentowanych logik.

Na końcu podręcznika znajdzie Czytelnik materiał do ćwiczeń własnych. Byłoby bardzo wskazane, gdyby lekturze poszczególnych partii tekstu towarzyszyło rozwiązywanie związanych z nimi zadań. Czytelnik, który pójdzie za naszą radą, ma większą szansę wyrobienia sobie właściwych intuicji na gruncie każdego z opisanych rachunków logicznych.

Elementarny charakter pracy, jak i fakt pomieszczenia w niej wyłącznie powszechnie znanych wyników, skłoniły nas do zrezygnowania ze zbędnych w takim kontekście przypisów o charakterze bibliograficznym czy historycznym. Pewne informacje pozwalające ulokować w czasie podstawowe etapy rozwoju danego rachunku zostały zresztą podane we wstępach do poszczególnych rozdziałów. Aby ułatwić Czytelnikowi wyjście poza materiał przez nas uwzględniony, przytoczymy listę kilku prac o charakterze monograficznym, które – naszym zdaniem – dają pełniejszy wgląd we współczesną logikę formalną:

1. W. A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań*, Warszawa 1975.
2. A. Heyting, *Intuitionism*, Amsterdam 1966.
3. N. Rescher, *Many-valued logic*, New York 1969.
4. R. Feys, *Modal logics*, Paris 1965.
5. W. A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów*, Warszawa 1981.

Pozostaje nam jeszcze przekazać wyrazy wdzięczności tym wszystkim, którzy w jakikolwiek sposób przyczynili się do powstania tej książki. Dziękujemy więc przede wszystkim pierwszym słuchaczom, czytelnikom i krytykom tekstu – naszym Studentom z Wydziału Filozoficzno-Historycznego UJ. Dziękujemy serdecznie naszym Koleżankom i Kolegom z Zakładu Logiki IF UJ za życzliwą atmosferę w pracy i za to, że przez tyle lat dzielili się z nami swą wiedzą i doświadczeniem dydaktycznym. Dziękujemy Recenzentowi za uwagi, które pozwoliły nam ulepszyć przedkładany Czytelnikowi tekst. W końcu dziękujemy również naszym rodzinom za bezmiar okazanej cierpliwości.

Autorzy

Kraków, 21 marca 1987 r.

Małgorzata Porębska
Wojciech Suchoń

Elementarne wprowadzenie w logikę formalną

Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Warszawa 1991

Rozdział I

Rachunek logiczny

Powodem, a zarazem celem, dla którego konstruujemy rachunki logiczne, jest analiza poprawności rozumowań przeprowadzonych w języku naturalnym. Podstawową własnością rozumowania poprawnego jest *zachowywanie prawdy*: rozumowanie poprawne musi kończyć się prawdziwą konkluzją, o ile wszystkie przesłanki leżące u jego podstaw były prawdziwe.

Prawdziwość jest cechą niektórych tylko, poprawnie pod względem gramatycznym zbudowanych zdań (lub równoważników zdań) języka naturalnego. O zdaniach tych mówimy, że ich wartość logiczną stanowi prawda – rozumiana najczęściej jako zgodność sądu w nich wyrażonego z rzeczywistością. Pozostałym zdaniom języka naturalnego albo przysługuje wartość logiczna inna niż prawda, albo nie przysługuje im żadna wartość logiczna. Dla potrzeb logiki wyodrębniamy spośród ogółu poprawnych gramatycznie wypowiedzi języka naturalnego tzw. zdania w sensie logiki. Zbiór ten tworzą te i tylko te wypowiedzi, które podlegają ocenie logicznej. Należą doń np. w pełni dookreślone zdania oznajmujące, a nie należą zdania rozkazujące i pytajne. Logikę przede wszystkim interesują te rozumowania, w których wszystkie przesłanki i wniosek są zdaniami w sensie logiki.

Bogactwo języka naturalnego sprawia, że można w jego obrębie przeprowadzić nieskończenie wiele rozumowań, różniących się między sobą zarówno treścią, jak i formą. Jednakże z punktu widzenia logiki różnice treściowe są mniej istotne niż różnice w formie rozumowań, toteż logika, abstrahując od różnic treściowych, utożsamia rozumowania przebiegające wedle tego samego schematu. Analiza poprawności rozumowań prowadzona środkami logiki koncentruje się wyłącznie na ich strukturze: ma na celu ustalenie związków między kształtem (budową) przesłanek a kształtem wniosku z nich wyprowadzonego.

By analizę tę prowadzić konsekwentnie i przejrzyście odnotowywać jej wyniki, logika stosuje języki symboliczne. Beztreściowy język symboliczny umożliwia bowiem precyzyjne odtworzenie struktury rozumowań i czyni łatwiejszym dostrzeżenie formalnych powiązań między przesłankami a wnioskiem.

§ 1. Język rachunku logicznego

Język symboliczny, zwany także językiem rachunku logicznego, konstruuje się stopniowo, rozpoczynając od wyboru symboli pierwotnych stanowiących **alfabet języka**. Następnym krokiem jest zdefiniowanie pojęcia **wyrażenia** tego języka, a ostatnim – wskazanie wśród wszystkich możliwych wyrażeń – **wyrażeń sensownych**.

Zanim przystąpimy do budowy języka symbolicznego, musimy jasno zdać sobie sprawę z tego, które z wyrazów lub zwrotów języka naturalnego chcemy uczynić przedmiotem badania. Jego celem jest określenie roli tych wyrazów (zwrotów) w konstrukcji zdań i skodyfikowanie sposobów ich użycia w budowie poprawnych rozumowań. Są to zazwyczaj słowa często pojawiające się w naszych wypowiedziach i mające charakterystyczny wpływ na ich strukturę. Zaliczamy do nich m.in. spójniki zdaniowe (np. „i", „lub", „nieprawda, że"), zwroty kwantyfikujące (np. „każdy", „żaden", „pewien"), zwroty modalne (np. „konieczny", „możliwy"), zwroty deontyczne (np. „nakazany", „zakazany", „dozwolony"), zwroty temporalne (np. „wcześniej", „później") itd. Dla analizy każdej ze wspomnianych grup wyrażeń tworzy się stosowny język symboliczny. W jego alfabecie muszą się znaleźć przede wszystkim symbole odpowiadające tym wyróżnionym zwrotom języka naturalnego. Symbole te nazywać będziemy **stałymi logicznymi** danego języka. Jest ich zazwyczaj niewiele. Nadmierne rozbudowywanie zbioru stałych logicznych sprawia, że język symboliczny traci swą przejrzystość.

Drugą grupę symboli alfabetu języka rachunku logicznego tworzą tzw. **zmienne**. Pełnią one rolę argumentów stałych logicznych i współtworzą wraz z nimi wyrażenia bardziej złożone. Zmienne takie mogą być różnych rodzajów. Zbiór zmiennych danego rodzaju z reguły jest

przeliczalnie nieskończony, co umożliwia każdorazowe odróżnienie wypowiedzi o podobnej strukturze, ale o odmiennej treści.

Zwykle pojawia się w alfabecie języka symbolicznego jeszcze trzecia, pomocnicza grupa symboli pełniących rolę znaków interpunkcyjnych. Zapewniają one jednoznaczność złożonych wyrażeń języka symbolicznego i wykluczają tym samym możliwość pojawienia się w nim tak często spotykanych w języku naturalnym *amfibolii* (tj. wieloznaczności wywołanych niedookreśloną strukturą wypowiedzi).

Wyrażeniami języka rachunku logicznego są dowolne skończone ciągi symboli alfabetu tego języka. Oczywiście, nie wszystkie wyrażenia są odpowiednikami sensownych konstrukcji języka naturalnego. Zdaniom w sensie logiki odpowiadają tylko te spośród wyrażeń języka symbolicznego, które zbudowane są zgodnie ze swoistymi dla danego języka symbolicznego regułami sensu. Reguły te, pełniące rolę gramatyki języka symbolicznego, formułowane są w postaci dyrektyw zestawiania symboli alfabetu. Są to przepisy czysto strukturalne, uzależniające sensowność wyrażeń nie od możliwości ich interpretacji w języku naturalnym, lecz wyłącznie od spełnienia precyzyjnie określonych wymogów formalnych. Pozwalają one jednoznacznie rozstrzygnąć kwestię sensowności każdego wyrażenia języka symbolicznego.

Dowolne wyrażenia sensowne – zwane inaczej **formułami** – w każdym z rozważanych języków symbolicznych oznaczać będziemy małymi literami alfabetu greckiego: α, β, γ,... (ewentualnie ze wskaźnikami: α_1, α_2, α_3,...). Dużych liter greckich: Φ, Ψ, Ω,... używać będziemy do oznaczania zbiorów formuł. Symbol Σ zastrzegamy dla zbioru wszystkich formuł danego języka symbolicznego

§ 2. Wartościowania

Każde zdanie w sensie logiki podlega ocenie logicznej i może mu być przypisana wartość logiczna. Jej wybór w konkretnym przypadku zależy od tego, czy sąd wyrażony w zdaniu jest zgodny z rzeczywistością. Wartości logiczne niektórych zdań języka naturalnego są wzajemnie powiązane. Związek ten może np. polegać na tym, że wartości zdań prostszych determinują wartość wypowiedzi bardziej złożonej, w skład której wchodzą.

Proces przypisywania wartości logicznej zdaniom języka naturalnego ma swój odpowiednik na gruncie języka rachunku logicznego.

Jest nim określenie funkcji zwanej wartościowaniem. Funkcja ta każdemu wyrażeniu sensownemu rozważanego języka przypisuje jedynkę (**1**), bądź zero (**0**). Definicja tej funkcji w określony i dla każdego z dalej przedstawionych rachunków charakterystyczny sposób uzależnia wartości przypisywane formułom bardziej skomplikowanym od wartości formuł o prostszej strukturze. Dlatego nie każde odwzorowanie zbioru Σ w zbiór złożony z **1** i **0** jest wartościowaniem. W każdym z rozważanych rachunków logicznych na funkcję wartościowania nałożone są bowiem specyficzne ograniczenia.

Jeśli wartościowanie v przypisuje formule α wartość **1** (symbolicznie: $v(\alpha) = \mathbf{1}$), mówimy, że formuła α jest **prawdziwa** przy wartościowaniu v. Jeżeli natomiast $v(\alpha) = \mathbf{0}$, mówimy wtedy, że formuła α jest **nieprawdziwa** przy wartościowaniu v.

W przypadku każdego z dalej prezentowanych rachunków logicznych możliwe jest określenie nieskończenie wielu różnych wartościowań. Sytuacja taka jest wynikiem przyjęcia w ich alfabetach nieskończonych zbiorów zmiennych. Wartość danej formuły może zatem, choć nie musi, różnie się kształtować przy różnych wartościowaniach.

DEFINICJA TAUTOLOGII JEŚLI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH JEST STAŁA I RÓWNA **1**, MÓWIMY, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ.

Formuła, która przy pewnym wartościowaniu przyjmuje wartość **1**, **może być** schematem zdania prawdziwego. Oznacza to, że istnieje prawdziwe zdanie języka naturalnego zbudowane zgodnie ze schematem tej formuły. Natomiast formuła tautologiczna **musi być** schematem zdań prawdziwych. Każde zdanie języka naturalnego oparte na schemacie tautologicznym jest zdaniem prawdziwym.

Istnienie tautologii jest dowodem na to, że oprócz **prawdy faktycznej** (zdania prawdziwego z uwagi na zaistniały stan rzeczy) istnieje **prawda językowa** (nieskończona rodzina zdań prawdziwych opartych na wspólnym, tautologicznym schemacie).

Pojęciem o zasadniczym znaczeniu w analizie rozumowań jest relacja wynikania. Wiąże ona zbiory zdań. Mówimy czasem, że z pewnych stwierdzeń wynikają w postaci wniosków pewne inne stwierdzenia lub że z uznania za prawdziwe określonych zdań wynika uznanie za prawdziwe jakichś innych zdań.

Aby intuicyjne pojęcie wynikania, którym posługujemy się w języku naturalnym, przenieść na grunt rachunku logicznego, musimy zdefiniować i scharakteryzować pomocnicze pojęcie, jakim jest **spełnianie zbioru formuł** (formuły) **przez wartościowanie**.

DEFINICJA SPEŁNIANIA WARTOŚCIOWANIE V SPEŁNIA ZBIÓR FORMUŁ Φ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $v(\alpha) = \mathbf{1}$ DLA DOWOLNEJ FORMUŁY α NALEŻĄCEJ DO ZBIORU Φ.

Zamiast mówić, że wartościowanie v spełnia jednoelementowy zbiór $\{\alpha\}$, mówimy, że wartościowanie v spełnia formułę α.

LEMAT 1 JEŚLI ZBIÓR FORMUŁ Φ ZAWARTY JEST W ZBIORZE FORMUŁ Ψ (symbolicznie: $\Phi \subset \Psi$) ORAZ WARTOŚCIOWANIE V SPEŁNIA ZBIÓR Ψ, TO WARTOŚCIOWANIE V SPEŁNIA ZBIÓR Φ.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \subset \Psi$ oraz że wartościowanie v spełnia zbiór Ψ. Załóżmy niewprost, że v nie spełnia zbioru Φ. Stąd, wobec definicji spełniania, wnioskujemy, że do zbioru Φ należy pewna formuła α, taka że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Ale każda formuła ze zbioru Φ należy do zbioru Ψ. Istnieje więc w zbiorze Ψ formuła, której wartościowanie v przypisuje wartość **0**. Oznacza to, wobec definicji spełniania, że wartościowanie v nie spełnia zbioru Ψ. Sprzeczność z założeniem kończy dowód lematu 1 •

Wykazaliśmy zatem, że jeśli wartościowanie spełnia pewien zbiór formuł, to spełnia też każdy jego podzbiór.

Zbiór nie posiadający żadnego elementu nazywamy **pustym** i rezerwujemy dla niego symbol $\emptyset$.

LEMAT 2 KAŻDE WARTOŚCIOWANIE SPEŁNIA ZBIÓR PUSTY.

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieje wartościowanie v nie spełniające zbioru $\emptyset$. Wobec definicji spełniania istnieje w zbiorze $\emptyset$ formuła α taka, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Sprzeczność z określeniem zbioru pustego kończy dowód lematu 2 •

Pojęcie wynikania na gruncie języka dowolnego rachunku logicznego precyzuje następująca definicja:

DEFINICJA WYNIKANIA ZE ZBIORU FORMUŁ Φ WYNIKA ZBIÓR FORMUŁ Ψ (symbolicznie: $\Phi \models \Psi$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY

KAŻDE WARTOŚCIOWANIE SPEŁNIAJĄCE ZBIÓR Φ SPEŁNIA TEŻ ZBIÓR Ψ.

Wnioskiem z powyższej definicji jest stwierdzenie następujące: ze zbioru formuł Φ nie wynika zbiór formuł Ψ (symbolicznie: $\Phi \not\models \Psi$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie spełniające zbiór Φ, a nie spełniające zbioru Ψ.

Wynikanie formuły α (jednoelementowego zbioru $\{\alpha\}$) ze zbioru formuł Φ może być traktowane jako relatywna tautologiczność formuły α: każde zdanie języka naturalnego oparte na schemacie α jest prawdziwe, o ile były prawdziwe wszystkie zdania zbudowane według schematów formuł ze zbioru Φ. W dalszym ciągu zamiast $\Phi \models \{\alpha\}$ pisać będziemy $\Phi \models \alpha$.

W kilku lematach omówimy te spośród podstawowych własności relacji wynikania, które charakteryzują to pojęcie w sposób ogólny, niezależny od specyfiki konkretnych rachunków logicznych, w ramach których będziemy wracać do pojęcia wynikania. Najpierw wykażemy, że relacja wynikania jest zwrotna i przechodnia:

LEMAT 3 (1) $\Phi \models \Phi$;
(2) JEŻELI $\Phi \models \Psi$ ORAZ $\Psi \models \Omega$, TO $\Phi \models \Omega$.

Dowód. (1) Zwrotność $\models$ wynika bezpośrednio z definicji tej relacji. (2) Załóżmy, że (1) $\Phi \models \Psi$, (2) $\Psi \models \Omega$ oraz że (3) pewne wartościowanie v spełnia zbiór Φ. Z założeń (1) i (3), wobec definicji wynikania, wnioskujemy, że wartościowanie v spełnia zbiór Ψ, a stąd i założenia (2), że spełnia ono także zbiór Ω. Wobec tego, że v było wartościowaniem wybranym dowolnie, konkludujemy, że każde wartościowanie spełniające Φ spełnia też Ω ($\Phi \models \Omega$), co kończy dowód •

Kolejne dwa lematy wiążą pojęcie wynikania z pojęciem tautologii:

LEMAT 4 JEŚLI $\varnothing \models \alpha$, TO α JEST TAUTOLOGIĄ.

Dowód. Załóżmy, że $\varnothing \models \alpha$. Stąd, wobec definicji wynikania i lematu 2, wnioskujemy, że każde wartościowanie spełnia formułę α. Oznacza to, że przy dowolnym wartościowaniu α przyjmuje wartość 1, a zatem α jest tautologią •

LEMAT 5 JEŚLI α JEST TAUTOLOGIĄ, TO DLA DOWOLNEGO ZBIORU FORMUŁ Φ: $\Phi \models \alpha$.

Dowód. Załóżmy, że α jest tautologią i niewprost, że $\Phi \not\models \alpha$. Istnieje więc wartościowanie v spełniające zbiór Φ i nie spełniające formuły α, zatem $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Wniosek ten, sprzeczny z założeniem tautologiczności formuły α, kończy dowód •

Następny lemat mówi, że dowolna formuła wynikająca ze zbioru Φ wynika również z każdego zbioru zawierającego Φ.

LEMAT 6 JEŚLI $\Phi \models \Omega$ I $\Phi \subset \Psi$, TO $\Psi \models \Omega$.

Dowód. Załóżmy, że (1) $\Phi \models \Omega$, (2) $\Phi \subset \Psi$ oraz (3) pewne (dowolnie wybrane) wartościowanie v spełnia zbiór Ψ. Z założeń (2) i (3) oraz z lematu 1 wynika, że v spełnia Φ. Stąd, z założenia (1) i definicji wynikania, wnioskujemy, że v spełnia Ω. Wobec dowolności wyboru v wykazaliśmy, że każde wartościowanie, które spełnia Ψ, spełnia też Ω, a zatem $\Psi \models \Omega$ •

Ostatni z lematów charakteryzujących relację wynikania głosi, że jeśli z pewnego zbioru Φ wynika zbiór formuł Ψ, to z Φ wynika również każdy podzbiór zbioru Ψ.

LEMAT 7 JEŚLI $\Phi \models \Psi$ ORAZ $\Omega \subset \Psi$, TO $\Phi \models \Omega$.

Dowód. Załóżmy, że (1) $\Phi \models \Psi$, (2) $\Omega \subset \Psi$, a nadto że (3) pewne (dowolnie wybrane) wartościowanie v spełnia Φ. Z założeń (1) i (3) oraz definicji wynikania wnioskujemy, że v spełnia Ψ. Stąd wobec lematu 1 i założenia (2) konkludujemy, że v spełnia Ω. Ponieważ wybór v był dowolny, wykazaliśmy więc, że każde wartościowanie spełniające Φ spełnia też Ω, co oznacza, że $\Phi \models \Omega$ •

Rozumowania, zarówno te, które prowadzimy w obrębie dowolnej nauki, jak i pozanaukowe, stanowią ciąg pojedynczych wnioskowań. Na każde wnioskowanie składają się dwa zbiory zdań w sensie logiki: niepusty, zwykle skończony zbiór przesłanek i zbiór jednoelementowy, którego jedyny element nazywamy wnioskiem. W języku naturalnym możemy przeprowadzić nieskończenie wiele różnych wnioskowań. Niektóre z nich przebiegają analogicznie, ponieważ u ich podstaw leży wspólna zasada wnioskowania. Oto przykłady dwóch różnych rozumowań opartych o tę samą zasadę (schemat) wnioskowania.

I. Przesłanka 1: Każdy człowiek jest śmiertelny

Przesłanka 2: Każdy mężczyzna jest człowiekiem
Wniosek: Każdy mężczyzna jest śmiertelny

II. Przesłanka 1: Każdy ptak jest kręgowcem
Przesłanka 2: Każdy orzeł jest ptakiem
Wniosek: Każdy orzeł jest kręgowcem

Oba wnioskowania są uszczegółowieniami jednego i tego samego schematu:

Przesłanka 1: Każde A jest B
Przesłanka 2: Każde C jest A
Wniosek: Każde C jest B

Przenieśmy się teraz na grunt dowolnego rachunku logicznego i zdefiniujmy pojęcie reguły. **Regułą** jest dowolny zbiór par o ustalonym porządku elementów $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$: pierwszym elementem każdej pary składającej się na regułę jest niepusty, skończony zbiór formuł Φ zwany **zbiorem przesłanek**, drugim jest jednoelementowy zbiór zawierający formułę α — **wniosek**. Nie będziemy tu rozważać reguł, które powstają przez przypadkowe zestawienie dowolnie wybranych par $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$. Interesować nas będą tylko takie reguły, na które składają się pary połączone wspólnym schematem. Dla takich reguł istnieje odpowiadający pojęciu wspólnej zasady wnioskowania pewien wspólny schemat podstawowy, a wszystkie pary tworzące regułę są skonstruowane z formuł danego języka zgodnie z tym schematem, czy inaczej mówiąc są uszczegółowieniami tego schematu osiągniętymi przez podstawienie za jego zmienne dowolnych wyrażeń sensownych języka danego rachunku logicznego.

Regułę, która zawiera tylko i wyłącznie wszystkie uszczegółowienia schematu podstawowego, nazywać będziemy **regułą elementarną**.

Wśród nieskończenie wielu reguł na szczególną uwagę zasługują tzw. **reguły normalne**. Cechą charakterystyczną takich reguł jest „dziedziczenie prawdziwości": ilekroć wszystkie przesłanki są zdaniami prawdziwymi, tylekroć wniosek z nich wynikający też jest zdaniem prawdziwym. Dla uściślenia koncepcji reguły normalnej wykorzystamy scharakteryzowane już pojęcie wynikania.

Definicja reguły normalnej REGUŁA JEST NORMALNA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZACHODZI WYNIKANIE: $\Phi \models \alpha$.

Prócz reguł normalnych — zachowujących prawdziwość — rozważać będziemy także reguły zachowujące tautologiczność, tzw. **reguły niezawodne**.

Definicja reguły niezawodnej REGUŁA JEST NIEZAWODNA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA KAŻDEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZAWSZE WTEDY, GDY Φ JEST ZBIOREM TAUTOLOGII, RÓWNIEŻ FORMUŁA α JEST TAUTOLOGIĄ.

W każdym z przedstawionych dalej rachunków logicznych zachodzi ścisły związek między regułami normalnymi i niezawodnymi wyrażony w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1 KAŻDA REGUŁA NORMALNA JEST NIEZAWODNA.

Dowód. Załóżmy niewprost, że istnieje taka reguła normalna, która nie jest niezawodna. Zgodnie z definicją reguły niezawodnej należy do niej para $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ taka, że wszystkie formuły ze zbioru Φ są tautologiami, natomiast α tautologią nie jest. Korzystając z definicji tautologii wnioskujemy, że istnieje wartościowanie v takie, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Wszystkie formuły ze zbioru Φ, jako tautologie są przez wartościowanie v spełnione. Ponieważ nasza reguła z założenia jest normalna, zgodnie z definicją: $\Phi \models \alpha$. Wobec definicji wynikania mamy stąd: $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Sprzeczność przejawiająca się w przypisaniu przez jedno i to samo wartościowanie v formule α równocześnie dwóch różnych wartości kończy dowód ●

W rachunkach logicznych, prezentowanych w kolejnych rozdziałach, między regułami normalnymi i niezawodnymi nie zachodzi związek odwrotny do opisanego w udowodnionym twierdzeniu.

§ 3. System aksjomatyczny

Przedstawiony w paragrafie 2 sposób budowy rachunku logicznego jest wynikiem *semantycznych* badań nad stałymi logicznymi. Badania te prowadzą do definicji funkcji wartościowania i pojęć wobec niej pochodnych, takich jak spełnianie, tautologia, wynikanie itp. Rachunek logiczny opisany semantycznie jest zwykle utożsamiany ze zbiorem swoich tautologii.

Znane są również inne metody konstrukcji rachunku logicznego, wśród nich i takie, które nie odwołują się do żadnych pojęć semantycznych. Nazywamy je *syntaktycznymi*, ponieważ ich podstawę stanowią rozważania dotyczące składni, czyli syntaksy języka danego rachunku logicznego. Syntaktyczny opis rachunków logicznych zazwyczaj przybiera postać systemu aksjomatycznego.

Przystępując do budowy takiego systemu wybieramy spośród ogółu formuł danego języka pewną liczbę wyrażeń sensownych zwanych odtąd **aksjomatami**. Następnie, również dowolnie, ustalamy, które reguły będą stosowane w konstruowanym systemie – są to tzw. **reguły pierwotne**. Wszystkie formuły dające się wyprowadzić przez skończeniekrotne stosowanie reguł pierwotnych do aksjomatów nazywać będziemy **tezami systemu**. Taką właśnie metodę zastosował **Gottlob Frege**, budując w roku 1879 pierwszy system aksjomatyczny rachunku zdań.

Faktycznie wybór aksjomatów i reguł pierwotnych jest dowolny tylko wówczas, gdy nie nakładamy na powstający system jakichś szczególnych zadań. Jeśli natomiast celem budowy systemu aksjomatycznego jest scharakteryzowanie pewnej dziedziny, opis rządzących nią prawidłowości, wówczas dobieramy aksjomaty tak, aby były oczywiste z uwagi na sens, jaki nadajemy im w tej dziedzinie. Może się oczywiście zdarzyć, że intuicja zawiedzie i wybór aksjomatów okaże się nietrafny. Sytuacja taka zaistnieje np. wtedy, gdy wśród tez systemu pojawią się formuły nieadekwatne w stosunku do prawd badanej dziedziny, takie, które przy stosowanej interpretacji przypisywać będą dziedzinie własności *de facto* jej nie przysługujące. W takiej sytuacji trzeba modyfikować zestaw aksjomatów i reguł tak, aby wykluczyć niepożądane formuły ze zbioru tez.

Dowodzenie tez w systemie aksjomatycznym jest na ogół procesem skomplikowanym, nie podlegającym algorytmizacji. Nie jest oczywisty ani jego punkt wyjścia, ani przebieg wyznaczony kolejnością stosowania reguł pierwotnych. Poza tym, gdy wysiłki, by wyprowadzić z aksjomatów pewną formułę, są bezskuteczne, nie potrafimy ustalić, czy przyczyną takiego stanu rzeczy jest brak umiejętności dowodzącego, czy też po prostu dana formuła, nie będąc tezą, dowodu nie posiada. W tej sytuacji naturalne jest dążenie do maksymalnego uproszczenia procedury dowodowej.

Zanim odpowiemy na pytanie, jakie środki stosować, by dowodzenie też stało się możliwie najłatwiejsze, uściślimy pojęcia **tezy** oraz jej **dowodu**.

DEFINICJA TEZY WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ DANEGO SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, ..., \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha(\alpha = \gamma_k)$, A KTÓREGO DOWOLNY WYRAZ JEST
BĄDŹ (1) AKSJOMATEM TEGO SYSTEMU,
BĄDŹ (2) POWSTAŁ Z WYRAZÓW WCZEŚNIEJSZYCH PRZEZ ZASTOSOWANIE KTÓREJŚ Z REGUŁ PIERWOTNYCH SYSTEMU.

Dowód przedstawia się zazwyczaj jako ciąg formuł zapisanych jedna pod drugą w kolejno numerowanych wierszach. Każdy z wierszy zawiera ponadto informację, na jakiej podstawie dana formuła została włączona do dowodu.

Im mniej sposobów dołączania nowych wierszy dowodowych przewiduje definicja tezy, tym trudniej konstruować dowody. Dlatego, dążąc do ułatwienia procedury dowodowej, pytamy o możliwość rozszerzenia zasobu środków dowodowych. Należy jednak zachować daleko idącą ostrożność i akceptować jedynie te nowe sposoby dołączania wierszy dowodowych, które nie rozszerzają systemu, czyli nie pozwalają uznać za tezę żadnej formuły, nie będącej tezą systemu pierwotnego.

Poszukując takich środków zastanówmy się najpierw, czy wcześniej udowodnioną tezę można wpisać do dowodu, tak jak aksjomat. Otóż każdorazowe wprowadzenie do dowodu wiersza zawierającego tezę można zastąpić wprowadzeniem w jego miejsce skończonej sekwencji formuł stanowiących aksjomatyczny dowód tej tezy. W ten sposób dowód wykorzystujący wcześniej udowodnione tezy algorytmicznie przekształcamy w dowód co prawda dłuższy, lecz odwołujący się wyłącznie do pierwotnych środków dowodowych. A zatem korzystanie w dowodach z wcześniej wyprowadzonych tez jest zabiegiem nie rozszerzającym systemu.

Nim omówimy dalsze możliwości upraszczania dowodów, zauważmy, że własność bycia tezą może być zrelatywizowana w sposób analogiczny jak własność bycia tautologią. Możemy mianowicie uzależnić przysługiwanie tej cechy jakiejś formule α od tego, czy przysługuje ona wszystkim formułom z określonego zbioru Φ. Mówimy wówczas o dowiedlności formuły α na gruncie zbioru formuł Φ.

DEFINICJA RELACJI DOWIEDLNOŚCI FORMUŁA α JEST DOWIEDLNA NA GRUNCIE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_d \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST
ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),
ALBO (2) AKSJOMATEM,
ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁ PIERWOTNYCH DANEGO SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO.

Zdefiniowane tu pojęcie dowiedlności formuły na gruncie pewnego zbioru założeń wykorzystamy w definicji reguły wyprowadzalnej danego systemu:

DEFINICJA REGUŁY WYPROWADZALNEJ REGUŁA JEST WYPROWADZALNA W DANYM SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZACHODZI: $\Phi \vdash_d \alpha$).

Wyprowadzalność danej reguły uzasadniamy wykazując, że w każdej należącej do niej parze wniosek jest dowiedlny na gruncie zbioru jej przesłanek. Czy reguły wyprowadzalne można stosować na równi z regułami pierwotnymi, bez obawy rozszerzenia systemu? Okazuje się, że tak. Każde użycie w dowodzie reguły wyprowadzalnej można bowiem wyeliminować na korzyść skończonej sekwencji formuł stanowiących uzasadnienie wyprowadzalności danej reguły, a dokładniej zachodzenie relacji dowiedlności dla jej pewnych, konkretnych par. Innymi słowy, dowód przeprowadzony z wykorzystaniem reguły wyprowadzalnej może być przekształcony w dowód dłuższy, lecz odwołujący się jedynie do środków pierwotnych.

Definicja relacji dowiedlności uzupełniona nowymi środkami dowodowymi przekształca się w definicję kolejnego pojęcia: relacji inferencji, którą (jak się niebawem okaże) możemy uważać za syntaktyczny odpowiednik semantycznej relacji wynikania.

DEFINICJA RELACJI INFERENCJI FORMUŁA α JEST INFEROWALNA ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST
ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),
ALBO (2) AKSJOMATEM LUB TEZĄ,
ALBO (3) POWSTAJE Z PEWNYCH WYRAZÓW WCZEŚNIEJSZYCH PRZEZ ZASTOSOWANIE DO NICH KTÓREJKOLWIEK REGUŁY PIERWOTNEJ BĄDŹ WYPROWADZALNEJ DANEGO SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO.

Wystarczy porównać obie definicje (dowiedlności i inferencji), aby dojść do wniosku, że dowiedlność formuły na gruncie pewnego zbioru formuł jest szczególnym przypadkiem jej inferowalności z tego zbioru. Z drugiej strony jest oczywiste, że każdy ciąg uzasadniający inferowalność danej formuły z pewnego zbioru przekształcić możemy w ciąg uzasadniający jej dowiedlność na gruncie tego zbioru, ponieważ nowe środki dowodowe (tezy i reguły wyprowadzalne) da się łatwo wyeliminować z dowodów na korzyść środków pierwotnych. Istnieje więc obustronna zależność między relacjami dowiedlności i inferencji. Ujmiemy ją w następujący lemat:

LEMAT 8 $\Phi \vdash_d \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \vdash \alpha$.

Inną, równie oczywistą obserwację wysłowimy w kolejnym lemacie, wiążącym pojęcie tezy z pojęciem inferencji.

LEMAT 9 $\emptyset \vdash \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TEZĄ.

Dowód. Załóżmy, że $\emptyset \vdash \alpha$. Wobec lematu 8: $\emptyset \vdash_d \alpha$. Na podstawie definicji relacji dowiedlności wnioskujemy, że gdy zbiór przesłanek jest pusty, wówczas ciąg uzasadniający dowiedlność formuły α jest po prostu dowodem tej formuły. A zatem α jest tezą.

Załóżmy z kolei, że formuła α jest tezą. Wówczas wobec definicji relacji inferencji, jednoelementowy ciąg zawierający wyłącznie α uzasadnia inferowalność tej formuły z pustego zbioru założeń, czyli $\emptyset \vdash \alpha$ •

Zanim w kolejnych lematach omówimy dalsze własności relacji inferencji, przyjmijmy następującą umowę: jeśli każda formuła należąca do zbioru Ψ jest inferowalna ze zbioru założeń Φ, wówczas piszemy: $\Phi \vdash \Psi$.

Relacja inferencji, podobnie jak jej semantyczny odpowiednik (por. lemat 3), jest zwrotna i przechodnia:

LEMAT 10 (1) $\Phi \vdash \Phi$;
(2) JEŻELI $\Phi \vdash \Psi$ ORAZ $\Psi \vdash \Omega$, TO $\Phi \vdash \Omega$.

Dowód. (1) dla dowolnej formuły α ze zbioru Φ jednoelementowy ciąg:

1. α – założenie

stanowi uzasadnienie inferencji $\Phi \vdash \alpha$. A zatem $\Phi \vdash \Phi$.

(2) Załóżmy, że (1) $\Phi \vdash \Psi$, (2) $\Psi \vdash \Omega$, oraz, że (3) $\alpha \in \Omega$. Wobec (2) i (3): $\Psi \vdash \alpha$. Istnieje zatem (por. definicja relacji inferencji) skończony ciąg formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (w którym $\gamma_k = \alpha$) uzasadniający inferowalność α ze zbioru formuł Ψ. Przyjmijmy, że formuły (4) $\beta_1, \ldots, \beta_m$ należące do zbioru Ψ stanowią wszystkie założenia potrzebne do dowodu $\Psi \vdash \alpha$. (**Uwaga**: wobec skończoności ciągu $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ założeń tych jest skończenie wiele). Z (1) i (4) wynika, że $\Phi \vdash \beta_r$ dla dowolnego $r = 1, \ldots, m$. Zatem dla dowolnego r istnieje ciąg $\delta^r_1, \ldots, \delta^r_{n_r}$, uzasadniający inferencję $\Phi \vdash \beta_r$ (a więc $\delta^r_{n_r} = \beta_r$). Z wszystkich tych ciągów tworzymy teraz jeden ciąg Π:

$$(\Pi)\ \underbrace{\delta^1_1, \ldots, \delta^1_{n_1},}_{\text{uzasadnia } \Phi \vdash \beta_1}\ \underbrace{\delta^2_1, \ldots, \delta^2_{n_2},}_{\text{uzasadnia } \Phi \vdash \beta_2} \ldots,\ \underbrace{\delta^m_1, \ldots, \delta^m_{n_m},}_{\text{uzasadnia } \Phi \vdash \beta_m}\ \underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_k}_{\text{uzasadnia } \Psi \vdash \alpha}$$

Jak widać, ciąg Π jest skończony, a jego ostatnim wyrazem jest formuła α. Ponadto każdy z wyrazów tego ciągu jest bądź założeniem ze zbioru Φ, bądź znalazł się w ciągu Π zgodnie z punktami 2, 3 definicji relacji inferencji. A zatem: ciąg Π uzasadnia inferowalność formuły α ze zbioru założeń Φ: $\Phi \vdash \alpha$. Ponieważ α była formułą dowolnie wybraną ze zbioru Ω, a zatem $\Phi \vdash \Omega$, co kończy dowód •

Dowiedziemy w końcu, że gdy pewna formuła jest inferowalna z określonego zbioru, to można ją wyinferować z każdego nadzbioru tego zbioru:

LEMAT 11 JEŚLI $\Phi \subset \Psi$ i $\Phi \vdash \alpha$, TO $\Psi \vdash \alpha$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \subset \Psi$ oraz że $\Phi \vdash \alpha$. Zgodnie z definicją relacji inferencji istnieje skończony ciąg formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ uzasadniający inferowalność α ze zbioru Φ. Ponieważ jednak wszystkie formuły zbioru Φ są zawarte wśród formuł zbioru Ψ, zatem wskazany ciąg $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ równocześnie stanowi uzasadnienie inferowalności α ze zbioru Ψ. Zatem $\Psi \vdash \alpha$ •

W poszukiwaniu innych jeszcze środków dowodowych, którymi moglibyśmy wzbogacać systemy aksjomatyczne, zastanówmy się nad takimi regułami, które nie wyprowadzają poza zbiór tez. Nazywać je będziemy dopuszczalnymi w danym systemie, a precyzyjnie definiować w sposób następujący:

DEFINICJA REGUŁY DOPUSZCZALNEJ REGUŁA JEST DOPUSZCZALNA W DANYM SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA KAŻDEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZACHODZI WARUNEK: JEŚLI ZBIÓR Φ SKŁADA SIĘ WYŁĄCZNIE Z TEZ, TO TAKŻE FORMUŁA α JEST TEZĄ.

W pewnych systemach aksjomatycznych reguły dopuszczalne nie wzbogacają zestawu środków dowodowych w sposób istotny, ponieważ ich zbiór pokrywa się ze zbiorem reguł wyprowadzalnych. Natomiast w każdym systemie aksjomatycznym zachodzi następujący związek między regułami wyprowadzalnymi a dopuszczalnymi:

TWIERDZENIE 2 KAŻDA REGUŁA WYPROWADZALNA W DANYM SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM JEST W NIM DOPUSZCZALNA.

Dowód. Załóżmy niewprost, że w pewnym systemie aksjomatycznym pewna reguła wyprowadzalna nie jest w nim dopuszczalna. Należy więc do niej para $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$, której wszystkie przesłanki (wszystkie elementy zbioru Φ) są tezami, a mimo to wniosek α tezą nie jest (por. definicja reguły dopuszczalnej). Ponieważ rozważana reguła jest z założenia wyprowadzalna, więc zgodnie z definicją: $\Phi \vdash_d \alpha$. Stąd, wobec lematu 8: $\Phi \vdash \alpha$. Z założenia, że wszystkie formuły ze zbioru Φ są tezami oraz z lematu 9, wynika, że $\varnothing \vdash \Phi$, a z przechodniości relacji inferencji (lemat 10) także $\varnothing \vdash \alpha$. A zatem, zgodnie z lematem 9: α jest tezą, co – jako sprzeczne z założeniem – kończy dowód •

§ 4. *Twierdzenie o pełności*

Opisaliśmy dwie metody konstrukcji rachunków logicznych: semantyczną (§ 2) i syntaktyczną (§ 3). Obie właściwymi sobie sposobami analizują i charakteryzują stałe logiczne danego języka symbolicznego. Wynikiem zastosowania metody semantycznej jest wyróżnienie wśród ogółu wyrażeń sensownych danego języka zbioru tautologii. Użycie metody syntaktycznej prowadzi do wyróżnienia zbioru tez w zbiorze wszystkich formuł danego języka. Rachunki logiczne, w zależności od tego, jaką metodą zostały skonstruowane, utożsamiamy z jednym z tych zbiorów.

Często ten sam zbiór tak samo interpretowanych w języku naturalnym stałych logicznych charakteryzujemy obiema metodami. Nasuwa się wtedy pytanie: czy rezultatem obu podejść jest ten sam rachunek, czy może dwa różne. Odpowiedź uzyskamy porównując wyniki obu ujęć: zbiór tautologii ze zbiorem tez. Gdy są to zbiory identyczne, mamy do czynienia z dwoma opisami tego samego rachunku logicznego. Twierdzenie, w dowodzie którego wykazujemy identyczność tych zbiorów, tradycyjnie nosi nazwę twierdzenia o pełności, a formułowane jest następująco:

TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI DLA DOWOLNEGO WYRAŻENIA SENSOWNEGO α OKREŚLONEGO JĘZYKA SYMBOLICZNEGO: α JEST TEZĄ DANEGO SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TAUTOLOGIĄ Z UWAGI NA WSKAZANĄ RODZINĘ WARTOŚCIOWAŃ.

Wypowiedziane tu twierdzenie o pełności jest faktycznie schematem twierdzeń i może być dowodzone tylko na gruncie konkretnego rachunku logicznego. Ponieważ jednak w każdym z dalej prezentowanych pięciu rachunków logicznych dowodzić będziemy twierdzenia o pełności stosując tę samą metodę, możemy tu omówić schemat takiego dowodu.

Schemat dowodu twierdzenia o pełności. Twierdzenie o pełności wymaga dowodu dwuczęściowego, uzasadnić bowiem należy dwa fakty:

I. Każda teza jest tautologią,

II. Każda tautologia jest tezą.

I. Fakt, że każda teza jest tautologią, uzasadniamy, stosując indukcję ze względu na długość dowodu tej tezy mierzoną liczbą wierszy dowodowych. W kroku wstępnym wykazujemy, że każda teza o dowodzie długości 1 (liczącym jeden wiersz) jest tautologią. Takimi tezami są wyłącznie aksjomaty. Należy więc sprawdzić, stosując

metody właściwe dla danego rachunku, że wszystkie aksjomaty są tautologiami. Następnie zakładamy dla indukcji, że wszystkie tezy o dowodach liczących co najwyżej n wierszy są tautologiami, i wykazujemy w kroku indukcyjnym, że każda teza o dowodzie długości $n + 1$ także jest tautologią. Rozumujemy następująco: przypuśćmy, że teza α ma dowód liczący $n + 1$ wierszy. Z założenia indukcyjnego n pierwszych formuł składających się na ten dowód — to tautologie. Pozostaje więc tylko kwestia ostatniej, $n + 1$-szej formuły tego dowodu. Zgodnie z definicją tezy formuła ta jest albo aksjomatem (więc i tautologią — krok wstępny), albo jest wynikiem zastosowania którejś z reguł pierwotnych do wcześniejszych wierszy dowodowych. Należy więc pokazać, że reguły pierwotne są niezawodne, tzn. nie wyprowadzają poza zbiór tautologii. Jeżeli w istocie reguły pierwotne rozważanego systemu aksjomatycznego są niezawodne, wówczas zastosowane do tautologicznych przesłanek dają tautologiczny wniosek, a zatem $n + 1$ wiersz rozpatrywanego dowodu jest tautologią. Zasada indukcji pozwala wnioskować, że wszystkie tezy, niezależnie od długości dowodu, są tautologiami.

Reasumując: aby naszkicowane wyżej rozumowanie powtórzyć dla konkretnego rachunku logicznego, wystarczy sprawdzić, czy wszystkie aksjomaty tego rachunku są tautologiami oraz czy reguły pierwotne systemu są niezawodne.

II. Aby udowodnić, że każda tautologia rachunku logicznego istotnie jest tezą tego rachunku ujętego w formę systemu aksjomatycznego, stosuje się różne techniki. We wszystkich pięciu dalej prezentowanych rachunkach logicznych stale będziemy używać tej samej metody (pochodzącej od **Leona Henkina**), która polega na konstruowaniu dla formuły nie będącej tezą wartościowania świadczącego o tym, że nie jest ona także tautologią. A zatem odwołujemy się do argumentacji niewprost.

Konstrukcja wartościowania obalającego jest dwuetapowa. Najpierw środkami syntaktycznymi wykazujemy istnienie takiego zbioru formuł, do którego nie należy dana nie-teza, a następnie stwierdzamy, że przynależność do tego zbioru jakiejkolwiek formuły złożonej zależy, w charakterystyczny dla danego rachunku sposób, od przynależności doń wszystkich formuł współwyznaczających wartość tej formuły poprzez wartościowania właściwe dla danego rachunku. Analizując funkcję, która wszystkim elementom skonstruowanego zbioru przypisuje wartość **1**, a formułom pozostałym – **0**, dochodzimy do wniosku, że jest ona wartościowaniem obalającym daną nie-tezę, która tym samym okazuje się nie-tautologią.

Definiując zbiór formuł, który umożliwi nam określenie wartościowania obalającego, wykorzystywać będziemy twierdzenie **Güntera Assera**. W wypowiedzi i dowodzie tego twierdzenia używać będziemy dogodnych skrótów: zamiast pisać „formuła α należy do (jest elementem) zbioru Φ" napiszemy: $\alpha \in \Phi$; zamiast „formuła α nie należy do zbioru Φ" pisać będziemy: $\alpha \notin \Phi$.

TWIERDZENIE 3 (O RELATYWNYCH NADSYSTEMACH ZUPEŁNYCH) JEŻELI FORMUŁA α NIE JEST INFEROWALNA Z DANEGO ZBIORU FORMUŁ Ω, TO ISTNIEJE ZBIÓR FORMUŁ Π_Ω^α TAKI, ŻE:

(1) $\alpha \notin \Pi_\Omega^\alpha$;

(2) JEŻELI $\Pi_\Omega^\alpha \vdash \beta$, TO $\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$;

(3) JEŻELI $\beta \notin \Pi_\Omega^\alpha$, TO $\Pi_\Omega^\alpha \cup \{\beta\} \vdash \alpha$;

(4) $\Omega \subset \Pi_\Omega^\alpha$.

Dowód. W języku każdego z dalej prezentowanych rachunków logicznych mamy skończoną liczbę stałych i przeliczalną liczbę zmiennych. W takiej sytuacji z wszystkich wyrażeń sensownych języka (których jest też przeliczalnie wiele) można utworzyć ciąg. Kolejność formuł w tym ciągu jest obojętna, ważne jest tylko, że znajdują się w nim wszystkie formuły danego języka. Przypuśćmy, że $\Sigma^{\rightarrow} = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ jest takim właśnie ciągiem.

Załóżmy, że formuła α nie jest inferowalna ze zbioru $\Omega(\Omega \nvdash \alpha)$. Dla dowodu twierdzenia mamy skonstruować zbiór Π_Ω^α o własnościach opisanych w punktach (1)-(4). Rozpoczniemy od zdefiniowania nieskończonej rodziny (ciągu) zbiorów formuł Π_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ w której

$\Pi_0 = \Omega$

$\Pi_1 = \{\beta : \Omega \vdash \beta\}$ (czyt. Π_1 jest zbiorem tych wszystkich formuł β, które są inferowalne ze zbioru założeń Ω).

Kolejne zbiory tej rodziny powstają z poprzednich oraz z formuł z ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ według następującej dyrektywy:

$$\Pi_{k+1} = \begin{cases} \Pi_k & \text{gdy } \Pi_k \cup \{\gamma_k\} \vdash \alpha \\ \{\beta : \Pi_k \cup \{\gamma_k\} \vdash \beta\} & \text{gdy } \Pi_k \cup \{\gamma_k\} \nvdash \alpha \end{cases}$$

Sprawdźmy, że każdy ze zbiorów Π_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ spełnia następujące trzy warunki:

(i) $\alpha \notin \Pi_k$,

(ii) jeśli $\Pi_k \vdash \beta$, to $\beta \in \Pi_k$,

(iii) $\Pi_k \subset \Pi_{k+1}$.

Warunek (i). Ponieważ założyliśmy, że $\Omega \nvdash \alpha$, zatem $\alpha \notin \Pi_1$. Natomiast dla $k > 1$ także α nie należy do Π_k, gdyż konstruując z już utworzonych kolejne zbiory, włączamy do nich tylko te formuły z ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$, które nie pozwalają na wyinferowanie α.

Warunek (ii). Załóżmy, że $\Pi_k \vdash \beta$. Istnieje zatem skończony ciąg formuł $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ uzasadniający tę inferencję, w którym $\beta_m = \beta$, a wszystkie założenia w nim występujące należą do zbioru Π_k. Przypuśćmy, że założeniami tymi są formuły $\beta_{z_1}, \ldots, \beta_{z_i}$. Zatem ciąg $\beta_1, \ldots, \beta_m$ stanowi uzasadnienie inferencji $\{\beta_{z_1}, \ldots, \beta_{z_i}\} \vdash \beta$. Ze sposobu w jaki został skonstruowany zbiór Π_k wnioskujemy, że istnieje takie $n < k$, że:

$$\Pi_k = \{\delta : \Pi_n \cup \{\gamma_n\} \vdash \delta\},$$

a zatem $\Pi_n \cup \{\gamma_n\} \vdash \{\beta_{z_1}, \ldots, \beta_{z_i}\}$. Relacja inferencji jest przechodnia (lemat 10), a więc $\Pi_n \cup \{\gamma_n\} \vdash \beta$, co wobec określenia zbioru Π_k oznacza, że $\beta \in \Pi_k$.

Warunek (iii). Rozważana rodzina zbiorów została tak zbudowana, że każdy jej kolejny element jest albo identyczny z poprzednim, albo zawiera poprzedni jako swój podzbiór właściwy.

Tworzymy teraz sumę mnogościową wyrazów tego ciągu: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ oraz twierdzimy, że ona właśnie jest tym pożądanym zbiorem Π_Ω^α, który posiada wszystkie własności wyliczone w punktach (1)-(4) dowodzonego twierdzenia. I tak:

(1) $\alpha \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$. Gdyby formuła α należała do tej sumy, to musiałaby być elementem któregoś z jej składników, a to jest wykluczone warunkiem (i).

(2) załóżmy, że $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k \vdash \beta$. Istnieje wówczas skończony ciąg uzasadniający tę inferencję: $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Wszystkie założenia występujące w tym ciągu oznaczmy $\delta_{z_1}, \ldots, \delta_{z_i}$. Wobec faktu, że sumowana

rodzina zbiorów tworzy ciąg rosnący ze względu na relację zawierania (por. (iii)), istnieje najmniejszy zbiór Π_m taki, którego elementami są wszystkie założenia $\delta_{z_1}, \ldots, \delta_{z_i}$. Ciąg $\delta_1, \ldots, \delta_n$ uzasadnia zatem także inferencję $\Pi_m \vdash \beta$. Wobec (ii) oznacza to, że $\beta \in \Pi_m$, i w rezultacie: $\beta \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$.

(3) Załóżmy teraz, że $\beta \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$. Ponieważ formuła β ma swoje miejsce w ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$, istnieje taka liczba naturalna n, że $\gamma_n = \beta$. A zatem $\Pi_n \cup \{\beta\} \vdash \alpha$. Gdyby taka inferencja nie zachodziła, wówczas na mocy konstrukcji rozpatrywanej rodziny zbiorów, formuła β należałaby do zbioru Π_{n+1}, i wobec tego – do całej sumy, co jest sprzeczne z założeniem. Ponieważ $\Pi_n \cup \{\beta\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k \cup \{\beta\}$, możemy korzystając z lematu 11 i wyżej stwierdzonej inferencji wnioskować, że: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k \cup \{\beta\} \vdash \alpha$.

(4) Ponieważ $\Pi_0 = \Omega$, zaś $\Pi_0 \subset \Pi_1$ oraz $\Pi_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, zatem $\Omega \subset \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Tym stwierdzeniem kończymy dowód twierdzenia Assera •

Rozdział II

Klasyczny rachunek zdań

Prezentację wybranych rachunków logicznych rozpoczniemy opisem **klasycznego rachunku zdań** (KRZ). Wśród systemów, które przedstawimy, wysuwa się on na plan pierwszy nie tylko z uwagi na swój sięgający starożytności rodowód, lecz także z tego względu, że sposób ekspozycji tego rachunku stał się wzorcem, wedle którego bada się i opisuje strukturę innych rachunków.

Najdawniejsze wzmianki o logice zdań znajdują się w rozważaniach megarejczyków. Szkoła stoicka nadała jej kształt prymitywnego systemu dedukcyjnego (**Chryzyp** – III wiek p.n.e.). Zdominowana i wyparta przez sylogistykę, a następnie zapomniana, logika zdań doczekała się swego renesansu dopiero w wieku XIX. Współczesny kształt zawdzięcza pracom **George'a Boole'a**, **Augusta de Morgana**, a zwłaszcza **Gottloba Fregego**, który jako pierwszy w 1879 roku przedstawił KRZ w postaci systemu aksjomatycznego. **Charles S. Peirce** w roku 1885 scharakteryzował stałe tego rachunku przy pomocy tabelek wartości logicznych. Badania nad KRZ prowadzone w pierwszym ćwierćwieczu XX wieku zaowocowały nowymi, ciekawymi aksjomatykami (**A. Whitehead**, **B. Russell** 1910; **J.G.P. Nicod** 1917; **J. Łukasiewicz** 1924). Twierdzenie o pełności dla KRZ udowodnił w 1921 roku **Emil Post**, natomiast twierdzenie o dedukcji wprost opublikowali w roku 1930 niezależnie: **Alfred Tarski** i **Jakub Herbrand**. Własności KRZ stanowiły jeden z głównych przedmiotów badań szkoły lwowsko-warszawskiej.

§ 1. Język KRZ

Wszelkie rachunki zdaniowe służą badaniu struktury formalnej zdań w sensie logiki. Zdania te, ze względu na swą budowę, dzielą się na **proste** i **złożone**. Te ostatnie to zdania, których pewna część właściwa sama jest zdaniem w sensie logiki. Do zbioru zdań prostych należą natomiast te wszystkie zdania, które nie są złożone. Zauważmy, że taka koncepcja zdania prostego i złożonego różni się od przyjętej w gramatyce języka polskiego.

Do wiązania zdań w zdania złożone używamy wyrażeń zwanych **spójnikami zdaniowymi**. Z każdym spójnikiem zdaniowym skojarzona jest pewna liczba naturalna zwana jego **argumentowością**. Mówi ona o tym, z iloma zdaniami dany spójnik tworzy zdanie złożone. Poszczególne rachunki zdań stanowią narzędzie do badania roli, jaką pełnią w języku naturalnym rozmaite spójniki zdaniowe.

Nasze ujęcie KRZ ma na celu przede wszystkim analizę trzech spójników dwuargumentowych:

... i ...
... lub ...
jeżeli ..., to ...

i jednego spójnika jednoargumentowego:

nieprawda, że ...

Wyliczając te cztery spójniki zdaniowe wskazaliśmy te wyrażenia języka naturalnego, których własności będą przedmiotem naszych dalszych rozważań. Dokonany wybór przesądza, które ze zdań w sensie logiki będziemy badać rozwijając KRZ. Postępując zgodnie z dyrektywami zawartymi w § 1 rozdziału I, przejdziemy teraz do konstrukcji adekwatnego języka symbolicznego, w którym możliwe będzie oddanie struktury zdań złożonych zbudowanych przy pomocy wymienionych uprzednio spójników.

Alfabet języka KRZ. Alfabet ten składa się z trzech następujących grup symboli:

(1) Stałe logiczne: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, zwane odpowiednio funktorami koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji.

(2) Zmienne zdaniowe: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ tworzące zbiór przeliczalny.
(3) Nawiasy: (,).

Jak należy rozumieć wprowadzone symbole? Które wyrażenia języka naturalnego są ich odpowiednikami? Otóż stałym logicznym odpowiadają spójniki zdaniowe, w szczególności:

funktorowi koniunkcji ($\wedge$) – spójnik „... i ..."
funktorowi alternatywy ($\vee$) – spójnik „... lub ..."
funktorowi implikacji ($\rightarrow$) – spójnik „jeżeli ..., to ..."
funktorowi negacji ($\neg$) – spójnik „nieprawda, że ...",

zmiennym zdaniowym odpowiadają zdania w sensie logiki, nawiasom zaś – znaki interpunkcyjne.

DEFINICJA WYRAŻENIA JĘZYKA KRZ WYRAŻENIEM JĘZYKA KRZ JEST KAŻDY SKOŃCZONY CIĄG SYMBOLI ALFABETU TEGO JĘZYKA.

Wyrażeniami języka KRZ są więc ciągi: $\rightarrow$, p_{21}, $) \wedge (p \rightarrow$, pqr, $(p \rightarrow (q \vee \neg p))$. Natomiast nie są wyrażeniami języka KRZ napisy: $p!q$, $(\alpha \rightarrow (\beta \vee \neg\alpha))$, $p_1p_3p_5 \ldots p_{2n+1} \ldots$, ponieważ w dwóch pierwszych występują symbole spoza alfabetu, a trzeci jest nieskończonym ciągiem symboli.

DEFINICJA WYRAŻENIA SENSOWNEGO JĘZYKA KRZ WYRAŻENIEM SENSOWNYM JĘZYKA KRZ JEST TAKIE I TYLKO TAKIE WYRAŻENIE TEGO JĘZYKA, KTÓRE ZOSTAŁO ZBUDOWANE ZGODNIE Z NASTĘPUJĄCYMI REGUŁAMI:
(1) KAŻDA POJEDYNCZA ZMIENNA ZDANIOWA JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM,
(2) JEŻELI α, β SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI, TO $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Wyrażeniami sensownymi (inaczej: **formułami**) języka KRZ są w myśl powyższej definicji następujące ciągi symboli: p_7, $\neg\neg\neg r$, $(p \rightarrow \neg p)$, $((p \wedge q) \rightarrow \neg(q \vee p))$. Natomiast wyrażenia: $) \rightarrow p$, pqp_3 nie są sensowne. Łatwo sprawdzić, że są one zbudowane inaczej niż przewidują reguły (1) i (2) definicji i tym samym nie należą do zbioru wyrażeń sensownych KRZ.

Zbiór wszystkich wyrażeń sensownych języka KRZ oznaczać będziemy symbolem Σ_{KRZ}, a poszczególne wyrażenia sensowne i ich zbiory – zgodnie z umową z § 1 rozdziału I.

Przyjęty sposób rozumienia symboli alfabetu języka KRZ sprawia, że na formuły tego języka możemy patrzeć jak na schematy budowy zdań języka naturalnego. Zatem każde zdanie w sensie logiki, zarówno proste, jak i złożone, zbudowane przy pomocy czterech wymienionych spójników, można „przetłumaczyć" na język KRZ, ujawniając tym samym jego logiczną strukturę. Oto przykład, jak należy „tłumaczyć" z języka naturalnego na język KRZ. Rozważmy zdanie:

„Jeżeli Ziemia jest okrągła i Ziemia jest planetą, to nieprawda, że Ziemia jest płaska lub Ziemia jest gwiazdą".

Dążąc do możliwie precyzyjnego oddania struktury tego zdania zastępujemy zdania proste zmiennymi zdaniowymi, przypisując:

zdaniu „Ziemia jest okrągła" – zmienną p,
zdaniu „Ziemia jest planetą" – zmienną q,
zdaniu „Ziemia jest płaska" – zmienną r,
zdaniu „Ziemia jest gwiazdą" – zmienną s.

Nie jest istotne, jakie zmienne wybierzemy do oznaczenia tych zdań, byle tylko różnym zdaniom przyporządkować różne zmienne. Gdy teraz spójniki „tłumaczonego" zdania zastąpimy odpowiednimi funktorami, otrzymamy w wyniku taką oto formułę KRZ:

$$((p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że spójniki poddawane analizie w ramach KRZ mają na gruncie języka naturalnego różne synonimy. Często posługujemy się na przykład spójnikami „... oraz ..." czy też „... a ..." w tym samym znaczeniu co spójnikiem „... i ...". Podobnie jest w przypadku pozostałych spójników pierwotnych KRZ. W szczególności odnotujmy, że spójnik „nieprawda, że ..." bywa zastępowany przedorzecznikową partykułą „nie":

(1) Nieprawda, że Ziemia jest gwiazdą.
(2) Ziemia nie jest gwiazdą.

Przyjmujemy, że obu tym zdaniom należy przypisać ten sam schemat (negacja zmiennej), mimo pewnej odmienności ich struktury.

Na zakończenie tych uwag o języku KRZ przyjmijmy umowę o opuszczaniu zewnętrznych nawiasów w formułach, zgodnie z którą zamiast pisać $((p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s))$, napiszemy $(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)$.

§ 2. *Wartościowania w KRZ*

Spójniki zdaniowe języka naturalnego dzielimy na ekstensjonalne i intensjonalne. **Spójnik ekstensjonalny** charakteryzuje się tym, że wartość logiczna zdania złożonego utworzonego przy pomocy tego spójnika zależy wyłącznie od wartości logicznej zdań składowych. Na podstawie analizy typowych kontekstów, w których występują rozważane przez nas spójniki zdaniowe „i", „lub", „jeżeli, to", „nieprawda, że" stwierdzamy, że są one przykładami spójników ekstensjonalnych. **Spójniki intensjonalne** mają natomiast tę własność, że wartość logiczna zdania złożonego skonstruowanego z ich pomocą zależy nie tylko od wartości, lecz także od treści zdań składowych. Przykładami spójników intensjonalnych są zwroty: „konieczne, że", „możliwe, że", „wiadomo, że".

KRZ jest więc teorią związków między wartością logiczną zdań złożonych zbudowanych z użyciem spójników ekstensjonalnych a wartościami logicznymi zdań składowych. Gdy przedmiotem analizy są spójniki intensjonalne, dla badania analogicznych związków konstruuje się inne rachunki logiczne.

Każdy ze spójników ekstensjonalnych w stały i sobie tylko właściwy sposób uzależnia logiczną wartość zdań złożonych od wartości zdań składowych. Aktualne staje się więc pytanie: jakie są to zależności w przypadku czterech ekstensjonalnych spójników stanowiących przedmiot badań KRZ? Odpowiedzi dostarcza nam definicja wartościowania w KRZ prezentująca syntetycznie interesujące nas związki w formie tabelki. Przypomnijmy, że w § 2 rozdziału I dla oznaczenia wartości logicznych przyjęliśmy symbole **1** (prawda) i **0** (nieprawda).

DEFINICJA WARTOŚCIOWANIA W KRZ WARTOŚCIOWANIEM W KRZ NAZYWAMY KAŻDĄ FUNKCJĘ v ZE ZBIORU Σ_{KRZ} W ZBIÓR WARTOŚCI LOGICZNYCH (symbolicznie: $v: \Sigma_{KRZ} \rightarrow \{0, 1\}$) TAKĄ, ŻE DLA DOWOLNYCH FORMUŁ $\alpha, \beta \in \Sigma_{KRZ}$:

JEŻELI $v(\alpha)$	$v(\beta)$, TO	$v(\alpha \wedge \beta)$	$v(\alpha \vee \beta)$	$v(\alpha \rightarrow \beta)$	$v(\neg\alpha)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

Wynikający bezpośredno z tej definicji wniosek dotyczy ważnej własności wartościowania. Można ją ująć następująco: Dla dowolnych wartościowań v_1 i v_2 oraz dla dowolnych formuł α, β: jeżeli $v_1(\alpha) = v_2(\alpha)$ i $v_1(\beta) = v_2(\beta)$, to dla dowolnego wyrażenia sensownego γ utworzonego z formuł α, β: $v_1(\gamma) = v_2(\gamma)$. W szczególności zauważmy, że gdy dwa wartościowania v_1 i v_2 w identyczny sposób oceniają każdą ze zmiennych zdaniowych (tj. $v_1(p) = v_2(p)$, $v_1(q) = v_2(q)$ itd.), to również identycznie oceniają każdą formułę KRZ. **Podsumowując**: wartość formuły jest jednoznacznie zdeterminowana wartościami jej podformuł, a wartościowanie jest zadane jednoznacznie przez podanie wartości, jakie przypisuje wszystkim zmiennym.

Drugi wniosek: jeśli znamy wartości logiczne zdań składowych, to posługując się definicją wartościowania w KRZ możemy „wyliczyć" wartość każdego zdania złożonego skonstruowanego za pomocą wybranych przez nas czterech spójników zdaniowych, którym odpowiadają funktory: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$. Dla przykładu weźmy pod uwagę analizowane w § 1 zdanie o schemacie $(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)$. Wiemy, że zdania, którym przypisaliśmy zmienne p i q, są prawdziwe, a zdania, którym przypisaliśmy zmienne r i s, są fałszywe, rozważmy zatem wartościowanie v, które dyktuje nam nasza wiedza:

$$v(p) = v(q) = \mathbf{1} \quad \text{oraz} \quad v(r) = v(s) = \mathbf{0}$$

Definicja wartościowania w KRZ pozwala nam wnioskować, że:

$$v(p \wedge q) = \mathbf{1}, \qquad v(r \vee s) = \mathbf{0}, \qquad v(\neg(r \vee s)) = \mathbf{1}$$

i ostatecznie wyliczyć wartość całej formuły:

$$v((p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)) = \mathbf{1}$$

A zatem zdanie o schemacie $(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)$ przy opisanym wartościowaniu v przyjmuje wartość **1**. Jest to zgodne z naszymi intuicjami, bowiem zdanie, o którym mowa, jest istotnie prawdziwe. W ten sposób definicja wartościowania umożliwia nam „wyliczenie" wartości logicznej zdania złożonego zawsze wtedy, gdy znamy wartości zdań składowych.

Formuły rachunku zdań są jednak beztreściowymi schematami, a zmienne w nich występujące nie mają żadnej wartości logicznej. Można co najwyżej zakładać, że przyjmują one takie czy inne hipotetyczne wartości logiczne, i badać, jak w poszczególnych przypadkach kształtować się będzie wartość całej formuły. Na szczególne wyróżnienie wśród formuł KRZ zasługują te, których wartość przy wszystkich wartościowaniach jest niezmiennie równa **1**; nazywamy je **tautologiami** i uważamy je za schematy zdań wyłącznie prawdziwych.

DEFINICJA TAUTOLOGII **KRZ** JEŻELI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α JEST STAŁA PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH KRZ I RÓWNA **1**, TO MÓWIMY, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ KRZ.

Jak *praktycznie* rozwiązać problem ustalenia, czy konkretna formuła KRZ jest tautologią tego rachunku? Pytanie to wymaga zastanowienia, bowiem z definicji wartościowania, wobec nieskończonej liczebności zbioru wyrażeń sensownych KRZ (samych zmiennych zdaniowych jest nieskończenie wiele!) wnioskujemy, że i różnych wartościowań jest nieskończenie wiele. Tautologia jest więc taką formułą, która przy **każdym** z nieskończenie wielu wartościowań przyjmuje wartość **1**. Gdybyśmy chcieli rozpatrywać każde z wartościowań osobno, procedura badania tautologiczności formuł byłaby nieskończona. Jednak, jak się zaraz okaże, tę nieskończoną rodzinę wartościowań potrafimy tak pogrupować, że w rezultacie zawsze w skończonej liczbie kroków rozstrzygamy, czy dana formuła jest, czy też nie jest tautologią.

Otóż każda formuła zbudowana jest ze skończonej liczby zmiennych zdaniowych (porównaj definicje wyrażenia i wyrażenia sensownego KRZ). Komentując definicję wartościowania w KRZ podkreśliliśmy, że wartość formuły zależy od tego, jak są wartościowane właśnie te, występujące w formule, zmienne. Na wartość badanej formuły nie mają natomiast żadnego wpływu wartości tych zmiennych, które w formule nie występują. Z tego względu sprawdzając, czy pewna formuła jest tautologią, dzielimy wszystkie wartościowania na pewną, zawsze skończoną liczbę grup tak, aby w obrębie jednej grupy zamknąć wszystkie te wartościowania, które nie różnią się między sobą wartościami na zmiennych występujących w danej formule. Jeśli badana formuła zbudowana jest z n różnych zmiennych, wszystkie wartościowania dzielimy na dokładnie 2^n różnych grup. I tak, w przypadku formuły zbudowanej z jednej zmiennej, powiedzmy p, wszystkie wartościowania dzielimy na dwie grupy: I i II. Do grupy I, utożsamianej z układem wartości $\langle \mathbf{1} \rangle$, zaliczamy wszystkie te wartościowania, które zmiennej p przypisują wartość **1**; do grupy II, utożsamianej z układem ⟨0⟩ – te, które zmiennej p przypisują wartość **0**. Gdy w formule występują dwie różne zmienne, p i q, ogół wartościowań dzielimy na cztery następujące grupy:

I. – ⟨1,1⟩ – wartościowania v takie, że: v(p) = 1, v(q) = 1
II. – ⟨1,0⟩ – wartościowania v takie, że: v(p) = 1, v(q) = 0
III. – ⟨0,1⟩ – wartościowania v takie, że: v(p) = 0, v(q) = 1
IV. – ⟨0,0⟩ – wartościowania v takie, że: v(p) = 0, v(q) = 0

Żeby więc odpowiedzieć na pytanie, czy jest tautologią dowolna formuła o dwóch zmiennych, zamiast badać nieskończenie wiele wartościowań, wystarczy sprawdzić, jaka jest wartość tej formuły przy czterech wyżej wyliczonych układach wartości dla jej zmiennych. Formuła jest tautologią, jeśli przy każdym z nich przyjmuje wartość **1**. Analogicznie postępujemy z formułami o większej liczbie zmiennych. Dla każdej z nich pytanie o tautologiczność rozstrzygnąć można w skończonej liczbie kroków.

Aby sprawdzić, czy jest tautologią pewna formuła KRZ, konstruujemy tabelkę, w której uwzględniamy odpowiednią, zależną od liczby zmiennych tej formuły, liczbę różnych układów wartości. Każdy układ wartości zapisujemy i rozważamy w oddzielnym wierszu. Liczba kolumn tabelki zależy od stopnia komplikacji rozpatrywanej formuły. W nagłówkach poszczególnych kolumn wpisujemy, poczynając od najprostszych, wszystkie wyrażenia sensowne, które można wskazać studiując budowę badanej formuły (nazywamy je **podformułami** tej formuły). Kolumny wypełniamy wartościami logicznymi odnoszącymi się do formuł wymienionych w ich nagłówkach. Ostatnia kolumna tabelki zawiera wartości logiczne przypisywane całej rozważanej formule. Patrząc na tę kolumnę, udzielamy odpowiedzi na pytanie, czy sprawdzana formuła jest tautologią KRZ. Przejdźmy teraz do konkretnych przykładów:

(1) Czy jest tautologią KRZ formuła **p ∨ ¬p**?

p	¬p	p ∨ ¬p
1	0	1
0	1	1

Formuła **p ∨ ¬p** jest tautologią KRZ.

(2) Czy jest tautologią KRZ formuła **¬(p ∧ ¬p)**?

p	¬p	p ∧ ¬p	¬(p ∧ ¬p)
1	0	0	1
0	1	0	1

Formuła **¬(p ∧ ¬p)** jest tautologią KRZ.

(3) Czy jest tautologią KRZ formuła **(p → q) → (¬q → ¬p)**?

p	q	¬p	¬q	p → q	¬q → ¬p	(p → q) → (¬q → ¬p)
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Formuła **(p → q) → (¬q → ¬p)** jest tautologią KRZ.

(4) Czy jest tautologią KRZ formuła **(¬p → ¬q) → (q → p)**?

p	q	¬p	¬q	q → p	¬p → ¬q	(¬p → ¬q) → (q → p)
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Formuła **(¬p → ¬q) → (q → p)** jest tautologią KRZ.

(5) Czy jest tautologią KRZ formuła **(p ∨ q) → (p ∧ q)**?

p	q	p ∨ q	p ∧ q	(p ∨ q) → (p ∧ q)
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

Formuła **(p ∨ q) → (p ∧ q)** **nie** jest tautologią KRZ. Falsyfikują ją wszystkie te wartościowania, które przypisują różne wartości zmiennym tej formuły.

Zademonstrowaną tu metodę sprawdzania tautologiczności nazywać będziemy **tabelkową** lub inaczej: **wprost**. Nie jest to metoda jedyna. Możliwe jest również poszukiwanie odpowiedzi na pytanie o tautologiczność formuły na drodze rozumowania **niewprost**. Stanowi ono próbę rekonstrukcji wartościowania falsyfikującego badaną formułę. Punktem wyjścia metody niewprost jest hipoteza, że sprawdzana formuła tautologią nie jest i jako taka przy pewnym wartościowaniu przyjmuje wartość **0**. Wnioskujemy stąd, choć nie zawsze jednoznacznie, jakie wartości przysługują jej podformułom coraz to bardziej elementarnym. Jeżeli każdą z dróg, na których usiłujemy skonstruować wartościowanie falsyfikujące, zamknie sprzeczność (przejawiająca się w równoczesnym przypisaniu pewnej formule różnych wartości logicznych), wyciągamy wniosek, że dla rozpatrywanej formuły nie istnieje wartościowanie obalające. Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że jest ono tautologią. Jeśli natomiast któraś z możliwych dróg nie zakończy się sprzecznością, mimo że badaną formułę rozłożyliśmy na najprostsze podformuły (zmienne zdaniowe), wnioskujemy, że konstrukcja wartościowania obalającego powiodła się, a sprawdzana formuła tautologią nie jest.

Badając tautologiczność formuł metodą niewprost będziemy się posługiwać takim oto diagramem:

1	0

Po jego lewej stronie wpisywać będziemy formuły, którym przysługuje wartość **1**, natomiast po prawej te, którym przysługuje wartość **0**. Do konstrukcji diagramów używać będziemy ośmiu reguł rozkładu formuł, będących bezpośrednimi wnioskami z definicji wartościowania w KRZ:

(K 1)

1	0
$\alpha \wedge \beta$	
α	
β	

(K 0)

	1	0
		$\alpha \wedge \beta$
1.		α
2.		β

(A 1)

	1	0
	$\alpha \vee \beta$	
1.	α	
2.	β	

(A 0)

1	0
	$\alpha \vee \beta$
	α
	β

(I 1)

	1	0
	$\alpha \to \beta$	
1.		α
2.	β	

(I 0)

1	0
	$\alpha \to \beta$
α	β

(N 1)

1	0
$\neg \alpha$	
	α

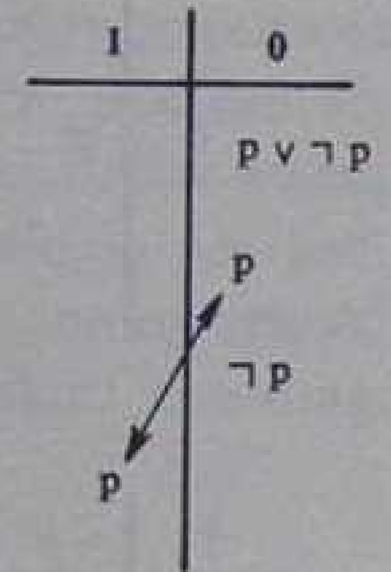
(N 0)

1	0
	$\neg \alpha$
α	

Jak należy rozumieć dyrektywy zawarte w tych regułach, wyjaśnimy na dwóch przykładach. Przypuśćmy, że przy określonym wartościowaniu formuła $\alpha \wedge \beta$ przyjmuje wartość **1** (znajduje się w lewej kolumnie). Zastosowanie ma wtedy reguła (**K 1**), zgodnie z którą oba czynniki tej koniunkcji – formuły α i β – umieszczamy w lewej kolumnie diagramu, co odpowiada przypisaniu im wartości **1**. Jeśli zaś przy pewnym wartościowaniu formuła $\alpha \wedge \beta$ ma wartość **0** (znalazła się po prawej stronie dzielącej diagram kreski pionowej), wówczas, zgodnie z regułą (**K 0**), zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo α przyjmuje wartość **0** i ten przypadek rozpatrujemy jako pierwszy (wpisując α w prawej kolumnie tej części diagramu, która została oddzielona poziomą linią), albo to β ma wartość **0** i ten przypadek rozpatrujemy jako drugi, umieszczając teraz formułę β w prawej kolumnie kolejnej, wydzielonej kreską poziomą, sekcji diagramu.

Przejdźmy teraz do konkretnych przykładów stosowania metody niewprost. Posłużmy się w nich formułami już sprawdzonymi metodą tabelkową, by umożliwić czytelnikowi porównanie obu sposobów ustalenia odpowiedzi na pytanie o tautologiczność wyrażenia sensownego KRZ.

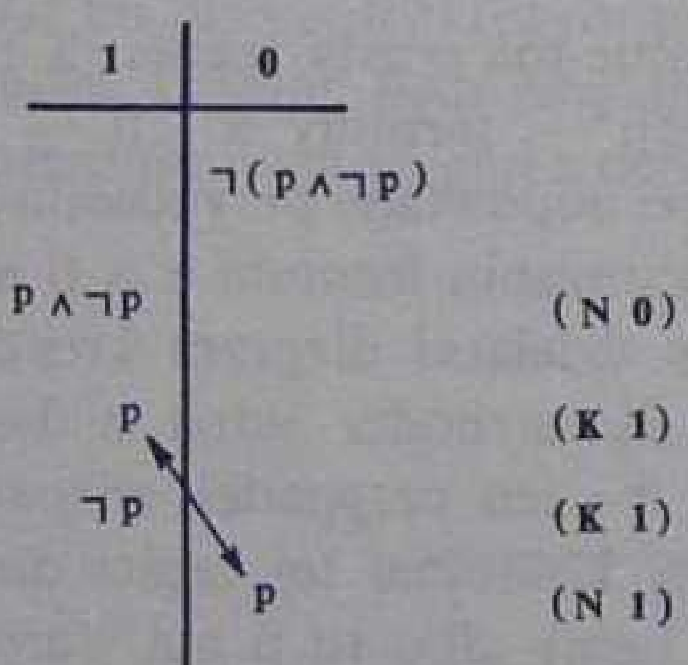
(1) Czy jest tautologią KRZ formuła $\mathbf{p \vee \neg p}$?
Załóżmy, że nie jest. Istnieje więc wartościowanie, które tej formule przypisuje wartość **0**; wpisujemy zatem $p \vee \neg p$ w prawą kolumnę diagramu:



Stosujemy regułę (**A 0**) a następnie regułę (**N 0**)

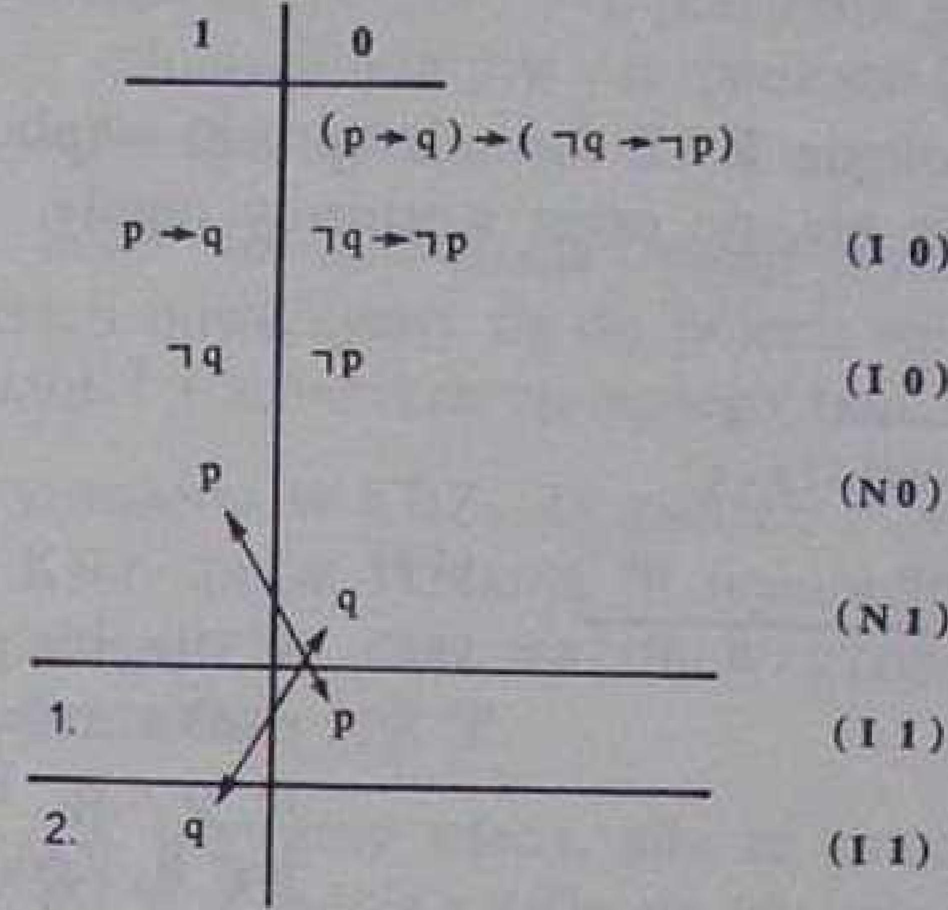
Zauważmy, że zmienna p została wpisana w obu kolumnach diagramu. Oznacza to, że zostały jej przypisane dwie różne wartości logiczne. Ta sprzeczność (sygnalizowana strzałką) świadczy o tym, że nie istnieje wartościowanie falsyfikujące, zatem badana formuła jest tautologią KRZ.

(2) Czy jest tautologią KRZ formuła $\mathbf{\neg(p \wedge \neg p)}$?
Zakładamy, że nie, po czym stosujemy reguły:



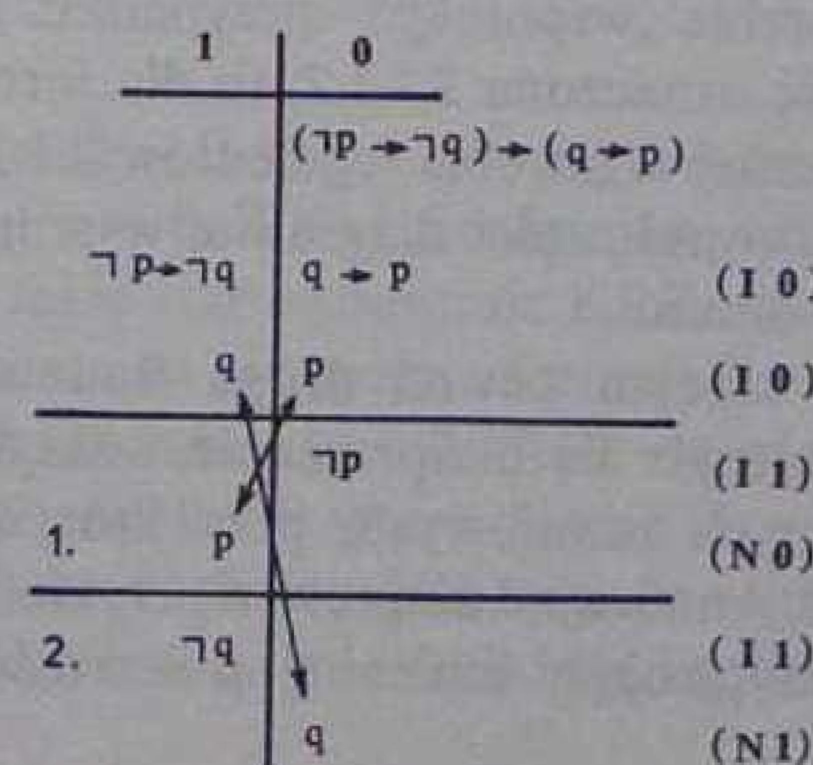
Sprzeczność zaznaczona strzałką świadczy o tym, że formuła $\mathbf{\neg(p \wedge \neg p)}$ jest tautologią KRZ.

(3) Czy jest tautologią KRZ formuła $\mathbf{(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)}$?
Zakładamy, że nie, po czym stosujemy reguły:



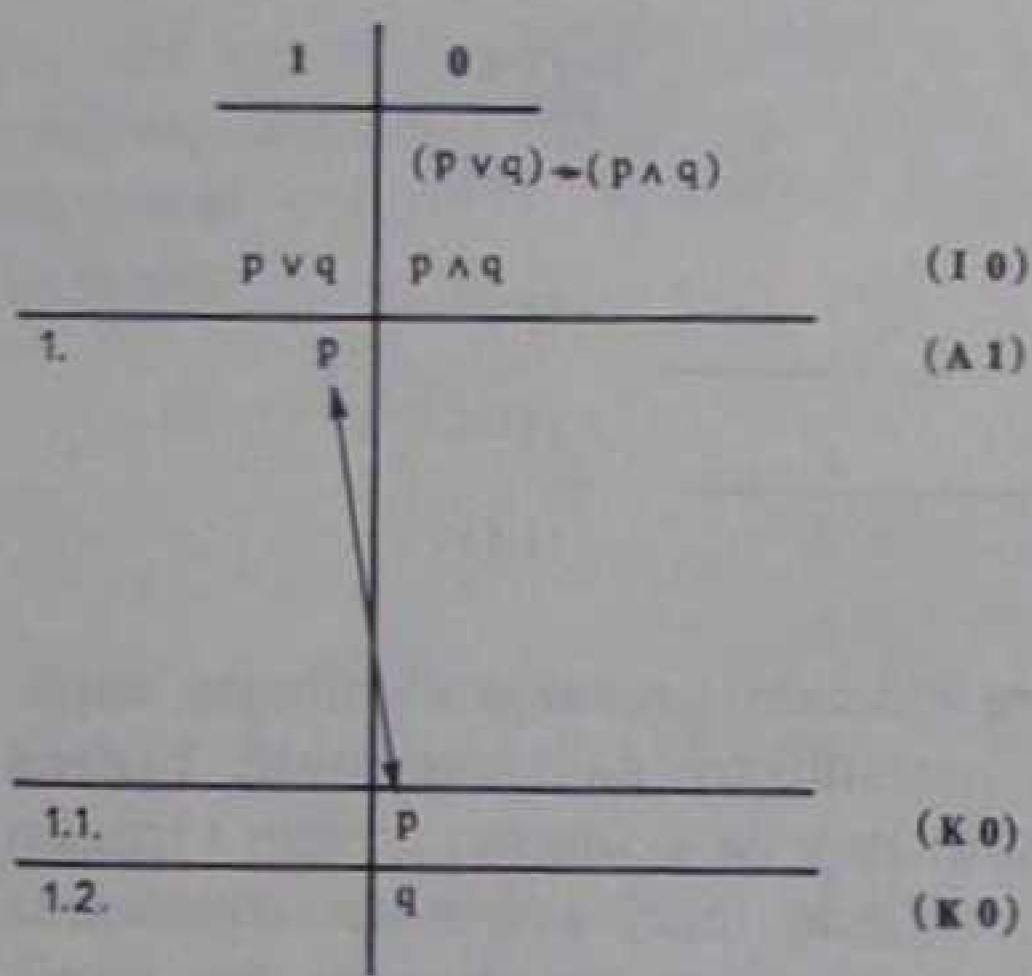
W obu przypadkach, które należało rozważyć eliminując implikację w kolumnie lewej, natrafiliśmy na sprzeczność; badana formuła jest tautologią. Zauważmy, że w wierszu drugim i trzecim diagramu możliwe było przyjęcie innej kolejności stosowania reguł. Podkreślmy zatem, że kolejność ta jest obojętna, tzn. wynik sprawdzania od niej nie zależy. Może natomiast zależeć długość diagramu. Jeśli więc mamy w konkretnym przypadku możliwość wyboru, praktycznie jest w pierwszej kolejności korzystać z tych reguł, które pozwalają jednoznacznie ocenić podformuły i odsunąć moment wyodrębnienia w diagramie numerowanych segmentów.

(4) Czy jest tautologią KRZ formuła $\mathbf{(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)}$?
Zakładamy, że nie, po czym stosujemy reguły:



W obu przypadkach, które należało rozważyć, eliminując implikację w kolumnie **1** natrafiliśmy na sprzeczność. Badana formuła jest tautologią.

(5) Czy jest tautologią KRZ formuła $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$?
Zakładamy, że nie, po czym stosujemy reguły:



W obrębie pierwszego przypadku rozpatrujemy formułę $p \wedge q$, której wartością jest **0**. Zgodnie z (**K 0**) rozpatrzyć należy dwa podprzypadki przypadku 1.

Ponieważ przypadek 1.1 kończy się sprzecznie, badamy kolejny przypadek 1.2. Tu sprzeczności nie ma. Badana formuła nie jest więc tautologią. Rozważanie przypadku 2, w którym drugi człon alternatywy $p \vee q$ przyjmuje wartość **1**, jest już bezcelowe.

W których segmentach diagramu o wielu przypadkach można, a w których nie wolno poszukiwać sprzeczności? Otóż sprzeczności szukamy tylko w obrębie „wspólnego" przypadku. Jeśli np. w diagramie znajduje się część oznaczona 2.1.1.2, to dla formuły tam wpisanej szukamy pary sprzecznej w obrębie segmentów 2.1.1, 2.1, 2 oraz w nie numerowanej początkowej części diagramu, wspólnej wszystkim rozpatrywanym przypadkom.

Z diagramu, w którym pewna droga budowy wartościowania falsyfikującego zakończyła się niesprzecznie, odczytać możemy układ wartości dla zmiennych zdaniowych, przy którym badana formuła przyjmuje wartość **0**. Analizując diagram z przykładu (5) stwierdzamy, że jest to układ przypisujący zmiennej p wartość **1** (przypadek 1), a zmiennej q – wartość **0** (przypadek 1.2). Układ wartości $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ jest jednym z dwóch, przy których wyrażenie sensowne $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$, badane metodą tabelkową (por. str. 37), przyjmuje wartość **0**. Drugi z nich – $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ – odnaleźlibyśmy w przypadkach 2.1, 2, gdybyśmy kontynuowali budowę diagramu.

Przejdźmy z kolei do omówienia relacji wynikania w KRZ. W definicji tej relacji odwołujemy się do pojęcia spełniania znanego nam z §2 rozdziału I i scharakteryzowanego tam lematami 1 i 2.

Definicja wynikania w KRZ ZE ZBIORU FORMUŁ Φ WYNIKA NA GRUNCIE KRZ ZBIÓR FORMUŁ Ψ (symbolicznie: $\Phi \models_{KRZ} \Psi$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY KAŻDE WARTOŚCIOWANIE KRZ SPEŁNIAJĄCE Φ SPEŁNIA TEŻ Ψ.

Zapisu: $\Phi \not\models_{KRZ} \Psi$ używamy wtedy, gdy ze zbioru formuł Φ nie wynika w KRZ zbiór Ψ. Zgodnie z definicją sytuacja taka ma miejsce wówczas, gdy istnieje w KRZ wartościowanie spełniające zbiór Φ i nie spełniające zbioru Ψ. Przypomnijmy też, że pisać będziemy $\Phi \models_{KRZ} \alpha$, zamiast $\Phi \models_{KRZ} \{\alpha\}$.

Relacji wynikania w KRZ przysługują wszystkie ogólne własności ujęte w lematy 3-7 (por. §2, rozdział I). Prócz nich relacja ta posiada również własności specyficzne, ściśle związane z KRZ, z prawdziwościową charakterystyką funktorów tego rachunku, zawartą w definicji wartościowania. Wśród nich poczesne miejsce zajmują własności ukazujące zależności pomiędzy wynikaniem a implikacją i negacją. Ich prezentacji poświęcimy kolejne trzy twierdzenia będące semantycznymi odpowiednikami twierdzeń o dedukcji.

Twierdzenie 1 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \beta$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{KRZ} \alpha \rightarrow \beta$.

Dowód. (I) Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \beta$ oraz, dla dowodu nie wprost, że (2) $\Phi \not\models_{KRZ} \alpha \rightarrow \beta$. Z (2) i z definicji wynikania w KRZ wnioskujemy, że istnieje takie wartościowanie KRZ, nazwijmy je v, że (3) v spełnia zbiór Φ, a mimo to nie spełnia formuły $\alpha \rightarrow \beta$, czyli (zgodnie z definicją spełniania): (4) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{0}$. Stąd, na mocy definicji wartościowania KRZ ustalamy, że (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$ oraz (6) $v(\beta) = \mathbf{0}$. Skoro wartościowanie v spełnia zbiór Φ i spełnia formułę α (por. (3) i (5)), to tym samym (7) v spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$. Z (7) i (1), zgodnie z definicją wynikania w KRZ wnioskujemy, że v spełnia formułę β, czyli (8) $v(\beta) = \mathbf{1}$. Sprzeczność w krokach (6), (8) kończy pierwszą część dowodu.

(II) Załóżmy z kolei, że (1) $\Phi \models_{KRZ} \alpha \rightarrow \beta$ oraz, dla dowodu niewprost, że (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{KRZ} \beta$. Z (2) oraz z definicji wynikania w KRZ wnioskujemy, że (3) istnieje wartościowanie w KRZ, powiedzmy v, spełniające zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$ i nie spełniające β. Z (3) i definicji spełniania wynika, że (4) $v(\beta) = \mathbf{0}$, a lemat 1 i definicja spełniania usprawiedliwia wnioski: (5) v spełnia zbiór Φ oraz (6) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Korzystając z definicji wartościowania w KRZ z (4) oraz (6) wnosimy, że (7) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{0}$, co oznacza, że wartościowanie v nie spełnia formuły $\alpha \rightarrow \beta$. Natomiast z (1), (5) na mocy definicji wynikania w KRZ wnioskujemy, że v spełnia $\alpha \rightarrow \beta$, tj. (8) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{1}$; sprzeczność w krokach (7), (8) kończy dowód •

TWIERDZENIE 2 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{KRZ} \neg\alpha$.

Dowód. (I) Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ i dla dowodu niewprost, że (2) $\Phi \not\models_{KRZ} \neg\alpha$. Z (2) wobec definicji wynikania w KRZ wnioskujemy, że (3) istnieje wartościowanie w KRZ, powiedzmy v, spełniające Φ ale nie spełniające $\neg\alpha$. Z (3) na podstawie definicji spełniania wnosimy, że (4) $v(\neg\alpha) = \mathbf{0}$, a z (4) i definicji wartościowania w KRZ, że (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$, co oznacza, że wartościowanie v spełnia formułę α. Skoro przy v spełniony jest Φ i spełniona jest formuła α, to zgodnie z definicją spełniania, spełniona jest także suma: $\Phi \cup \{\alpha\}$. Stąd jednak, wobec (1), definicja wynikania w KRZ pozwala wyciągnąć wniosek, że (6) v spełnia zbiór $\{\beta, \neg\beta\}$. Korzystając z definicji spełniania i wartościowania ustalamy, że zarazem $v(\beta) = \mathbf{1}$ i $v(\beta) = \mathbf{0}$. Sprzeczność ta zamyka dowód pierwszej części twierdzenia.

(II) Załóżmy z kolei, że (1) $\Phi \models_{KRZ} \neg\alpha$ i niewprost, że równocześnie (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$. Z (2) oraz definicji wynikania w KRZ wiemy, że (3) istnieje v wartościowanie KRZ spełniające $\Phi \cup \{\alpha\}$. Z (3) i lematu 1 możemy wywnioskować, że (4) v spełnia zbiór Φ oraz że (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Natomiast z (1) i (4) przez definicję wynikania w KRZ wyprowadzamy wniosek, że v spełnia $\neg\alpha$, czyli inaczej (6) $v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Korzystając z definicji wartościowania ustalamy, że (7) $v(\alpha) = \mathbf{0}$. W tym miejscu naszego rozumowania pojawia się sprzeczność ((5), (7)) kończąca dowód •

TWIERDZENIE 3 $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \models_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{KRZ} \alpha$.

Dowód twierdzenia 3, w pełni analogiczny do dowodu twierdzenia 2, pomijamy.

Postępując zgodnie z planem nakreślonym w rozdziale I zajmiemy się teraz regułami KRZ. Przypomnijmy, że regułą nazywamy dowolny zbiór par $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$, gdzie Φ stanowi zbiór przesłanek, a jedyny element zbioru $\{\alpha\}$ – wniosek. Przypomnijmy również, że wśród wszystkich reguł wyróżniliśmy reguły elementarne, to jest takie, które wraz z pewną parą podstawową zawierają tylko i wyłącznie wszystkie jej uszczegółowienia. Reguły elementarne o parze podstawowej $\langle \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \{\beta\} \rangle$ przedstawiamy w formie schematów, w których pozioma kreska oddziela przesłanki od wniosku:

$$\begin{array}{cl} \alpha_1 & \\ \vdots & \text{przesłanki} \\ \alpha_k & \\ \hline \beta & \text{wniosek} \end{array}$$

Przenieśmy teraz na grunt KRZ pojęcie reguły normalnej:

DEFINICJA REGUŁY NORMALNEJ KRZ REGUŁA JEST NORMALNA NA GRUNCIE KRZ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ NALEŻĄCEJ DO TEJ REGUŁY ZACHODZI WYNIKANIE: $\Phi \models_{KRZ} \alpha$.

Znając zatem schemat pewnej reguły elementarnej możemy pytać, czy jest to schemat reguły normalnej. Odpowiedź możemy uzyskać stosując rozumowanie niewprost. Jego wyraz graficzny podobny jest do tego, jaki przyjmuje sprawdzanie tautologiczności metodą niewprost. Analizie poddajemy parę podstawową badanej reguły. Zakładamy niewprost, że nie ma ona własności przysługującej parom reguły normalnej, a więc że z jej przesłanek nie wynika w KRZ jej wniosek. Zgodnie z definicją wynikania sytuacja taka ma miejsce wówczas, gdy pewne wartościowanie spełniające zbiór przesłanek nie spełnia wniosku. Przy tym wartościowaniu przesłanki przyjmują wartość $\mathbf{1}$, a wniosek – wartość $\mathbf{0}$. Wpisujemy zatem przesłanki w lewą, a wniosek w prawą kolumnę diagramu i prowadzimy dalsze rozumowanie korzystając z reguł konstrukcji diagramu. Sprzeczność zamykająca każdą z dróg tego rozumowania każe nam odrzucić przyjętą hipotezę i uznać, że parze podstawowej badanej reguły przysługuje charakterystyczna własność wszystkich par reguły normalnej. Natomiast brak sprzeczności choćby w jednym z rozpatrywanych przypadków potwierdza wstępne przypuszczenie.

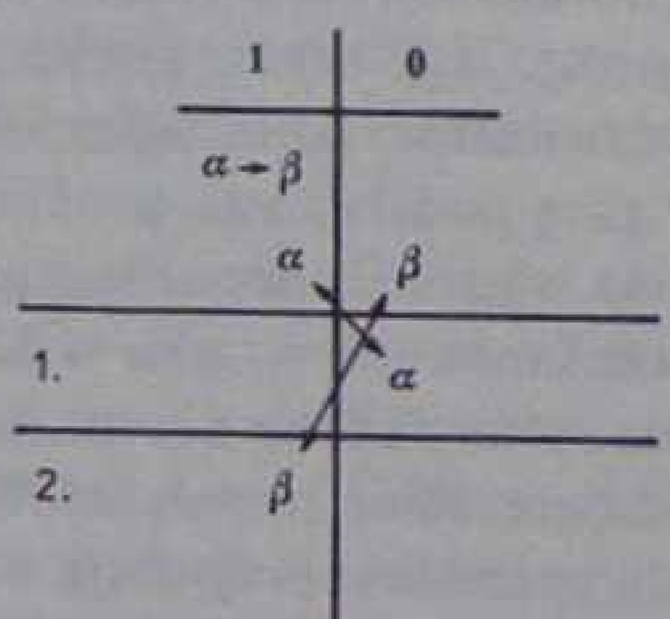
Jak interpretować obie opisane wyżej sytuacje wobec faktu, że wszystkie pary badanej reguły są tylko uszczegółowieniem pary podstawowej? Otóż jeśli ustalimy, że schematy składające się na parę podstawową gwarantują wynikanie wniosku ze zbioru przesłanek, tym samym w każdej konkretnej parze danej reguły zajdzie taka sama relacja i reguła okaże się normalna. Jeśli natomiast wynikanie nie zachodzi, wówczas zastępując różne litery greckie sprawdzanego schematu różnymi zmiennymi zdaniowymi skonstruujemy parę świadczącą o tym, że badana reguła nie jest normalna.

Przejdźmy teraz do konkretnych przykładów:

(1) Sprawdzamy, czy jest normalna reguła elementarna o schemacie:

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

Zakładamy, że z przesłanek pary podstawowej nie wynika w KRZ jej wniosek. Istnieje więc wartościowanie, które przesłankom daje wartość **1**, a wnioskowi – **0**. Schematy formuł $\alpha \rightarrow \beta$ oraz α wpisujemy w lewą, β zaś w prawą kolumnę diagramu i stosujemy regułę (**I 1**):

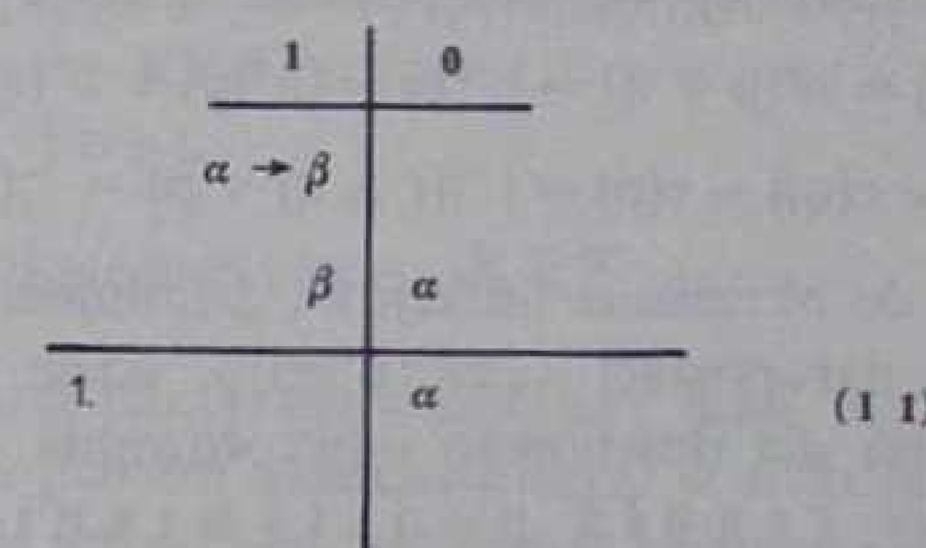


Wobec sprzeczności zamykającej obie drogi tego rozumowania, wnioskujemy, że próba konstrukcji takiego wartościowania, które spełnia przesłanki, a zarazem nie spełnia wniosku, nie może się powieść. Rozważana reguła elementarna jest normalna, bo przedstawiony wyżej diagram uzasadnia schemat wynikania: $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models_{KRZ} \beta$, pod który podpadają wszystkie pary reguły.

(2) Sprawdzamy, czy jest normalna reguła elementarna o schemacie:

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \\ \hline \alpha \end{array}$$

Zakładamy, że z przesłanek pary podstawowej nie wynika w KRZ jej wniosek i konstruujemy stosowny diagram, wpisując $\alpha \rightarrow \beta, \beta$ w jego lewą, a α – w prawą kolumnę.



Brak sprzeczności już na pierwszej z dwóch możliwych dróg rekonstrukcji wartościowania obalającego świadczy o tym, że wynikanie $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta\} \models_{KRZ} \alpha$ nie zachodzi, a tym samym badana reguła nie jest normalna.

Przenosimy z kolei na grunt KRZ pojęcie reguły niezawodnej:

DEFINICJA REGUŁY NIEZAWODNEJ KRZ. REGUŁA JEST NA GRUNCIE KRZ NIEZAWODNA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA KAŻDEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZAWSZE WTEDY, GDY Φ JEST ZBIOREM TAUTOLOGII KRZ, FORMUŁA α JEST RÓWNIEŻ TAUTOLOGIĄ TEGO RACHUNKU.

Wykażemy, że przykładem reguły niezawodnej KRZ jest pewna nieelementarna reguła zwana regułą podstawiania.

Zanim ją zdefiniujemy, umówimy się, że:

(i) e – oznacza dowolną funkcję ze zbioru zmiennych zdaniowych w zbiór Σ_{KRZ}.

(ii) h^e – oznacza funkcję ze zbioru Σ_{KRZ} w zbiór Σ_{KRZ} określoną następującymi warunkami:

$h^e(p) = e(p)$ dla dowolnej zmiennej zdaniowej p.

$h^e(\alpha \wedge \beta) = h^e(\alpha) \wedge h^e(\beta)$

$h^e(\alpha \vee \beta) = h^e(\alpha) \vee h^e(\beta)$

$h^e(\alpha \rightarrow \beta) = h^e(\alpha) \rightarrow h^e(\beta)$

$h^e(\neg\alpha) = \neg h^e(\alpha)$

Znając wartości, jakie zmiennym zdaniowym danej formuły przypisuje określona funkcja e, możemy ustalić, jakie wyrażenie sensowne przyporządkowuje tej formule skojarzona z e funkcja h^e. Niech np. $e(p) = \neg(r \wedge q)$ i $e(q) = p$. Weźmy teraz pod uwagę formułę $(p \vee q) \rightarrow p$ i określmy jej wartość poprzez funkcję h^e.

$$h^e((p \vee q) \rightarrow p) = h^e(p \vee q) \rightarrow h^e(p) = (h^e(p) \vee h^e(q)) \rightarrow h^e(p) =$$

$$= (e(p) \vee e(q)) \rightarrow e(p) = (\neg(r \wedge q) \vee p) \rightarrow \neg(r \wedge q)$$

Odwołując się do określenia funkcji h^e, definiujemy **regułę podstawiania** jako ogół par postaci $\langle\{\alpha\}, \{h^e(\alpha)\}\rangle$, gdzie h^e jest funkcją określoną jak wyżej dla dowolnego odwzorowania e.

Aby dowieść, że r e g u ł a p o d s t a w i a n i a j e s t n i e z a w o d n a w K R Z, wykazujemy, że zawsze wtedy, gdy α (jedyny element zbioru przesłanek) jest tautologią KRZ, również $h^e(\alpha)$ jest tautologią.

Dowód. Zakładamy (rozumując niewprost), że przy pewnym odwzorowaniu e formuła $h^e(\alpha)$ tautologią nie jest, mimo że α jest tautologią. Istnieje więc takie wartościowanie v, przy którym $h^e(\alpha)$ ma wartość $\mathbf{0}$: $v(h^e(\alpha)) = \mathbf{0}$. Określamy z kolei na zmiennych zdaniowych wartościowanie v^e:

$$v^e(p) =^{df} v(e(p)),$$

a następnie, stosując indukcję ze względu na sposób budowy formuły, możemy wykazać, że dla dowolnego wyrażenia sensownego języka KRZ zachodzi równość:

$$v^e(\beta) = v(h^e(\beta)).$$

Szczegółowy dowód tej równości, w którym kolejno zakładamy, że

β ma postać zmiennej zdaniowej, koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji, jako prosty, lecz długi – pomijamy.

Wskazana równość zachodzi także dla naszej formuły α:

$$v^e(\alpha) = v(h^e(\alpha)) = \mathbf{0}.$$

Skonstruowaliśmy więc wartościowanie (v^e) falsyfikujące formułę α. Doszliśmy zatem do sprzeczności z założeniem, co świadczy o tym, że reguła podstawiania jest niezawodna w KRZ •

W myśl twierdzenia 1 dowiedzionego w §2 rozdziału I, każda reguła normalna KRZ jest też regułą niezawodną tego rachunku. Zależność odwrotna na gruncie KRZ nie zachodzi. Przykładem niezawodnej w KRZ reguły, która nie jest w tym rachunku normalna, jest właśnie reguła podstawiania. Weźmy bowiem pod uwagę odwzorowanie h^e, dla którego $e(p) = q$. Do reguły podstawiania należy zatem para: $\langle\{p\}, \{h^e(p)\}\rangle = \langle\{p\}, \{(e(p))\}\rangle = \langle\{p\}, \{q\}\rangle$. Ponieważ $\{p\} \nvDash_{KRZ} q$, więc w KRZ r e g u ł a p o d s t a w i a n i a n o r m a l n a n i e j e s t.

§ 3. System aksjomatyczny KRZ

W poprzednim paragrafie opisaliśmy KRZ metodą semantyczną. Teraz, zgodnie z planem naszkicowanym w rozdziale I, zaprezentujemy syntaktyczną wersję tego rachunku, budując system aksjomatyczny KRZ.

W §3 rozdziału I omówiliśmy ogólnie sposób konstrukcji systemu aksjomatycznego. U podstaw systemu, który zamierzamy stworzyć, leżą nasze intuicje językowe, związane z posługiwaniem się w języku naturalnym spójnikami zdaniowymi: „i", „lub", „jeżeli, to", „nieprawda, że". Wybierając aksjomaty i reguły pierwotne systemu kierować się będziemy ich intuicyjną oczywistością.

Aksjomatem naszego systemu KRZ będzie każda formuła powstająca przez uszczegółowienie któregokolwiek z poniższych schematów, tj. wpisanie w miejsce występujących w nich greckich liter – dowolnych wyrażeń sensownych KRZ:

S c h e m a t y a k s j o m a t ó w KRZ

Ax. 1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$

Ax. 2 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ sylogizm hipotetyczny

Ax. 3	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	prawo komutacji
Ax. 4	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$	prawo skracania
Ax. 5	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 6	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 7	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$	prawo mnożenia następników
Ax. 8	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 9	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 10	$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$	prawo dodawania poprzedników
Ax. 11	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$	mocne prawo kontrapozycji

Podstawiając w schematach aksjomatów wyrażenia sensowne w miejsce liter greckich przestrzegamy zasady, by **każde** wystąpienie podstawianej litery zastąpić **tą samą** formułą. Jak wiemy, zbiór wyrażeń sensownych języka KRZ jest nieskończony. Skutkiem tego, przez prawidłowe zastępowanie liter greckich formułami, z każdego z jedenastu schematów uzyskać można nieskończenie wiele aksjomatów. Tak więc aksjomatami opartymi na schemacie Ax. 1 będą między innymi następujące wyrażenia sensowne:

$$p \to (q \to q),$$
$$p \to (p \to p),$$
$$(p \vee q) \to (r \to r),$$
$$\neg r \to ((p \wedge q) \to (p \wedge q)).$$

Podkreślmy, że na aksjomatykę tworzonego systemu KRZ składa się **nieskończenie wiele** formuł i że każda z nich jest zbudowana według jednego z jedenastu schematów.

Jedyną **regułą pierwotną** naszego systemu KRZ będzie reguła elementarna o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

zwana **regułą odrywania (RO)**. Często w literaturze przedmiotu używa się też jej łacińskiej nazwy: *modus ponens.*

Przenieśmy teraz na grunt powstającego systemu aksjomatycznego KRZ definicję tezy, której ogólne sformułowanie podaliśmy w § 3 rozdziału I.

Definicja tezy KRZ WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO KRZ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KRZ,

ALBO (2) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA.

W myśl przytocznej definicji tezą KRZ jest każda formuła wyprowadzalna z aksjomatów systemu przez skończeniekrotne stosowanie reguły odrywania.

Na prostym przykładzie zademonstrujemy, jaki wyraz graficzny przyjmuje uzasadnienie, że pewna formuła jest tezą KRZ. Aby wykazać, że formuła **$p \to p$ jest tezą** naszego systemu, konstruujemy skończony ciąg formuł, zwany jej **dowodem**, spełniający warunki wyliczone w definicji tezy. Ciąg ten numerujemy po lewej i dokładnie opisujemy po prawej stronie, wskazując w przypadku aksjomatu schemat, z którego powstał, a w przypadku formuły uzyskanej przy pomocy reguły odrywania numery tych wierszy dowodu, które były jej przesłankami:

1.	$((p \to (q \to q)) \to (p \to p)$	Ax. 1 $\alpha/p \to (q \to q)$, β/p
2.	$p \to (q \to q)$	Ax. 1 α/p, β/q
3.	$p \to p$	RO 1, 2

Zauważmy, że w analogiczny sposób jak tezy $p \to p$ dowiedziemy każdego wyrażenia sensownego opartego na schemacie $\alpha \to \alpha$. Praktyczniej więc będzie dowieść schematu $\alpha \to \alpha$, niż sporządzać osobne, identycznie przebiegające dowody tez: $q \to q$, $r \to r$, $(p \wedge q) \to (p \wedge q)$, itd. Jeśli bowiem dowiedziemy schematu tezy, to wpisując wszędzie w dowodzie w miejsce liter greckich odpowiednie wyrażenia sensowne przekształcamy go w dowód każdej z nieskończenie licznych tez opartych na tym samym schemacie. Ze względów praktycznych będziemy więc od tej pory przedstawiać dowody schematów, a nie poszczególnych tez. Oto przykłady:

(T1) $\alpha \to \alpha$ prawo tożsamości

1.	$(\alpha \to (\beta \to \beta)) \to (\alpha \to \alpha)$	Ax. 1 $\alpha/\alpha \to (\beta \to \beta)$, β/α
2.	$\alpha \to (\beta \to \beta)$	Ax. 1
3.	$\alpha \to \alpha$	RO 1, 2

(T2) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ prawo symplifikacji

1.	$\beta \to (\alpha \to \alpha)$	Ax. 1 α/β, β/α
2.	$(\beta \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha))$	Ax. 3 α/β, β/α, γ/α
3.	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	RO 2, 1

W § 3 rozdziału I wiele miejsca poświęciliśmy kwestii „bezpiecznego”, nie rozszerzającego systemu, wzbogacania asortymentu środków dowodowych. Doszliśmy do wniosku, że do każdego dowodu można wpisać każdą wcześniej udowodnioną formułę (tezę) oraz że można oprócz reguł pierwotnych stosować w dowodach tzw. reguły wyprowadzalne. W chwili obecnej, gdy zaczynamy dowodzić pierwszych tez, pytanie o reguły wyprowadzalne w naszym systemie aksjomatycznym KRZ staje się bardzo aktualne. Nim jednak przypomnimy definicję reguły wyprowadzalnej, przenieśmy na grunt konstruowanego systemu pojęcie relacji dowiedlności:

DEFINICJA RELACJI DOWIEDLNOŚCI W KRZ FORMUŁA α JEST DOWIEDLNA W KRZ ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{d\text{-}KRZ} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha(\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),

ALBO (2) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KRZ,

ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA.

Koncepcja dowiedlności ma zastosowanie w definicji reguły wyprowadzalnej:

DEFINICJA REGUŁY WYPROWADZALNEJ W KRZ REGUŁA JEST WYPROWADZALNA W SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM KRZ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \vdash_{d\text{-}KRZ} \alpha$.

W przypadku, gdy pragniemy uzasadnić wyprowadzalność pewnej reguły elementarnej, wystarczy wykazać, że z przesłanek jej pary podstawowej dowiedlny jest na gruncie KRZ jej wniosek. Uzasadnienie tego faktu przyjmuje więc postać schematu dowodu, który można w razie potrzeby uszczegółowić tak, aby świadczył o zachodzeniu relacji dowiedlności między przesłankami a wnioskiem konkretnej pary należącej do rozważanej reguły.

A oto pierwsze spośród reguł wyprowadzalnych w KRZ, wraz z uzasadnieniem ich wyprowadzalności w naszym systemie aksjomatycznym:

(RKom) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$ Reguła komutacji

Aby uzasadnić wyprowadzalność reguły komutacji w KRZ, wykażemy, że zachodzi $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash_{d\text{-}KRZ} \beta \to (\alpha \to \gamma)$.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	Ax. 3
3.	$\beta \to (\alpha \to \gamma)$	RO 2, 1

(RPI) $\dfrac{\begin{matrix}\alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma\end{matrix}}{\alpha \to \gamma}$ Reguła przechodniości implikacji

Aby uzasadnić wyprowadzalność reguły przechodniości implikacji w KRZ, wykażemy, że zachodzi $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash_{d\text{-}KRZ} \alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\beta \to \gamma$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	Ax. 2
4.	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	RO 3, 1
5.	$\alpha \to \gamma$	RO 4, 2

(RP) $\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$ Reguła poprzedzania

Aby uzasadnić wyprowadzalność reguły poprzedzania w KRZ, wykażemy, że zachodzi $\{\alpha\} \vdash_{d\text{-}KRZ} \beta \to \alpha$.

1.	α	założenie
2.	$\beta \to (\alpha \to \alpha)$	Ax. 1 α/β, β/α
3.	$(\beta \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha))$	Ax. 3 α/β, β/α, γ/α
4.	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	RO 3, 2
5.	$\beta \to \alpha$	RO 4, 1

(PRO) $$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \quad \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$$ Poprzedzona reguła odrywania

Aby uzasadnić wyprowadzalność poprzedzonej reguły odrywania w KRZ, wykażemy, że zachodzi $\{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta\} \vdash_{d\text{-}KRZ} \alpha \to \gamma$.

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\alpha \to \beta$	założenie
3.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$	Ax. 2 $\gamma/\alpha \to \gamma$
4.	$(\beta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$	RO 3, 2
5.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	Ax. 3
6.	$\beta \to (\alpha \to \gamma)$	RO 5, 1
7.	$\alpha \to (\alpha \to \gamma)$	RO 4, 6
8.	$(\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	Ax. 4 β/γ
9.	$\alpha \to \gamma$	RO 8, 7

W dowodach kolejnych formuł będziemy wykorzystywali zarówno udowodnione wcześniej tezy, jak też reguły, których wyprowadzalność w systemie KRZ właśnie wykazaliśmy. Jak pamiętamy z rozważań w § 3 rozdziału I, użycie tych dodatkowych środków dowodowych nie zmieni naszego systemu. Dowody, w których korzystamy z dowiedzionych tez i wyprowadzonych reguł, można łatwo zastąpić dowodami dłuższymi, ale odwołującymi się wyłącznie do pierwotnych środków dowodowych. Dopuszczając nowe sposoby uzasadniania wierszy dowodowych czynimy dowody krótszymi i czytelniejszymi. Oto dalsze przykłady:

(T3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ sylogizm Fregego

1.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$	Ax. 2 $\gamma/\alpha \to \gamma$
2.	$(\beta \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$	RKom 1
3.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	Ax. 3
4.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$	RPI 3, 2

5.	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))) \to (((\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$	Ax. 2 $\alpha/\alpha \to \beta$, $\beta/\alpha \to (\alpha \to \gamma)$, $\gamma/\alpha \to \gamma$
6.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$	RPI 4, 5
7.	$((\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$	RKom 6
8.	$(\alpha \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$	Ax. 4 β/γ
9.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	RO 7, 8

(T4) $\neg\neg\alpha \to \alpha$ mocne prawo podwójnego przeczenia

1.	$(\neg\alpha \to \neg(\beta \to \beta)) \to ((\beta \to \beta) \to \alpha)$	Ax. 11 $\beta/\beta \to \beta$
2.	$(\beta \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg(\beta \to \beta)) \to \alpha)$	RKom 1
3.	$\beta \to \beta$	T1 α/β
4.	$(\neg\alpha \to \neg(\beta \to \beta)) \to \alpha$	RO 2, 3
5.	$(\neg\neg(\beta \to \beta) \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \neg(\beta \to \beta))$	Ax. 11 $\alpha/\neg(\beta \to \beta)$, $\beta/\neg\alpha$
6.	$(\neg\neg(\beta \to \beta) \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$	RPI 5, 4
7.	$\neg\neg\alpha \to (\neg\neg(\beta \to \beta) \to \neg\neg\alpha)$	T2 $\alpha/\neg\neg\alpha$, $\beta/\neg\neg(\beta \to \beta)$
8.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	RPI 7, 6

(T5) $\alpha \to \neg\neg\alpha$ słabe prawo podwójnego przeczenia

1.	$\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$	T4 $\alpha/\neg\alpha$
2.	$(\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)$	Ax. 11 $\alpha/\neg\neg\alpha$, β/α
3.	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	RO 2, 1

(T6) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ słabe prawo transpozycji

1.	$(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\beta))$	Ax. 2 $\alpha/\neg\neg\alpha$, β/α $\gamma/\neg\beta$
2.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	T4
3.	$(\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$	RO 1, 2
4.	$(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	Ax. 11 $\alpha/\neg\alpha$
5.	$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	RPI 3, 4

(T7) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ słabe prawo kontrapozycji

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \neg\neg\beta) \to (\alpha \to \neg\neg\beta))$ — Ax. 2 $\gamma/\neg\neg\beta$
2. $(\beta \to \neg\neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\neg\beta))$ — RKom 1
3. $\beta \to \neg\neg\beta$ — T5 α/β
4. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\neg\beta)$ — RO 2, 3
5. $(\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ — T6 $\beta/\neg\beta$
6. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ — RPI 4, 5

(T8) $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ mocne prawo transpozycji

1. $(\neg\beta \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\beta \to \alpha))$ — Ax. 2 $\alpha/\neg\beta$, $\beta/\neg\neg\alpha$, γ/α
2. $(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to ((\neg\beta \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha))$ — RKom 1
3. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ — T4
4. $(\neg\beta \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha)$ — RO 2, 3
5. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\neg\alpha)$ — T7 $\alpha/\neg\alpha$
6. $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$ — RPI 5, 4

(T9) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ prawo przepełnienia

1. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ — T2 $\beta/\neg\beta$
2. $(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \beta)$ — T8 α/β, β/α
3. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ — RPI 1, 2

(T10) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ słabe prawo Claviusa

1. $(\alpha \to (\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha))) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha)))$ — T3 $\beta/\neg\alpha$, $\gamma/\neg(\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha))$ — T9 $\beta/\neg(\alpha \to \alpha)$
3. $(\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha))$ — RO 1, 2
4. $(\alpha \to \neg(\alpha \to \alpha)) \to ((\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha)$ — T6 $\beta/\alpha \to \alpha$
5. $(\alpha \to \neg\alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha)$ — RPI 3, 4
6. $(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)$ — RKom 5
7. $\alpha \to \alpha$ — T1
8. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ — RO 6, 7

(T11) $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ mocne prawo Claviusa

1. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$ — T10 $\alpha/\neg\alpha$
2. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ — T4
3. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$ — RPI 1, 2
4. $(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ — T7 $\alpha/\neg\alpha$, β/α
5. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ — RPI 4, 3

(T12) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ słaby dylemat destrukcyjny

1. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ — T7
2. $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ — RP 1
3. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha))$ — RKom 2
4. $(\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \neg\alpha))$ — T3 $\beta/\neg\beta$, $\gamma/\neg\alpha$
5. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \neg\alpha))$ — RPI 3, 4
6. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ — T10
7. $(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)$ — RP 6
8. $((\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) \to (((\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \neg\alpha)) \to$ $\to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$ — T3 $\alpha/\alpha \to \neg\beta$, $\beta/\alpha \to \neg\alpha$, $\gamma/\neg\alpha$
9. $((\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \to \neg\alpha)) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ — RO 8, 7
10. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ — RPI 5, 9

Zakończmy w tym miejscu listę przykładów. Ostatnie dowody prowadziliśmy niemal wyłącznie przy użyciu wtórnych środków dowodowych: reguł wyprowadzalnych i dowiedzionych wcześniej tez. To dzięki nim dowody te są czytelne i względnie krótkie. Gdyby konsekwentnie korzystać tylko z aksjomatów i reguły odrywania, dowody tych samych tez stałyby się bardzo długie, a przez to i mało przejrzyste.

Postępując w sposób opisany w §3 rozdziału I wzbogacamy z kolei o nowe środki dowodowe relację dowiedlności, przekształcając ją tym samym w relację inferencji:

DEFINICJA RELACJI INFERENCJI W KRZ FORMUŁA α JEST INFEROWALNA W KRZ ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),

ALBO (2) TEZĄ KRZ (W SZCZEGÓLNOŚCI — AKSJOMATEM OPARTYM NA KTÓRYMŚ ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KRZ),

ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA BĄDŹ DOWOLNEJ REGUŁY WYPROWADZALNEJ W KRZ.

Wszystkie ogólne własności przysługujące relacji inferencji (była o nich mowa w lematach 8-11. §3 rozdziału I), przysługują również relacji inferencji w KRZ. Przypomnijmy je tutaj, już bez dowodów, za to uszczegółowione w sposób odpowiedni dla KRZ.

LEMAT 1 (i) $\Phi \vdash_{d-KRZ} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha$;
(ii) $\emptyset \vdash_{KRZ} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TEZĄ KRZ;
(iii) $\Phi \vdash_{KRZ} \Phi$;
(iv) JEŚLI $\Phi \vdash_{KRZ} \Psi$ ORAZ $\Psi \vdash_{KRZ} \Omega$, TO $\Phi \vdash_{KRZ} \Omega$;
(v) JEŚLI $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha$ ORAZ $\Phi \subset \Psi$, TO $\Psi \vdash_{KRZ} \alpha$.

Relacji inferencji w KRZ przysługują jednak, oprócz wymienionych w lemacie 1, pewne dodatkowe własności płynące z takiego, a nie innego sposobu rozumienia w KRZ stałych logicznych, w szczególności implikacji i negacji. Najważniejsze z nich, formułowane w postaci tzw. twierdzeń o dedukcji, mają istotne znaczenie dla praktyki dowodowej.

TWIERDZENIE 4 (O DEDUKCJI WPROST)
JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \beta$, TO $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha \to \beta$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \beta$. Wnioskujemy stąd, wobec definicji relacji inferencji w KRZ, że istnieje skończony ciąg formuł uzasadniający inferowalność β ze zbioru $\Phi \cup \{\alpha\}$. Ponieważ ciąg ten jest skończony, znajduje się w nim skończona liczba formuł ze zbioru Φ pełniących rolę założeń. Tworzą one zbiór $\Psi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. A zatem: $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \beta$. Z faktu, że zachodzi tu inferencja i z lematu 1 (i), wnioskujemy, że $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-KRZ} \beta$. Oznacza to, że istnieje skończony ciąg formuł Π: $\gamma_1, ..., \gamma_k$, w którym $\gamma_k = \beta$. Ten ciąg, uzasadniający dowiedlność β ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$, zbudowany jest wyłącznie przy użyciu pierwotnych środków dowodowych. Stanowi on podstawę konstrukcji nowego ciągu formuł Ω:

$$(\Omega)\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \alpha \to \gamma_1,\ \alpha \to \gamma_2, ..., \alpha \to \gamma_k.$$

Ostatnim wyrazem ciągu Ω jest formuła $\alpha \to \beta$. Wykażemy, że Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Należy więc umotywować zgodnie z definicją relacji inferencji obecność każdej z formuł $\alpha \to \gamma_m$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$ w ciągu Ω. W tym celu prześledzimy powody, dla których dowolna formuła γ_m mogła się znaleźć w pierwotnym ciągu Π. Zgodnie z definicją relacji dowiedlności formuła γ_m jest

albo (1) założeniem ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha\}$,

albo (2) aksjomatem,
albo (3) formułą uzyskaną przez zastosowanie reguły odrywania do pewnych wyrazów γ_r, γ_t wcześniejszych w ciągu Π od γ_m.

(1) Gdy $\gamma_m \in \Psi$, wówczas obecność w ciągu Ω formuły $\alpha \to \gamma_m$ uzasadniamy zastosowaniem reguły poprzedzania, wyprowadzalnej w naszym systemie, do właściwego spośród założeń $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Jeśli natomiast $\gamma_m = \alpha$, wtedy formuła $\alpha \to \gamma_m$, zbudowana według schematu (T1) $\alpha \to \alpha$, jest tezą i jako taka może się znaleźć w ciągu Ω.
(2) Jeśli formuła γ_m jest aksjomatem, wtedy formułę $\alpha \to \gamma_m$ uzyskujemy z tego aksjomatu przez zastosowanie doń wyprowadzalnej reguły poprzedzania i możemy wpisać ją do ciągu Ω jako tezę.
(3) Rozpatrzmy w końcu przypadek, gdy formuła γ_m jest wynikiem stosowania reguły odrywania do wyrażeń γ_r, γ_t wcześniejszych w Π od γ_m. Załóżmy dla indukcji, że wyrażenie $\alpha \to \gamma_r$, a także wyrażenie $\alpha \to \gamma_t (= \alpha \to (\gamma_r \to \gamma_m))$ znalazły się już w ciągu Ω prawomocnie. W tej sytuacji uzasadniamy obecność formuły $\alpha \to \gamma_m$ w ciągu Ω zastosowaniem wyprowadzalnej w naszym systemie poprzedzonej reguły odrywania do formuł $\alpha \to \gamma_r$, $\alpha \to \gamma_t$.

Wykazaliśmy zatem, że każde wyrażenie ciągu Ω znalazło się w nim dzięki zaistnieniu jednej z przyczyn wymienionych w definicji relacji inferencji. Ciąg Ω uzasadnia więc inferowalność formuły $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Ponieważ jednak zbiór Ψ zawiera się w zbiorze Φ, konkludujemy wobec lematu 1(v), że $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha \to \beta$ •

Oto przykład, który unaoczni czytelnikowi sposób konstruowania ciągu Ω, opisany ogólnie w dowodzie twierdzenia o dedukcji wprost. Ciąg Π uzasadnia inferencję $\{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \alpha, \beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$, natomiast ciąg Ω jest jego modyfikacją uzasadniającą inferencję $\{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \alpha\} \vdash_{KRZ} \beta \to \gamma$.

Π:		Ω:	
		0′. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	zał.
		0″. α	zał.
1. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	zał.	1. $\beta \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	RP 0′
2. α	zał.	2. $\beta \to \alpha$	RP 0″
3. β	zał.	3. $\beta \to \beta$	T1
4. $\alpha \to (\beta \to \beta)$	Ax. 1	4. $\beta \to (\alpha \to (\beta \to \beta))$	teza

5. $(\alpha \to (\beta \to \beta)) \to$ $\to (\beta \to (\alpha \to \beta))$	Ax. 3	5. $\beta \to ((\alpha \to (\beta \to \beta)) \to$ $\to (\beta \to (\alpha \to \beta)))$	teza
6. $\beta \to (\alpha \to \beta)$	RO 5, 4	6. $\beta \to (\beta \to (\alpha \to \beta))$	PRO 5, 4
7. $\alpha \to \beta$	RO 6, 3	7. $\beta \to (\alpha \to \beta)$	PRO 6, 3
8. $\alpha \to \gamma$	RO 1, 7	8. $\beta \to (\alpha \to \gamma)$	PRO 1, 7
9. γ	RO 8, 2	9. $\beta \to \gamma$	PRO 8, 2

Wyrazy ciągu Ω oznaczone numerami 4 i 5 są tezami uzyskanymi z Ax. 1 i Ax. 3 przez zastosowanie reguły poprzedzania.

TWIERDZENIE 5 (O DEDUKCJI NIEWPROST — SŁABE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\Phi \vdash_{KRZ} \neg\alpha$.

Dowód. Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \gamma$ i $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \neg\gamma$. Na mocy twierdzenia 4 z (1) otrzymujemy (2) $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha \to \gamma$ i $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha \to \neg\gamma$. Bezpośrednio z (2) mamy (3) $\Phi \vdash_{KRZ} \{\alpha \to \gamma, \alpha \to \neg\gamma\}$. Wykorzystując T12 i RO uzasadnimy inferencję (4) $\{\alpha \to \gamma, \alpha \to \neg\gamma\} \vdash_{KRZ} \neg\alpha$. Z (3) i (4) na mocy lematu 1(iv) wnioskujemy, że $\Phi \vdash_{KRZ} \neg\alpha$, co kończy dowód twierdzenia 5 •

TWIERDZENIE 6 (O DEDUKCJI NIEWPROST — MOCNE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha$.

Dowód. Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$. Z (1), na mocy twierdzenia 5, wnioskujemy, że (2) $\Phi \vdash_{KRZ} \neg\neg\alpha$. Korzystając z T4 i RO uzasadniamy inferencję (3) $\{\neg\neg\alpha\} \vdash_{KRZ} \alpha$. Lemat 1 (iv) pozwala z (2) i (3) wyprowadzić $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha$, co kończy dowód •

Z udowodnionych właśnie twierdzeń o dedukcji, jako proste wnioski otrzymujemy ich wersje szczególnie użyteczne w praktyce dowodowej:

TWIERDZENIE O DEDUKCJI WPROST (TDW)
JEŻELI $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \vdash_{KRZ} \beta$, TO $\varnothing \vdash_{KRZ} \alpha_1 \to (...(\alpha_k \to \beta)...)$.

SŁABE TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIEWPROST (STDN)
JEŻELI $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\varnothing \vdash_{KRZ} \alpha_1 \to (...(\alpha_k \to \neg\beta)...)$.

MOCNE TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIEWPROST (MTDN)
JEŻELI $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \neg\beta\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\varnothing \vdash_{KRZ} \alpha_1 \to (...(\alpha_k \to \beta)...)$.

Formułę kształtu: $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (...(\alpha_n \to \beta)...))$ będziemy nazywać implikacją wstępującą o poprzednikach $\alpha_1, ..., \alpha_n$ i następniku β. Treść TDW wyrazić więc możemy następująco: dana implikacja wstępująca jest tezą KRZ (por. lemat 1(ii)), o ile między zbiorem jej poprzedników a jej następnikiem zachodzi na gruncie KRZ relacja inferencji. Natomiast STDN i MTDN głoszą taką zależność: dana implikacja wstępująca jest tezą KRZ, o ile z jej poprzedników i wyrażenia sprzecznego z następnikiem inferowalna jest dowolna para formuł wzajemnie sprzecznych.

Gdy więc chodzi o odpowiedź na pytanie, czy określona formuła jest tezą, wystarczy wobec udowodnionych twierdzeń o dedukcji wykazać zachodzenie relacji inferencji między odpowiednimi zbiorami formuł. Zwykle jest to znacznie łatwiejsze niż podanie aksjomatycznego dowodu. Oto kilka przykładów stosowania twierdzeń o dedukcji:

(1) Wykażemy, że (T13) $\boldsymbol{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)}$ jest schematem tez KRZ. W tym celu najpierw dowiedziemy, że zachodzi następująca inferencja: $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash_{KRZ} \beta$. Konstruujemy więc ciąg spełniający wymogi definicji relacji inferencji:

1. α	założenie
2. $\alpha \to \beta$	założenie
3. β	RO 2, 1

Ciąg ten uzasadnia inferencję $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash_{KRZ} \beta$, a zatem, zgodnie z TDW: $\varnothing \vdash_{KRZ} \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$. Wobec lematu 1(ii) oznacza to, że $\boldsymbol{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)}$ jest schematem tez KRZ.

(2) Wykażemy, że (T14) $\boldsymbol{((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha}$ jest schematem tez KRZ. Dowiedziemy w tym celu, że ze zbioru założeń $\{(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta, \alpha\}$ inferowalna jest pewna para formuł sprzecznych. Oto zbudowany zgodnie z definicją relacji inferencji ciąg, który fakt ten uzasadnia:

1. $(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta$	założenie
2. α	założenie
3. $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to (\alpha \to \beta)$	Ax. 5. $\alpha/\alpha \to \beta$, $\beta/\neg\beta$
4. $\alpha \to \beta$	RO 3, 1
5. $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\beta$	Ax. 6 $\alpha/\alpha \to \beta$, $\beta/\neg\beta$
6. $\neg\beta$	RO 5, 1
7. β	RO 4, 2

W powyższym ciągu jako wyraz 6 i 7 pojawiły się wyrażenia wzajemnie sprzeczne: $\neg\beta$ i β. Posługując się T9 i RO w kolejnych krokach można wywnioskować **dowolną** sprzeczność γ i $\neg\gamma$.

8. $\beta \to (\neg\beta \to \gamma)$	T9 α/β, β/γ
9. $\neg\beta \to \gamma$	RO 8, 7
10. γ	RO 9, 6
11. $\beta \to (\neg\beta \to \neg\gamma)$	T9 α/β, $\beta/\neg\gamma$
12. $\neg\beta \to \neg\gamma$	RO 11, 7
13. $\neg\gamma$	RO 12, 6

Jest więc prawdą, że ze zbioru założeń $\{(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta, \alpha\}$ inferowalna jest **dowolna** para formuł sprzecznych, a zatem możemy powołać się na STDN i wywnioskować, że $\vdash_{KRZ}((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$, a to, wobec lematu 1 (ii), oznacza, że T14 jest schematem tez KRZ.

Zwróćmy uwagę, że wobec prawa przepełnienia (T9) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, z **pewnej** pary formuł sprzecznych inferowalna jest **dowolna** para formuł sprzecznych. Pamiętajmy o tym, gdy zamierzamy korzystać z twierdzeń o dedukcji niewprost. Ciągi uzasadniające odpowiednie inferencje uznawać będziemy za zakończone z momentem pojawienia się pierwszej sprzeczności.

(3) Wykażemy, że (T15) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ (zwana prawem Peirce'a) jest schematem tez KRZ. Dowodzimy w tym celu, że ze zbioru założeń $\{(\alpha \to \beta) \to \alpha, \neg\alpha\}$ inferowalna jest sprzeczność.

1. $(\alpha \to \beta) \to \alpha$	założenie
2. $\neg\alpha$	założenie
3. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$	T9
4. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	RKom 3
5. $\alpha \to \beta$	RO 4, 2
6. α	RO 1, 5

Wykazaliśmy, że $\{(\alpha \to \beta) \to \alpha, \neg\alpha\} \vdash_{KRZ} \{\alpha, \neg\alpha\}$. Wynika stąd, wobec tezy T9, że $\{(\alpha \to \beta) \to \alpha, \neg\alpha\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$, a MTDN pozwala wnioskować, że $\varnothing \vdash_{KRZ} ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$. Oznacza to, że T15 jest schematem tez KRZ.

Schematy tez T13 - T15 miały postać implikacji wstępujących. Czy jednak twierdzenia o dedukcji można wykorzystać do wykazywania, że tezą KRZ jest formuła z głównym funktorem innym niż implikacja? W takich przypadkach stosujemy wyłącznie STDN i MTDN, uznając

całą dowodzoną formułę zanegowaną, bądź pozbawioną negacji (gdy głównym funktorem jest $\neg$), za jedyne założenie w ciągu uzasadniającym stosowną, prowadzącą do sprzeczności, inferencję.

(4) Wykażemy, że jest schematem tez KRZ (T16) $\alpha \vee \neg\alpha$ (zwana prawem wyłączonego środka). Głównym funktorem T16 jest alternatywa. By móc skorzystać z MTDN, ze zbioru $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\}$ wyinferujemy parę formuł sprzecznych:

1. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	założenie
2. $\alpha \to (\alpha \vee \neg\alpha)$	Ax. 8 $\beta/\neg\alpha$
3. $\neg\alpha \to (\alpha \vee \neg\alpha)$	Ax. 9 $\beta/\neg\alpha$
4. $(\alpha \to (\alpha \vee \neg\alpha)) \to (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha)$	T7 $\beta/\alpha \vee \neg\alpha$
5. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha$	RO 4, 2
6. $\neg\alpha$	RO 5, 1
7. $(\neg\alpha \to (\alpha \vee \neg\alpha)) \to (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \alpha)$	T8 $\beta/\alpha \vee \neg\alpha$
8. $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \alpha$	RO 7, 3
9. α	RO 8, 1

W wierszach 6 i 9 pojawiły się formuły sprzeczne, a zatem $\{\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\} \vdash_{KRZ} \{\gamma, \neg\gamma\}$. Z pomocą MTDN możemy stąd wnioskować, że $\varnothing \vdash_{KRZ} \alpha \vee \neg\alpha$, co wobec lematu 1 (ii) oznacza, że T16 jest schematem tez KRZ.

Na zakończenie opisu syntaktycznej wersji KRZ udowodnimy, że relacja inferencji posiada w tym rachunku jeszcze jedną, istotną i użyteczną własność:

LEMAT 2 JEŚLI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \gamma$ ORAZ $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$, TO TAKŻE $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KRZ} \gamma$ oraz że $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$. Korzystając z twierdzenia 4 wnioskujemy z tych założeń, że $\Phi \vdash_{KRZ} \alpha \to \gamma$ oraz $\Phi \vdash_{KRZ} \beta \to \gamma$, co zapisać możemy także $\Phi \vdash_{KRZ} \{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\}$. Uzasadnimy teraz, że relacja inferencji zachodzi pomiędzy zbiorem $\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\}$ a formułą $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$.

1. $\alpha \to \gamma$	założenie
2. $\beta \to \gamma$	założenie
3. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$	Ax. 10
4. $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$	RO 3, 1
5. $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$	RO 4, 2

A zatem $\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\} \vdash_{KRZ} (\alpha \vee \beta) \to \gamma$. Wobec lematu 1 (iv) prawdą jest więc, że $\Phi \vdash_{KRZ} (\alpha \vee \beta) \to \gamma$. Możemy stąd dalej wnioskować, że $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$, gdyż wystarczy ciąg $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ stanowiący uzasadnienie dla $\Phi \vdash_{KRZ} (\alpha \vee \beta) \to \gamma$ wydłużyć o dwie formuły:

$\gamma_{n+1} = \alpha \vee \beta$ założenie

$\gamma_{n+2} = \gamma$ RO n, n + 1

aby uzasadniał inferowalność γ ze zbioru założeń $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\}$ •

§ 4. *Twierdzenie o pełności dla KRZ*

Spróbujemy teraz porównać zebrane w §§ 2 i 3 wyniki semantycznej i syntaktycznej analizy stałych logicznych KRZ. W jakim wzajemnym stosunku pozostają zbiory tautologii i tez KRZ? Odpowiedź na to pytanie pozwoli nam stwierdzić, czy mamy do czynienia z dwiema wersjami, dwiema niezależnymi charakterystykami tego samego rachunku logicznego. Podejmijmy zatem próbę dowiedzenia twierdzenia o pełności dla KRZ (por. § 4 rozdziału I), głoszącego identyczność porównywanych zbiorów tautologii i tez KRZ.

TWIERDZENIE 7 (O PEŁNOŚCI DLA KRZ)
DLA DOWOLNEGO WYRAŻENIA SENSOWNEGO α JĘZYKA KRZ: α JEST TEZĄ KRZ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TAUTOLOGIĄ KRZ.

Dowód. Zgodnie ze schematem dowodu twierdzenia o pełności uzasadnimy najpierw fakt

(I) Każda teza KRZ jest tautologią KRZ. Jak pamiętamy, należy w tym celu przeprowadzić rozumowanie indukcyjne ze względu na długość dowodu danej tezy (por. uwagi kończące część I szkicu dowodu twierdzenia o pełności w § 4 rozdziału I). Sprowadza się ono do wykazania, że:

1° Każdy schemat Ax. 1 - Ax. 11 jest schematem tautologii (tę część dowodu pozostawiamy Czytelnikowi jako proste, lecz dosyć długie ćwiczenie) oraz że:

2° jedyna reguła pierwotna systemu aksjomatyczngo KRZ jest niezawodna.

Ustaliliśmy już, że reguła odrywania jest normalna (por. przykład (1) ze str. 46). Korzystając z twierdzenia 1 w § 2 rozdziału I wnioskujemy

stąd, że jest ona także regułą niezawodną KRZ, co kończy I część dowodu twierdzenia o pełności.

Aby teraz udowodnić, że

(II) Każda tautologia KRZ jest tezą KRZ, skorzystamy z twierdzenia Assera (twierdzenie 3, § 4, rozdział I), obowiązującego również na gruncie KRZ. Przypomnijmy je teraz bez dowodu, ale w odpowiedniej dla KRZ stylizacji:

TWIERDZENIE 8 (O RELATYWNYCH NADSYSTEMACH ZUPEŁNYCH DLA KRZ)
JEŻELI FORMUŁA α NIE JEST INFEROWALNA Z Ω, TO ISTNIEJE ZBIÓR FORMUŁ KRZ Π^{α}_{Ω} TAKI, ŻE:
(1) $\alpha \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(2) JEŻELI $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{KRZ} \beta$, TO $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(3) JEŻELI $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{KRZ} \alpha$;
(4) $\Omega \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Na gruncie KRZ zbiór Π^{α}_{Ω} posiada, oprócz wymienionych w twierdzeniu 8, jeszcze inne własności, specyficzne dla KRZ:

LEMAT 3 (1) $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(2) $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ ORAZ $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(3) $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(4) $\beta \to \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Dowód. (1 - i) Załóżmy, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i niewprost, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Zatem, wobec definicji relacji inferencji: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{KRZ} \{\beta, \neg\beta\}$. Schematem tezy KRZ jest prawo przepełnienia (T9), zachodzi więc $\varnothing \vdash_{KRZ} \beta \to (\neg\beta \to \alpha)$. Stąd, że $\varnothing \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i lematu 1(v) wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{KRZ} \beta \to (\neg\beta \to \alpha)$, czyli $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{KRZ} \{\beta, \neg\beta, \beta \to (\neg\beta \to \alpha)\}$. Skoro $\{\beta, \neg\beta, \beta \to (\neg\beta \to \alpha)\} \vdash_{KRZ} \alpha$, wobec lematu 1 (iv): $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{KRZ} \alpha$. Oznacza to (por. twierdzenie 8 (2)), że $\alpha \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 8 (1).

(1 - ii) Załóżmy, że $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i niewprost: $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wobec twierdzenia 8 (3) wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{KRZ} \alpha$, a także $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\beta\} \vdash_{KRZ} \alpha$. Lemat 2 pozwala dalej wnioskować, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \neg\beta\} \vdash_{KRZ} \alpha$. Formuła $\beta \vee \neg\beta$ jako schemat tez KRZ (T16) jest inferowalna z dowolnego zbioru formuł, także z Π^{α}_{Ω}. A zatem, korzystając z twierdzenia 8 (2): $\beta \vee \neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Oznacza to, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \neg\beta\} = \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, a tym samym

$\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \alpha$. Ponownie odwołując się do twierdzenia 8 (2) wnioskujemy, że $\alpha \in \Pi_\Omega^\alpha$, co pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 8 (1).

(2-i) Załóżmy, że $\beta \wedge \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$. Zgodnie z definicją relacji inferencji: $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \wedge \gamma$. Oparte na Ax. 5 i Ax. 6 formuły $(\beta \wedge \gamma) \to \beta$ i $(\beta \wedge \gamma) \to \to \gamma$ inferowalne są w szczególności ze zbioru Π_Ω^α. Mamy zatem $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \{\beta \wedge \gamma, (\beta \wedge \gamma) \to \beta, (\beta \wedge \gamma) \to \gamma\}$. Korzystając z reguły odrywania można stąd wnioskować, że również $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta$ oraz $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \gamma$, co w myśl (2) twierdzenia 8 oznacza, że zarówno $\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$, jak i $\gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$.

(2-ii) Załóżmy teraz, że $\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$ i $\gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$. Oznacza to, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \{\beta, \gamma\}$. Wykazujemy, stosując regułę poprzedzania, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \to \gamma$. Również T1 w postaci schematu $\beta \to \beta$ oraz Ax. 7: $(\beta \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to \to (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))$ są inferowalne ze zbioru Π_Ω^α. Zatem $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \{\beta \to \beta, \beta \to \gamma, \beta, (\beta \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))\}$. Stosując regułę odrywania i lemat 1(v) wyprowadzimy wniosek $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \wedge \gamma$, co przez twierdzenie 8 (2) oznacza, że $\beta \wedge \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$.

(3-i) Załóżmy, że $\beta \vee \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$ i przyjmijmy niewprost, że zarówno $\beta \notin \Pi_\Omega^\alpha$, jak i $\gamma \notin \Pi_\Omega^\alpha$. Na mocy twierdzenia 8 (3) wynika stąd, że $\Pi_\Omega^\alpha \cup \{\beta\} \vdash_{KRZ} \alpha$ oraz $\Pi_\Omega^\alpha \cup \{\gamma\} \vdash_{KRZ} \alpha$. Lemat 2 pozwala wyprowadzić dalej wniosek $\Pi_\Omega^\alpha \cup \{\beta \vee \gamma\} \vdash_{KRZ} \alpha$, co przez twierdzenie 8 (2) prowadzi do uznania, że $\alpha \in \Pi_\Omega^\alpha$, co jest sprzeczne z punktem (1) tego twierdzenia.

(3-ii) Należy rozważyć dwa przypadki:

(A) Załóżmy, że $\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$. Zatem $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta$. Ax. 8 w postaci schematu $\beta \to (\beta \vee \gamma)$ jest inferowalny z Π_Ω^α. Łatwo jest wykazać, stosując regułę odrywania, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \vee \gamma$, a przez twierdzenie 8 (2) otrzymujemy: $\beta \vee \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$.

(B) Załóżmy, że $\gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$. Argumentacja analogiczna jak w (A), z wykorzystaniem Ax. 9.

(4-i) Załóżmy, że $\beta \to \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$ oraz niewprost, że $\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$ i $\gamma \notin \Pi_\Omega^\alpha$. Z założeń tych wnosimy, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \{\beta, \beta \to \gamma\}$. A zatem również $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \gamma$, co wobec twierdzenia 8 (2) oznacza, że $\gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$. Ostatnie stwierdzenie pozostaje w sprzeczności z drugą częścią założenia niewprost.

(4-ii) Rozważyć należy dwa przypadki:

(A) Gdy $\beta \notin \Pi_\Omega^\alpha$, to wobec punktu (1) dowodzonego właśnie lematu: $\neg\beta \in \Pi_\Omega^\alpha$, co oznacza, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \neg\beta$. Zastosowanie reguły komutacji do prawa przepełnienia (T9) prowadzi do uznania za schemat tez KRZ

formuły $\Box\beta \to (\beta \to \gamma)$, która wobec tego jest inferowalna ze zbioru Π_Ω^α. Stosując regułę odrywania wykazujemy, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \to \gamma$, co z uwagi na twierdzenie 8 (2) oznacza, że $\beta \to \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$.

(B) Niech teraz $\gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$. Zatem: $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \gamma$. Prawo symplifikacji (T2) w postaci $\gamma \to (\beta \to \gamma)$ również jest inferowalne z Π_Ω^α, zatem stosując regułę odrywania wykazujemy, że $\Pi_\Omega^\alpha \vdash_{KRZ} \beta \to \gamma$. Zgodnie z twierdzeniem 8 (2) oznacza to, że: $\beta \to \gamma \in \Pi_\Omega^\alpha$, co kończy także dowód lematu 3 •

Powróćmy teraz do II części dowodu twierdzenia o pełności dla KRZ. Załóżmy, że α jest tautologią KRZ i przyjmijmy niewprost, że mimo to nie jest tezą aksjomatycznego systemu KRZ, czyli że $\varnothing \nvdash_{KRZ} \alpha$. Na mocy twierdzenia 8 istnieje więc stosowny zbiór $\Pi_\varnothing^\alpha$ (dalej oznaczany Π^α) o własnościach wymienionych w punktach (1)-(4) tego twierdzenia i w punktach (1)-(4) lematu 3.

Rozważmy odwzorowanie v takie, że dla dowolnego $\beta \in \Sigma_{KRZ}$:

$$v(\beta) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \beta \in \Pi^\alpha \\ 0 & \quad \beta \notin \Pi^\alpha \end{cases}$$

Lemat 3 pozwala wnioskować, że tak zdefiniowane odwzorowanie v jest wartościowaniem w KRZ. Tę obserwację uzasadnimy jedynie na przykładzie funktora negacji:

Niech $v(\beta) = \mathbf{1}$. Wtedy z definicji v: $\beta \in \Pi^\alpha$. Wobec słabego prawa podwójnego przeczenia (T5) potrafimy wykazać, że również $\neg\neg\beta \in \Pi^\alpha$. Stąd i z lematu 3 (1) wnioskujemy, że $\neg\beta \notin \Pi^\alpha$. Kolejne zastosowanie definicji v daje $v(\neg\beta) = \mathbf{0}$.

Załóżmy z kolei, że $v(\beta) = \mathbf{0}$. Przez definicję v: $\beta \notin \Pi^\alpha$. Stąd wobec lematu 3 (1): $\neg\beta \in \Pi^\alpha$. Znów stosując definicję v wnioskujemy, że $v(\neg\beta) = \mathbf{1}$.

Stwierdziliśmy tym samym, że odwzorowanie v spełnia warunek nakładany przez definicję wartościowania w KRZ na funktor negacji.

Korzystając z lematu 3 (2-4) Czytelnik bez trudu wykaże, że odwzorowanie v spełnia także warunki stawiane w definicji wartościowania funktorom koniunkcji, alternatywy i implikacji.

Wiemy już więc, że v jest wartościowaniem w KRZ. Z twierdzenia 8 wiemy także, że $\alpha \notin \Pi^\alpha$, a zatem, zgodnie z definicją v: $v(\alpha) = \mathbf{0}$.

Wskazaliśmy więc wartościowanie obalające formułę α, pokazując tym samym, że nie jest ona tautologią. Wniosek ten, sprzeczny z założeniem, kończy dowód twierdzenia o pełności dla KRZ •

Przedstawiony tutaj dowód twierdzenia o pełności dla KRZ świadczy o identyczności zbioru tez i zbioru tautologii KRZ. Zatem obie konstrukcje: semantyczna (§ 2) i syntaktyczna (§ 3) opisują ten sam rachunek logiczny: klasyczny rachunek zdań.

Rozdział III

Intuicjonistyczny rachunek zdań

Filozoficzną bazę intuicjonistycznego rachunku zdań (INT) stanowił *intuicjonizm* – konstruktywistyczny nurt w filozofii matematyki zapoczątkowany w 1907 roku przez holenderskiego matematyka **Leitzena E. Brouwera.** Główne zasady tego kierunku są następujące: budowę matematyki – nie dającej się sprowadzić ani do logiki, ani do języka symbolicznego – należy oprzeć wyłącznie na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnie oczywistej zasadzie indukcji matematycznej. Pozytywnym kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność, podczas gdy niesprzeczność jest zaledwie warunkiem koniecznym ich egzystencji.

KRZ okazał się nieprzydatny do analizy rozumowań przeprowadzanych w obrębie tak pojmowanej matematyki. Wśród tez KRZ jest bowiem wiele odczuwanych jako paradoksalne, gdyż umożliwiają niekonstruktywne dowody, jak np. prawo wyłączonego środka (T16): $\alpha \vee \neg\alpha$. Dopiero w 1930 roku **Alfred Heyting**, posługując się metodą aksjomatyczną, w oparciu o język KRZ stworzył nowy, odpowiadający postulatom intuicjonizmu, intuicjonistyczny rachunek zdań – INT. Równocześnie podjęto próby semantycznego scharakteryzowania tego rachunku. W roku 1932 **Kurt Goedel** wykazał, że żadna tabelkowa charakterystyka funktorów odwołująca się do skończonej liczby wartości logicznych nie jest adekwatna w stosunku do syntaktycznego ujęcia INT. Pierwszy adekwatny opis semantyczny INT poprzez nieskończony ciąg matryc podał w roku 1935 **Stanisław Jaśkowski.** Autorem najpopularniejszej obecnie semantycznej wersji INT jest **Saul Kripke**. Na niej to wzorowane jest ujęcie semantyczne INT przedstawione w § 2 tego rozdziału.

§ 1. Język INT

Wszystkie ogólne uwagi poczynione w § 1 rozdziału I, a dotyczące sposobu konstrukcji języka symbolicznego, pozostają w mocy.

INT, podobnie jak KRZ, jest rachunkiem zdaniowym. Stworzony został pierwotnie w wersji aksjomatycznej będącej modyfikacją aksjomatycznego systemu KRZ. Język symboliczny INT jest zatem dokładnie taki sam jak język KRZ. Przypomnijmy więc tylko (por. § 1 rozdziału II), że spójnikami zdaniowymi analizowanymi na gruncie INT są zwroty badane już w KRZ:

... i ...
... lub ...
jeżeli ..., to ...
nieprawda, że ...

Alfabet języka INT jest identyczny z alfabetem języka KRZ, a definicje prowadzące do określenia zbioru wszystkich wyrażeń sensownych intuicjonizmu Σ_{INT} dokładnie powtarzają znane z poprzedniego rozdziału sformułowania:

Alfabet języka INT. Alfabet ten składa się z trzech następujących grup symboli:

(1) Stałe logiczne: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, zwane odpowiednio funktorami koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji.

(2) Zmienne zdaniowe: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ tworzące zbiór przeliczalny.

(3) Nawiasy: (,).

DEFINICJA WYRAŻENIA JĘZYKA INT WYRAŻENIEM JĘZYKA INT JEST KAŻDY SKOŃCZONY CIĄG SYMBOLI ALFABETU TEGO JĘZYKA.

DEFINICJA WYRAŻENIA SENSOWNEGO JĘZYKA INT WYRAŻENIEM SENSOWNYM JĘZYKA INT JEST TAKIE I TYLKO TAKIE WYRAŻENIE TEGO JĘZYKA, KTÓRE ZOSTAŁO ZBUDOWANE ZGODNIE Z NASTĘPUJĄCYMI REGUŁAMI:

(1) KAŻDA POJEDYNCZA ZMIENNA ZDANIOWA JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM,

(2) JEŻELI α, β SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI, TO $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Można tutaj powtórzyć uwagi podane w § 1 rozdziału II o sposobie rozumienia symboli alfabetu, jak i przykłady ilustrujące proces „ujawniania" logicznej struktury wypowiedzi języka naturalnego poprzez „tłumaczenie" ich na język symboliczny rachunku logicznego.

Podobnie jak w KRZ, podtrzymujemy umowę z § 1 rozdziału I, zgodnie z którą

1° małymi literami alfabetu greckiego oznaczamy poszczególne wyrażenia sensowne, elementy zbioru Σ_{INT};
2° dużymi literami alfabetu greckiego oznaczamy podzbiory zbioru Σ_{INT};
3° opuszczamy zewnętrzne nawiasy okalające całe formuły.

§ 2. Wartościowania w INT

Identyczne w warstwie językowej rachunki KRZ oraz INT w zasadniczy sposób różnią się między sobą pod względem opisu semantycznego. Niestety, na grunt INT nie można przenieść bez zmian prostej koncepcji wartościowania, znanej z KRZ. Odpowiednikiem tego pojęcia w INT jest wiązka wartościowań, konstrukcja dość złożona, której sens przybliżymy kilkoma nieformalnymi uwagami, zanim ostatecznie sprecyzujemy go odpowiednią definicją.

Otóż spróbujmy prawdziwość intuicjonistyczną rozumieć jako dowiedlność na gruncie pewnego ustalonego systemu aksjomatycznego. Innymi słowy: wartość **1** przysługuje wyłącznie tym formułom, które już zostały udowodnione. Wszystkim pozostałym, niezależnie od tego, czy w przyszłości uzyskają dowód czy też nie, przypisano wartość **0**. System aksjomatyczny jest przy tym pojmowany jako całość dynamiczna, rozwijająca się w czasie. Stopniowo przybywa w nim dowodów, co powoduje, że formuły, którym poprzednio przypisaliśmy wartość **0**, w momencie uzyskania dowodu zmieniają ją na wartość **1**. Z drugiej strony, żadna formuła raz udowodniona nie może swego dowodu utracić: w systemie może więc tylko „przybywać prawd". Formuła raz oceniona jako prawdziwa na zawsze zachowuje tę ocenę. Chwilowy stan wiedzy o systemie nazwijmy wartościowaniem intuicjonistycznym. Tak pojęte wartościowanie nie jest izolowane, lecz pozostaje w ściśle określonych związkach z wartościowaniami „wcześniejszymi" i „późniejszymi". Formuły, którym dane wartościowanie przypisuje wartość **0**, miały ją przy każdym z „wcześniejszych" wartościowań. Formuły, którym dane wartościowanie przypisuje wartość **1**, zachowają ją przy każdym wartościowaniu „późniejszym". Wartościowania intuicjonistyczne, wzajemnie powiązane relacją odzwierciedlającą narastanie naszej wiedzy o systemie, tworzą zbiory. Aby uchwycić naszkicowane tu intuicje dotyczące takich zbiorów wartościowań, semantyczna wersja INT operuje pojęciem wiązki wartościowań. Wartościowania należące do tej samej wiązki wiąże relacja **R** – zwrotna i przechodnia. Wyjaśnijmy jeszcze, co znaczą te określenia:

Relacja **R** określona w pewnym zbiorze jest w nim zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element A tego zbioru pozostaje w tej relacji sam ze sobą (symbolicznie: A **R** A).

Relacja **R** określona w pewnym zbiorze jest w nim przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów A, B, C tego zbioru: jeżeli A pozostaje w relacji **R** z B, a B z C, to relacja ta wiąże również elementy A i C (symbolicznie: jeżeli A **R** B i B **R** C, to A **R** C).

DEFINICJA WIĄZKI WARTOŚCIOWAŃ W INT WIĄZKĄ WARTOŚCIOWAŃ W INT NAZYWAMY KAŻDY PODZBIÓR W ZBIORU WSZYSTKICH ODWZOROWAŃ ZBIORU FORMUŁ Σ_{INT} W ZBIÓR $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, W KTÓRYM OKREŚLONA JEST RELACJA ZWROTNA I PRZECHODNIA **R**, A PONADTO DLA DOWOLNEGO ODWZOROWANIA $v \in W$ I DLA DOWOLNYCH FORMUŁ α, β ZE ZBIORU Σ_{INT} SPEŁNIONE SĄ NASTĘPUJĄCE WARUNKI:

(1) JEŚLI $v(\alpha) = \mathbf{1}$, TO DLA DOWOLNEGO ODWZOROWANIA W TAKIEGO, ŻE $v\ \mathbf{R}\ w: w(\alpha) = \mathbf{1}$;
(2) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{1}$ I $v(\beta) = \mathbf{1}$;
(3) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{1}$ LUB $v(\beta) = \mathbf{1}$;
(4) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY DLA DOWOLNEGO ODWZOROWANIA W TAKIEGO, ŻE $v\ \mathbf{R}\ w: w(\alpha) = \mathbf{0}$ LUB $w(\beta) = \mathbf{1}$;
(5) $v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$ WTW, GDY DLA DOWOLNEGO ODWZOROWANIA W TAKIEGO, ŻE $v\ \mathbf{R}\ w: w(\alpha) = \mathbf{0}$.

Z treści definicji wiązki wynika, że niekiedy, dla ustalenia wartości formuły przy określonym wartościowaniu v nie wystarcza znajomość ocen, jakie wartościowanie to przypisuje podformułom badanej formuły. Warunki (4) i (5) świadczą o tym, że wartość formuły implikacyjnej

i negacyjnej ustalić możemy dopiero wtedy, gdy wiemy, z jakimi innymi wartościowaniami v pozostaje w relacji **R** oraz gdy wiemy, jak te inne wartościowania – będziemy je nazywać **pomocniczymi względem v** – oceniają bezpośrednie podformuły badanego wyrażenia sensownego.

Wiązkę wartościowań W określimy jednoznacznie, gdy:
1° wskażemy, w jaki sposób każde należące do niej wartościowanie ocenia poszczególne zmienne zdaniowe;
2° zdefiniujemy zwrotną i przechodnią relację **R** ujawniającą strukturę wzajemnych powiązań między elementami W.

Znajomość struktury związków między wartościowaniami pozwala odpowiedzieć na pytanie, które z wartościowań są pomocnicze względem których. Dowód jedyności tak opisanej wiązki należy prowadzić indukcyjnie względem liczby funktorów występujących w formule.

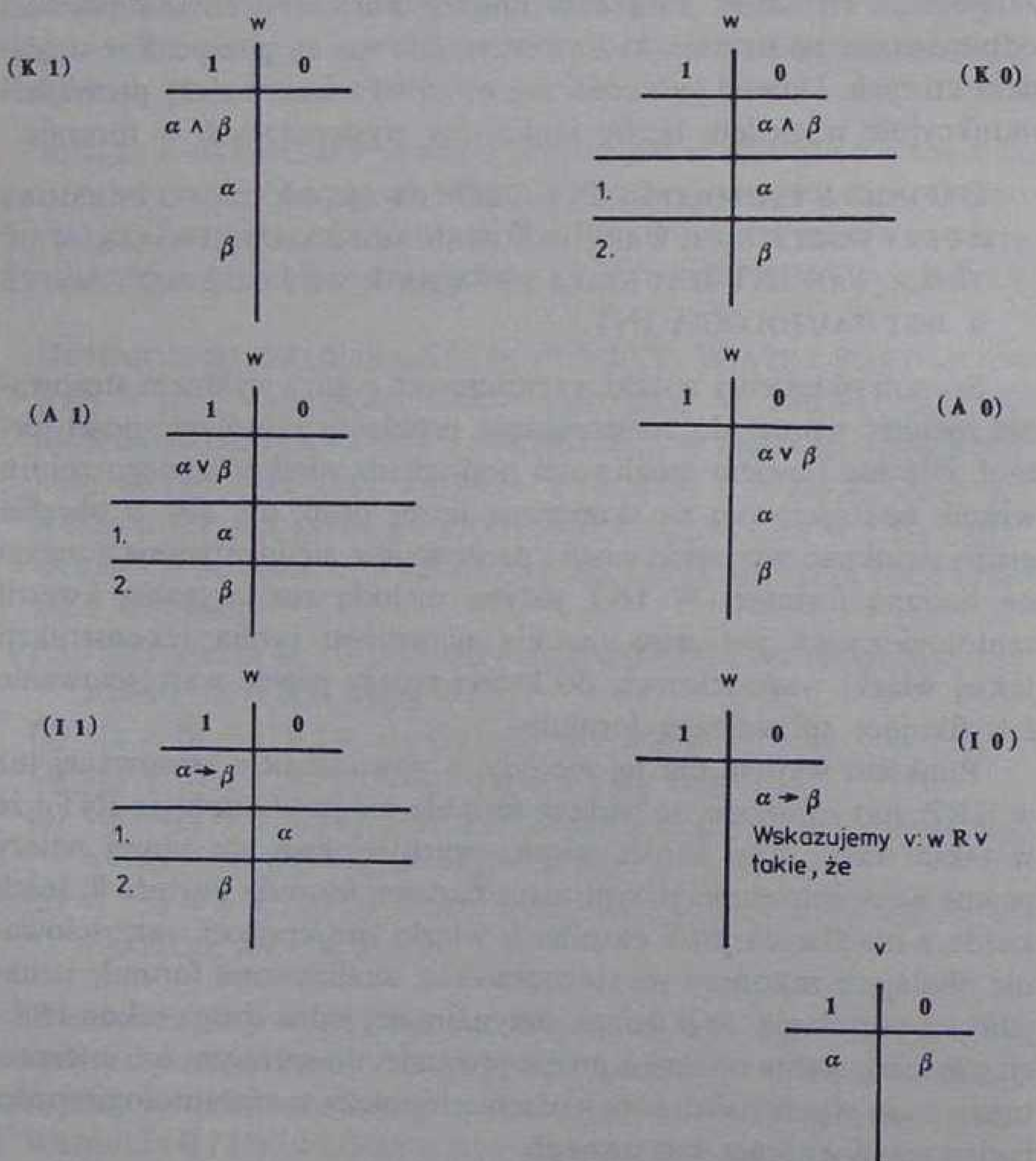
DEFINICJA TAUTOLOGII INT JEŻELI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH Z KAŻDEJ WIĄZKI WARTOŚCIOWAŃ INT JEST STAŁA I RÓWNA **1**, WÓWCZAS MÓWIMY, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ INT.

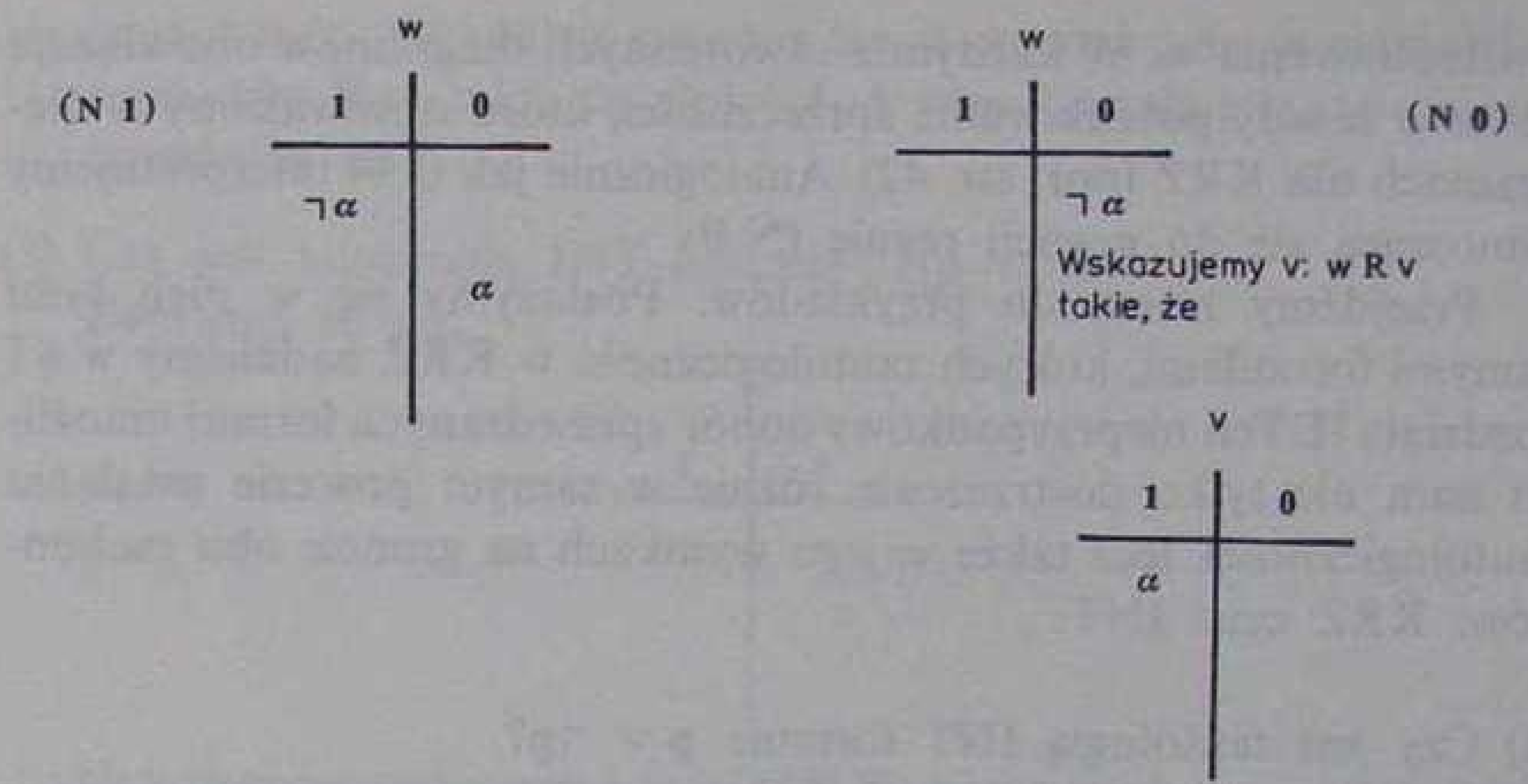
Sposób określenia wiązki wartościowań z góry wyklucza stosowanie metody wprost do rozstrzygania problemu tautologiczności formuł. Nie ma bowiem możliwości podzielenia nieskończonego zbioru wiązek wartościowań na skończoną liczbę grup, tak aby w obrębie grupy zamknąć wszystkie wiązki zachowujące się identycznie z uwagi na badaną formułę. W INT jedyną metodą rozstrzygania kwestii tautologiczności jest więc metoda niewprost: próba rekonstrukcji takiej wiązki wartościowań, do której należy pewne wartościowanie falsyfikujące sprawdzaną formułę.

Punktem wyjścia dla tej metody, z powodzeniem stosowanej już w KRZ, jest założenie, że badana formuła nie jest tautologią INT i że w takim razie musi istnieć wiązka wartościowań, do której należy pewne wartościowanie, przypisujące badanej formule wartość **0**. Jeżeli każda z możliwych prób określenia wiązki zawierającej wartościowanie obalające zakończy się sprzecznością, analizowaną formułę uznajemy za tautologię. Jeśli jednak przynajmniej jedna droga rekonstrukcji wartościowania obalającego nie prowadzi do sprzeczności, interpretujemy ten wynik jako potwierdzenie hipotezy o nietautologiczności badanego wyrażenia sensownego.

Rozumowanie, którego celem jest rozstrzygnięcie pytania o tautologiczność formuły, zapisujemy podobnie jak w § 2 rozdziału II. Tym razem jednak, ponieważ zgodnie z definicją tautologii INT zmierzamy do określenia wartościowania obalającego jako składnika pewnej wiązki wartościowań, niejednokrotnie rozważać będziemy całe rodziny diagramów. Aby uniknąć nieporozumień, należy nad każdym z rozważanych diagramów umieścić symbol opisywanego w nim wartościowania.

Bezpośrednio z definicji wiązki wartościowań INT wynikają następujące reguły konstrukcji diagramów:





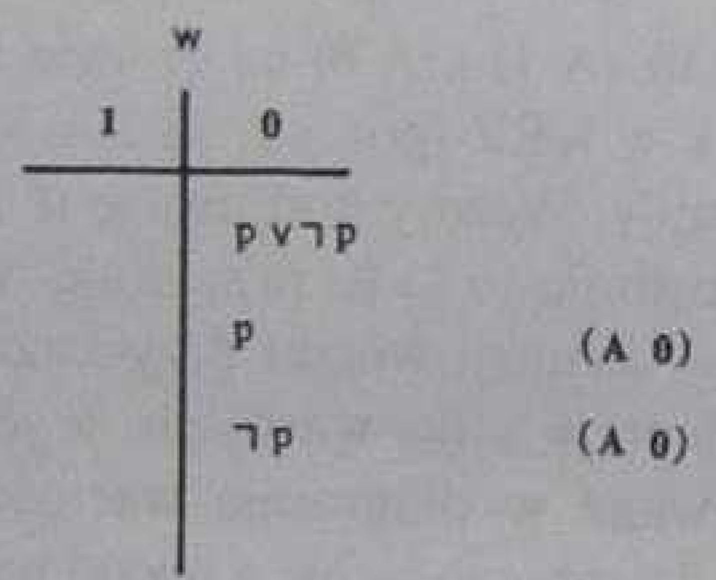
(R 1) Jeżeli w **R** v oraz $w(\alpha) = \mathbf{1}$, to $v(\alpha) = \mathbf{1}$.

Regułami **(K 1)**, **(K 0)**, **(A 1)** i **(A 0)** na gruncie INT posługujemy się dokładnie tak samo jak w KRZ (por. str. 38-39). Komentarza wymagają jednak pozostałe reguły. Weźmy pod uwagę **(I 1)**: jeśli przy pewnym wartościowaniu w formuła $\alpha \to \beta$ przyjmuje wartość **1**, wówczas zgodnie z punktem (4) definicji wiązki przy każdym z wartościowań pomocniczych względem w albo wartością α jest **0**, albo wartością β jest **1**. Rekonstruowane w diagramie wartościowanie w jest pomocnicze w stosunku do samego siebie z uwagi na zwrotność relacji **R**, zachodzi więc albo 1, $w(\alpha) = \mathbf{0}$ albo 2, $w(\beta) = \mathbf{1}$. Stąd, gdy $w(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$, nie postulujemy istnienia innych niż samo w wartościowań pomocniczych. Analogicznie należy interpretować regułę **(N 1)** opartą na punkcie (5) definicji wiązki wartościowań INT.

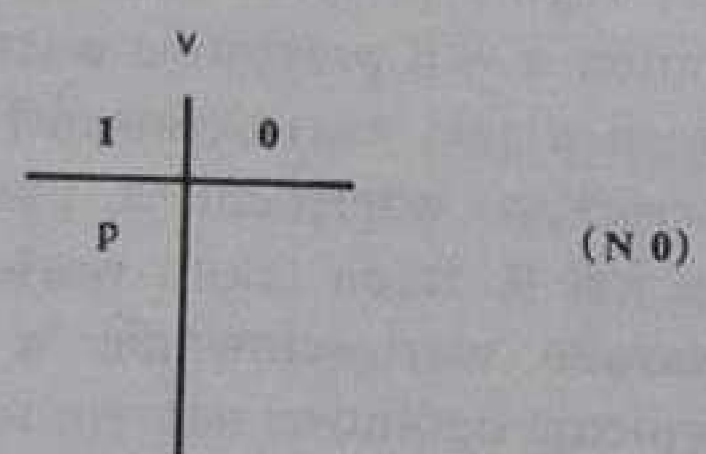
Rozpatrzmy z kolei regułę **(I 0)**. Z założenia, że przy pewnym wartościowaniu w formuła $\alpha \to \beta$ przyjmuje wartość **0**, wynika zgodnie z punktem (4) definicji wiązki wartościowań INT istnienie takiego wartościowania pomocniczego względem w, przy którym wartością α jest **1**, a wartością β jest **0**. Jeżeli takim wartościowaniem nie jest samo aktualnie rozważane wartościowanie w (tzn. $w(\alpha) = \mathbf{0}$ lub $w(\beta) = \mathbf{1}$), to dla zapewnienia ogólności naszym rozważaniom wskazujemy nowe, różne od w, wartościowanie v spełniające wymogi punktu (4) (tj. $v(\alpha) = \mathbf{1}$ oraz $v(\beta) = \mathbf{0}$). Nowe wartościowanie opisujemy nowym diagramem. Reguła **(R 1)** każe przepisać do lewej kolumny tego nowego diagramu całą zawartość lewej kolumny diagramu wartościowania w. W każdym z utworzonych diagramów obowiązują te same zasady poszukiwania sprzeczności, które stosowaliśmy w diagramach dla KRZ (por. str. 42). Analogicznie jak (**I 0**) interpretujemy odnoszącą się do negacji regułę (**N 0**).

Przejdźmy zatem do przykładów. Posłużymy się w nich tymi samymi formułami, których tautologiczność w KRZ badaliśmy w § 2 rozdziału II. Ten nieprzypadkowy dobór sprawdzanych formuł umożliwi nam nie tylko dostrzeżenie różnic w samym procesie ustalania tautologiczności, lecz także w jego wynikach na gruncie obu rachunków: KRZ oraz INT.

(1) Czy jest tautologią INT formuła **p ∨ ¬p**?
Załóżmy, że nie jest. Istnieje więc wartościowanie w przypisujące formule p ∨ ¬p wartość **0**:



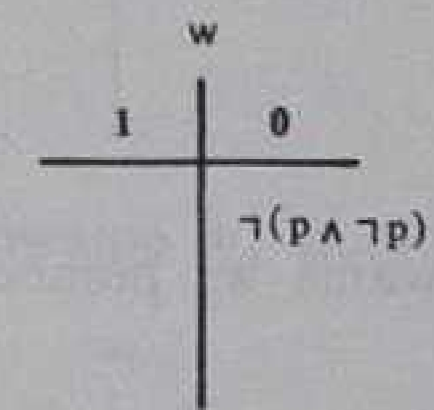
Należy teraz zastosować regułę (**N 0**), a ponieważ samo wartościowanie w nie przypisało jak dotąd zmiennej p wartości **1**, wskazujemy różne od w wartościowanie pomocnicze v(w **R** v), takie, że v(p) = **1**:



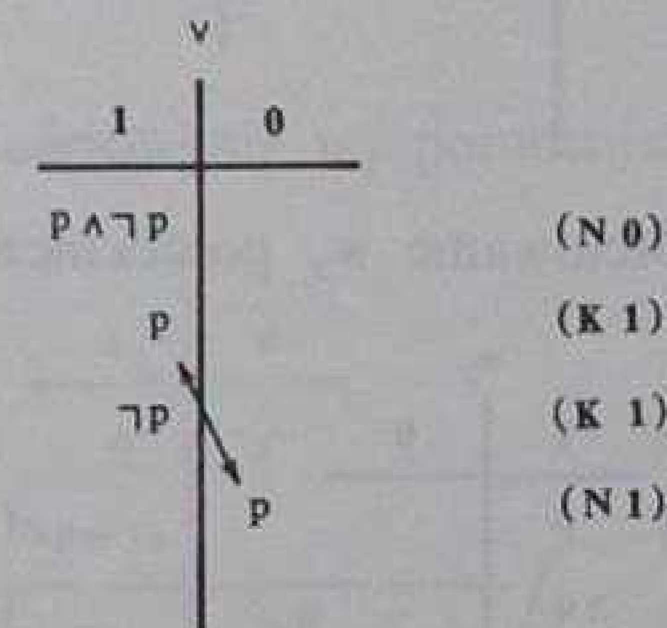
Rozumowanie kończy się niesprzecznie. Powiodła się więc próba sfalsyfikowania formuły p ∨ ¬p. Okazuje się, że badana formuła przyjmuje wartość **0** przy wartościowaniu w należącym do takiej

wiązki, w której istnieje pomocnicze w stosunku do w wartościowanie v(w **R** v), takie, że v(p) = **1**. A więc formuła p ∨ ¬p nie jest tautologią INT.

(2) Czy jest tautologią INT formuła **¬(p ∧ ¬p)**?
Załóżmy, że nie:

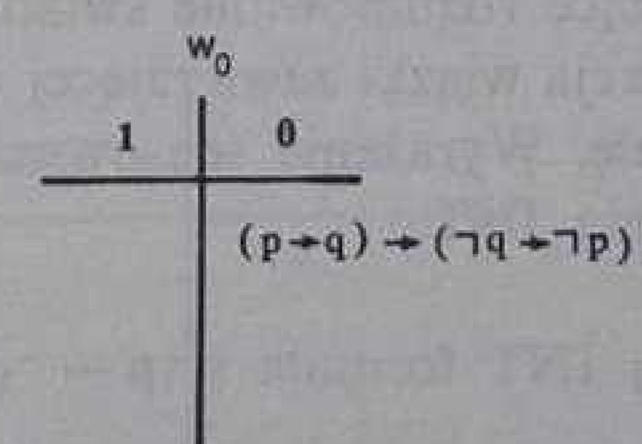


Należy teraz zastosować regułę (**N 0**), a ponieważ samo wartościowanie w nie przypisało jak dotąd formule p ∧ ¬p wartości **1**, wskazujemy wartościowanie v, pomocnicze względem w, takie, że v(p ∧ ¬p) = **1**:

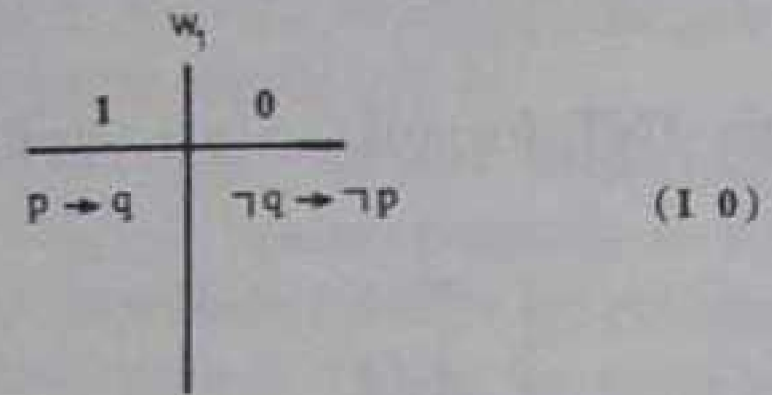


Sprzeczność kończąca rozumowanie świadczy o tym, że niemożliwa jest konstrukcja wiązki wartościowań zawierającej wartościowanie, które falsyfikowałoby badaną formułę. Wyrażenie sensowne ¬(p ∧ ¬p) jest więc tautologią INT.

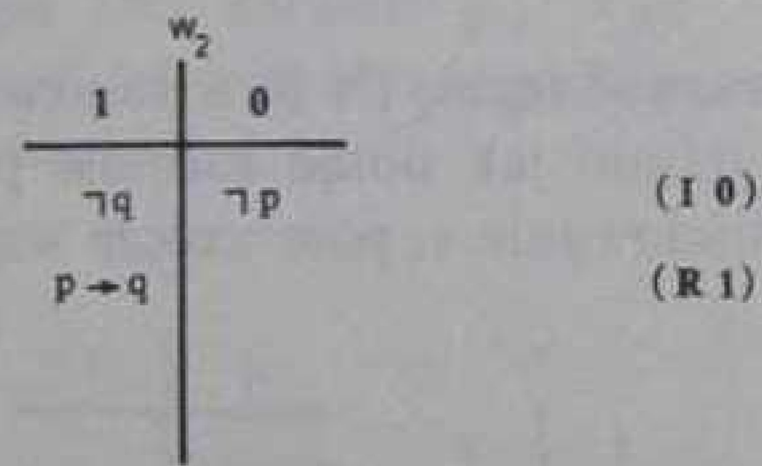
(3) Czy jest tautologią INT formuła **(p → q) → (¬q → ¬p)**?
Załóżmy, że nie:



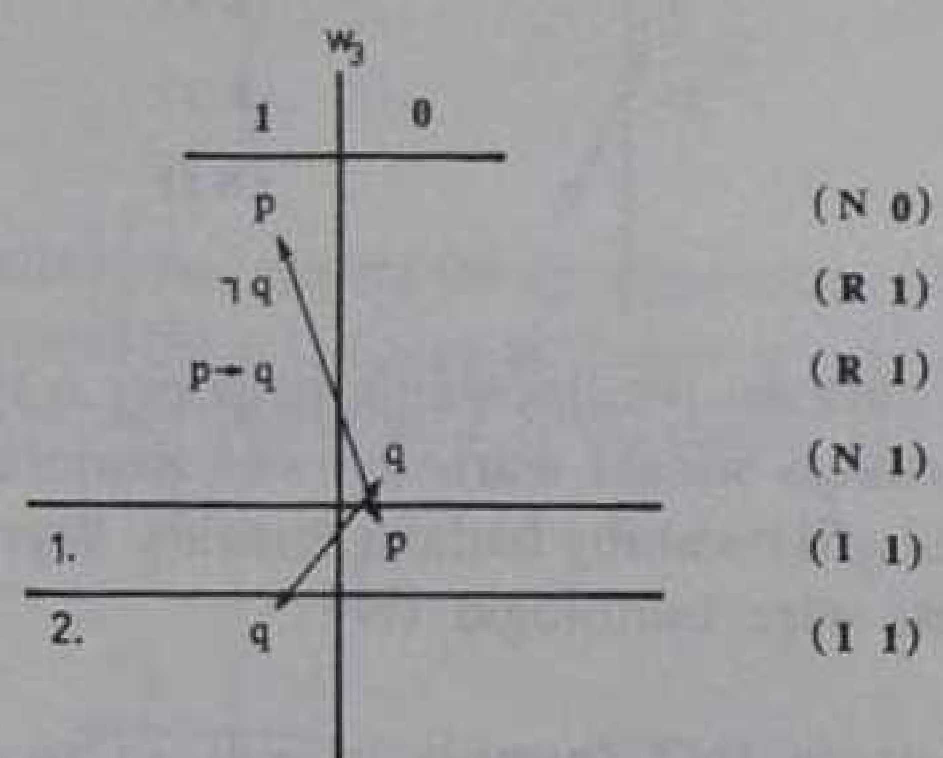
Wskazujemy wartościowanie w_1 pomocnicze względem w_0:



Wskazujemy wartościowanie w_2 pomocnicze względem w_1:

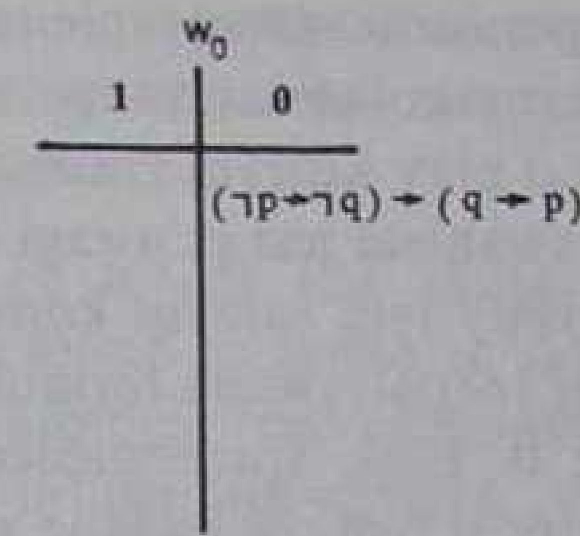


Wskazujemy wartościowanie w_3 pomocnicze względem w_2:

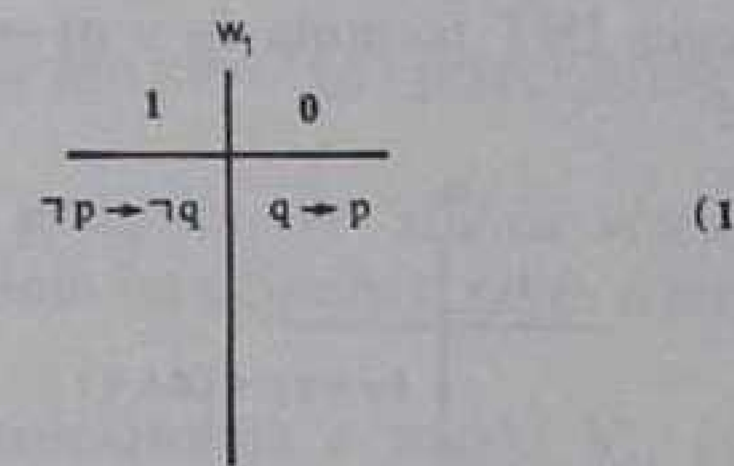


Sprzeczności kończące rozumowanie świadczą o tym, że nie jest możliwa rekonstrukcja wiązki zawierającej wartościowanie obalające badaną formułę. Wyrażenie sensowne: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ jest zatem tautologią INT.

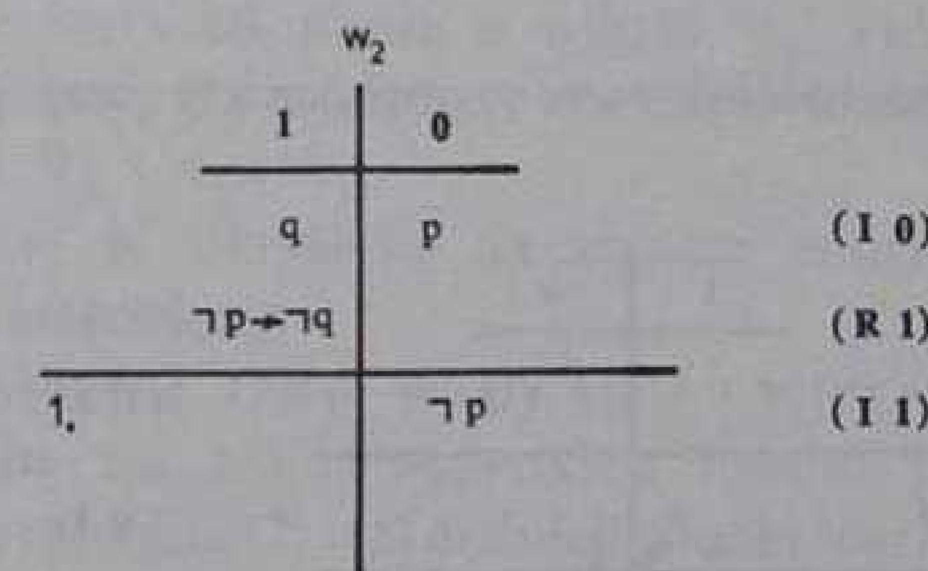
(4) Czy jest tautologią INT formuła $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$? Załóżmy, że nie:



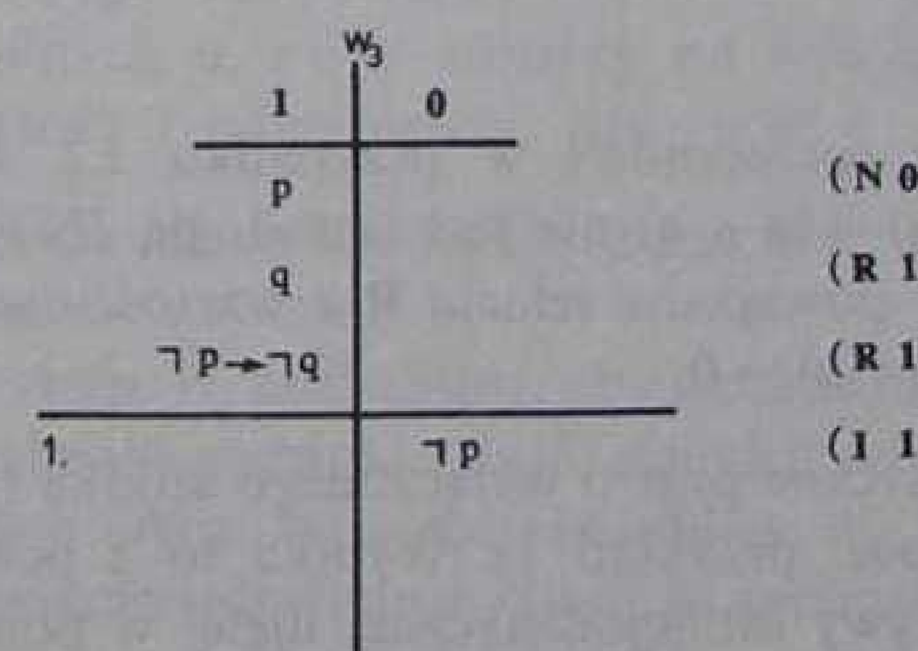
Wskazujemy wartościowanie w_1 pomocnicze względem w_0:



Wskazujemy wartościowanie w_2 pomocnicze względem w_1:



Wskazujemy wartościowanie w_3 pomocnicze względem w_2:



Zauważmy teraz, że ponowne stosowanie reguły (**N 0**) nie wymaga od nas wskazania jakiegokolwiek nowego wartościowania pomocniczego (względem w_3) przy którym zmienna p przyjmuje wartość **1**, bo takim wartościowaniem jest (z uwagi na zwrotność relacji **R**) samo w_3. Zakończyliśmy tym samym konstrukcję wiązki wartościowań INT, w której rozpatrywana formuła przy wartościowaniu w_0 przyjęła wartość **0**. Brak sprzeczności w przeprowadzonym rozumowaniu świadczy o tym, że badane wyrażenie sensowne nie jest tautologią INT.

(5) Czy jest tautologią INT formuła $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$?
Załóżmy, że nie:

w

1	0
	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

Wskazujemy wartościowanie v pomocnicze względem w:

v

	1	0	
	$p \vee q$	$p \wedge q$	(I 0)
1.	p		(A 1)
1.1.		p	(K 0)
1.2.		q	(K 0)

Nie znajdując sprzeczności w przypadku 1.2 wykazaliśmy, że formuła $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ nie jest tautologią INT. Obala ją wartościowanie w powiązane relacją **R** z wartościowaniem v, takim, że $v(p) = \mathbf{1}$, a $v(q) = \mathbf{0}$.

Wiemy, że klasyczne prawo wyłączonego środka $(p \vee \neg p)$ nie jest tautologią INT (por. przykład 1). Wynika to z pewnej szczególnej własności alternatywy intuicjonistycznej ujętej w poniższym lemacie:

LEMAT 1 FORMUŁA $\alpha \vee \beta$ JEST TAUTOLOGIĄ INT WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY CHOCIAŻ JEDEN Z JEJ SKŁADNIKÓW (α BĄDŹ β) JEST TAUTOLOGIĄ INT.

Dowód. (I) Załóżmy, że $\alpha \vee \beta$ jest tautologią i przyjmijmy (dla dowodu niewprost), że mimo to żaden ze składników tej alternatywy (ani α ani β) nie jest tautologią tego rachunku. Oznacza to, że istnieją wiązki wartościowań intuicjonistycznych V_α oraz V_β, do których należą wartościowania v_α i v_β o następujących własnościach:

$$v_\alpha \in V_\alpha \quad \text{i} \quad v_\alpha(\alpha) = \mathbf{0} \qquad \text{oraz} \qquad v_\beta \in V_\beta \quad \text{i} \quad v_\beta(\beta) = \mathbf{0}$$

W wiązce V_α określona jest zwrotna i przechodnia relacja $\mathbf{R}_\alpha$; w wiązce V_β – relacja $\mathbf{R}_\beta$.

Utwórzmy teraz podzbiór W zbioru wszystkich odwzorowań przypisujących formułom intuicjonistycznym wartości ze zbioru $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ włączając doń:

1° te i tylko te wartościowania z wiązki V_α, które są pomocnicze z uwagi na relację $\mathbf{R}_\alpha$ względem wartościowania v_α. Wobec zwrotności relacji $\mathbf{R}_\alpha$ – $v_\alpha \in W$);

2° te i tyko te wartościowania z wiązki V_β, które są pomocnicze z uwagi na relację $\mathbf{R}_\beta$ względem wartościowania v_β. Wobec zwrotności relacji $\mathbf{R}_\beta$ – $v_\beta \in W$);

3° odwzorowanie w określone na zbiorze zmiennych zdaniowych w sposób następujący:
$w(p) = \mathbf{1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_\alpha(p) = \mathbf{1}$ i $v_\beta(p) = \mathbf{1}$,
a rozszerzone na zbiór wszystkich formuł intuicjonistycznych zgodnie z warunkami (2)-(5) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych, przy czym relację pomocniczości **R** określimy w zbiorze W postulując, by
(a) dla dowolnego $v \in W : w \mathbf{R} v$
(b) dla dowolnych u, $v \in W$ różnych od odwzorowania w:
$u \mathbf{R} v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \mathbf{R}_\alpha v$ lub $u \mathbf{R}_\beta v$.

Z samego określenia relacji **R** wynika, że jest ona w zbiorze W zwrotna i przechodnia.

Konstruując zbiór W zadbaliśmy, aby każde z należących do niego odwzorowań spełniało warunki (2)-(5) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych. Aby wykazać, że zbiór W jest istotnie taką wiązką, należy jeszcze udowodnić tylko, że spełnia również warunek

(1) mówiący o dziedziczeniu wartości **1** przez wartościowania pomocnicze. Na pewno własność tę mają te wartościowania, które do zbioru W trafiły ze zbiorów V_α oraz V_β. Pozostaje więc wykazać, że również odwzorowanie w spełnia ten warunek. W dowodzie tego faktu stosujemy indukcję z uwagi na złożoność formuły:

K r o k w y j ś c i o w y. Załóżmy, że formuła ma kształt zmiennej zdaniowej p oraz że $w(p) = \mathbf{1}$. Wykażemy, że dla dowolnego wartościowania pomocniczego $v(w\,\mathbf{R}\,v)$ mamy $v(p) = \mathbf{1}$. Takie wartościowanie v jest albo identyczne z w, albo należy do V_α (*resp.* V_β). W pierwszym przypadku warunek jest spełniony z założenia. W drugim wartościowanie v jest pomocnicze także w stosunku do v_α (*resp.* v_β) z uwagi na relację $\mathbf{R}_\alpha$ (*resp.* $\mathbf{R}_\beta$). Z definicji odwzorowania w wnioskujemy, że $v_\alpha(p) = \mathbf{1}$(*resp.* $v_\beta(p) = \mathbf{1}$). Stąd zaś, wobec stwierdzonej wyżej pomocniczości v względem wartościowania v_α na gruncie wiązki V_α, mamy $v(p) = \mathbf{1}$, co zamyka dowód kroku wyjściowego.

K r o k i n d u k c y j n y. Niech dla formuł γ i δ własność dowodzona zachodzi. Wykażemy, że przysługuje ona dowolnej formule z nich zbudowanej przy użyciu stałych logicznych języka rachunku INT. Ograniczymy się tu do przypadku alternatywy i negacji – koniunkcję i implikację pozostawiając Czytelnikowi.

($\vee$) Niech $w(\gamma \vee \delta) = \mathbf{1}$. Przyjęliśmy, że w spełnia warunki (2)-(5) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych, a zatem $w(\gamma) = \mathbf{1}$ lub $w(\delta) = \mathbf{1}$. Rozpatrzmy przypadek $w(\gamma) = \mathbf{1}$ (w drugim przypadku rozumowanie przebiega analogicznie). Z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że dla dowolnego odwzorowania pomocniczego v $(w\,\mathbf{R}\,v)$ zachodzi $v(\gamma) = \mathbf{1}$, a ponieważ każde z odwzorowań należących do W spełnia warunki (2)-(5) definicji wiązki, przeto $v(\gamma \vee \delta) = \mathbf{1}$.

($\neg$) Niech $w(\neg\gamma) = \mathbf{1}$. Załóżmy niewprost, że w zbiorze W istnieje odwzorowanie v pomocnicze względem $w(w\,\mathbf{R}\,v)$ i $v(\neg\gamma) = \mathbf{0}$. Odwzorowanie v spełnia warunki (2)-(5) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych, a zatem istnieje w zbiorze W takie odwzorowanie u pomocnicze względem $v(v\,\mathbf{R}\,u)$, dla którego $u(\gamma) = \mathbf{1}$. Ponieważ relacja **R** jest przechodnia, zatem $w\,\mathbf{R}\,u$. Z faktu istnienia wartościowania pomocniczego, przy którym formuła γ przyjmuje wartość **1**, wnioskować możemy (ponownie korzystając z definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych), że $w(\neg\gamma) = \mathbf{0}$. Sprzeczność.

Po upewnieniu się, że zbiór W jest istotnie wiązką wartościowań intuicjonistycznych, możemy pytać o wartość formuły $\alpha \vee \beta$ przy wartościowaniu w. Z dotychczasowych ustaleń wiemy, że do wiązki W należą wartościowania v_α i v_β pomocnicze względem w i takie, że $v_\alpha(\alpha) = \mathbf{0}$ i $v_\beta(\beta) = \mathbf{0}$. Stąd, wobec (1) definicji wiązki (przenoszenie wartości **1** na wartościowania pomocnicze) wiemy, że $w(\alpha) = w(\beta) = \mathbf{0}$. W rezultacie, na mocy warunku (3): $w(\alpha \vee \beta) = \mathbf{0}$, co pozostaje w sprzeczności z założoną tautologicznością tej alternatywy i co kończy dowód pierwszej części lematu.

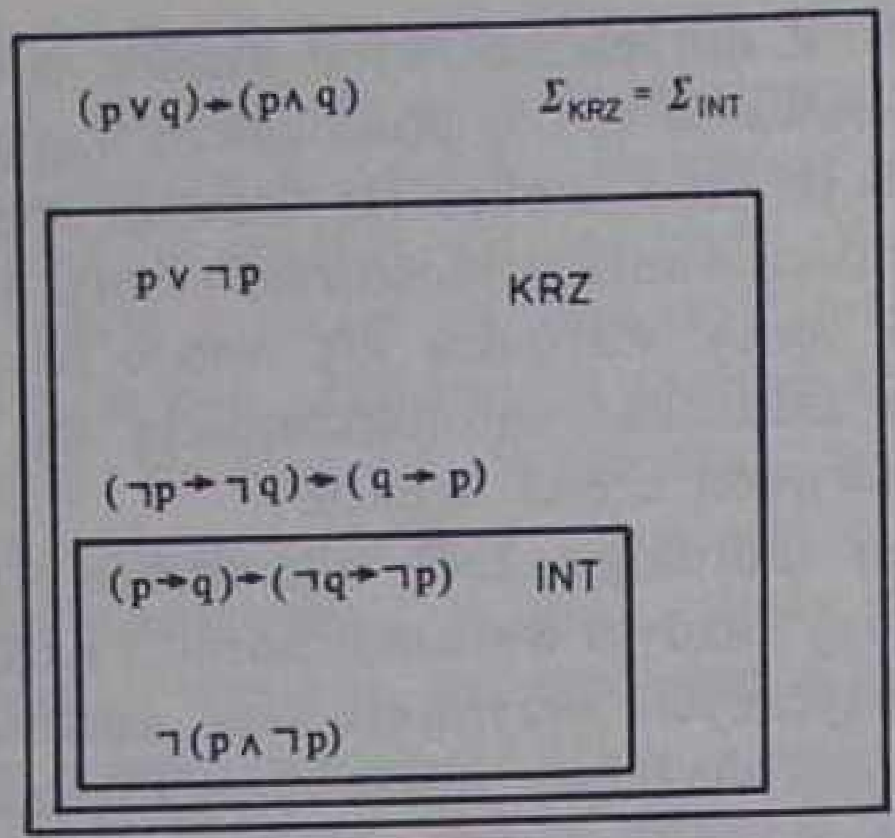
(II) Gdy α jest tautologią INT (dla formuły β dowód biegnie analogicznie), to przy każdym wartościowaniu z każdej wiązki wartościowań intuicjonistycznych przyjmuje ona wartość **1**. Korzystając z warunku (3) definicji wiązki wartościowań INT wnioskujemy, że przy każdym wartościowaniu z każdej wiązki również formuła $\alpha \vee \beta$ przyjmuje wartość **1**, a zatem jest tautologią intuicjonistyczną. Tym wnioskiem kończymy dowód lematu 1 •

Zwracaliśmy już uwagę na fakt, że języki KRZ oraz INT są identyczne: $\Sigma_{KRZ} = \Sigma_{INT}$. A jaki istnieje stosunek między zbiorami tautologii obu rachunków? Z łatwością udowodnimy

LEMAT 2 KAŻDA TAUTOLOGIA INT JEST TEŻ TAUTOLOGIĄ KRZ.

Dowód. Załóżmy, że α jest tautologią INT i, niewprost, że istnieje wartościowanie v w KRZ takie, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Rozpatrzmy zbiór $\{v\}$ z relacją **R** spełniającą warunek $v\,\mathbf{R}\,v$. Jest absolutnie oczywiste, że tak zdefiniowana relacja jest zwrotna i przechodnia w zbiorze $\{v\}$. Korzystając z definicji wartościowania KRZ sprawdzamy, że zbiór $\{v\}$ stanowi wiązkę wartościowań INT (por. (1)-(5) definicji wiązki). Istnieje więc wiązka, do której należy wartościowanie v, takie, że: $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Zatem α nie jest tautologią w INT. Wniosek ten, sprzeczny z założeniem, kończy dowód lematu •

Udowodniliśmy więc, że zbiór wszystkich tautologii rachunku INT zawiera się w zbiorze wszystkich tautologii KRZ. O tym, że zawieranie odwrotne nie zachodzi, łatwo się przekonać porównując odpowiedzi na pytanie o tautologiczność tych samych formuł sprawdzanych w obu rachunkach (przykłady (1)-(5)). W dwóch przypadkach ((1) i (4)) formuły tautologiczne w KRZ zostały sfalsyfikowane w INT. Wyniki tych ustaleń zilustrujemy rysunkiem:



W kolejnym lemacie sformułujemy ważną zależność między tautologiami KRZ a tautologiami INT:

LEMAT 3 FORMUŁA α JEST TAUTOLOGIĄ KRZ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY FORMUŁA $\neg\neg\alpha$ JEST TAUTOLOGIĄ INT.

Dowód. (A) Załóżmy, że α jest tautologią KRZ, a mimo to $\neg\neg\alpha$ nie jest tautologią INT. Istnieje zatem wiązka U wartościowań intuicjonistycznych, a w niej wartościowanie u, które formule $\neg\neg\alpha$ przypisuje wartość **0**. Z definicji wiązki (punkt 5) wnioskujemy, że do U należy również wartościowanie u', pomocnicze w stosunku do u(u **R** u'), takie, że $u'(\neg\alpha) = 1$. W wiązce U wybieramy ciąg wartościowań $W = w_0, w_1, w_2, \ldots$ według następujących zasad:

1° wszystkie wyrażenia sensowne ze zbioru Σ_{INT} porządkujemy w ciąg: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$;

2° za początkowy element ciągu wartościowań W uznajemy wartościowanie $u' : w_0 = u'$;

3° przy doborze kolejnych wyrazów ciągu W postępujemy indukcyjnie. Gdy mamy już wybrane wartościowanie w_k, wówczas spośród wartościowań pomocniczych w stosunku do niego w wiązce U wybieramy to wartościowanie v, które spełnia warunek: $v(\gamma_{k+1} \vee \neg\gamma_{k+1}) = 1$, i właśnie to wartościowanie dołączamy do ciągu W jako kolejny wyraz $(w_{k+1} = v)$.

Czy w wiązce U zawsze potrafimy odnaleźć kolejny element ciągu W? Okazuje się, że tak: niech bowiem zbiór W_k składa się z wszystkich wartościowań pomocniczych w stosunku do w_k. Oczywiście, wobec

zwrotności relacji: $\mathbf{R} : w_k \in W_k$. Musi zaistnieć zatem jedna z dwóch sytuacji:

(a) w zbiorze W_k istnieje wartościowanie, powiedzmy w, które formule γ_{k+1} przypisuje wartość **1**. Zgodnie z (3) definicji wiązki wartościowań INT mamy $w(\gamma_{k+1} \vee \neg\gamma_{k+1}) = 1$ i wówczas za k + 1-szy element ciągu W uznajemy w.

(b) w zbiorze W_k nie ma wartościowania weryfikującego γ_{k+1}. Oznacza to, że każde wartościowanie pomocnicze względem w_k przypisuje formule γ_{k+1} wartość **0**. Zgodnie z definicją wiązki (punkt 5): $w_k(\neg\gamma_{k+1}) = 1$, a z uwagi na punkt 3, także całej alternatywie: $\gamma_{k+1} \vee \neg\gamma_{k+1}$ wartościowanie w_k przypisuje wartość **1**. Kolejnym elementem ciągu W będzie wówczas samo w_k, czyli: $w_{k+1} = w_k$.

Ciąg W, wobec przechodniości relacji **R**, posiada następującą własność: otóż dla dowolnych dwóch wartościowań do niego należących $(w, u \in W)$ jedno jest pomocnicze względem drugiego: albo w **R** u, albo u **R** w.

Definiujemy teraz odwzorowanie v, postulując, aby dla dowolnej formuły γ:

$$v(\gamma) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{gdy w ciągu W istnieje wartościowanie w takie, że} \\ & w(\gamma) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Udowodnimy, że tak określone odwzorowanie v jest wartościowaniem KRZ. Należy więc sprawdzić, że v spełnia warunki sformułowane w definicji wartościowania tego rachunku (por. str. 33).

(1) **Negacja.** Załóżmy, że $v(\neg\delta) = 1$ i przypuśćmy, że równocześnie $v(\delta) = 1$. Wobec definicji v istnieją w ciągu W wartościowania w_k i w_m takie, że: $w_k(\neg\delta) = 1$, $w_m(\delta) = 1$. Jedno z tych wartościowań musi być pomocnicze względem drugiego, przyjmijmy, że to w_m jest pomocnicze w stosunku do w_k (rozumowanie w przypadku odwrotnej zależności między wartościowaniami biegnie analogicznie). Z założenia, że $w_k(\neg\delta) = 1$ zgodnie z punktem (5) definicji wiązki wnioskujemy, że przy każdym wartościowaniu pomocniczym względem w_k, w szczególności przy w_m, formuła δ przyjmuje wartość **0** – sprzeczność.

Załóżmy z kolei, że $v(\neg\delta) = 0$. Z defnicji v wnioskujemy, że przy dowolnym wartościowaniu $w \in W$ formuła $\neg\delta$ przyjmuje wartość **0**. Formuła δ stanowi jeden z wyrazów ciągu utworzonego z wszystkich wyrażeń sensownych języka INT, a więc dla pewnego wskaźnika k: $\delta = \gamma_k$. Zgodnie z konstrukcją ciągu wartościowań W: $w_k(\gamma_k \vee \neg\gamma_k) = w_k(\delta \vee \neg\delta) = \mathbf{1}$. Ponieważ ustaliliśmy już, że $w_k(\neg\delta) = \mathbf{0}$, więc zgodnie z punktem (3) definicji wiązki: $w_k(\delta) = \mathbf{1}$, co kończy część dowodu poświęconą negacji.

(2) **Implikacja.** Załóżmy, że $v(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$ oraz, dla dowodu niewprost, że $v(\gamma) = \mathbf{1}$, a $v(\delta) = \mathbf{0}$. Z założeń tych, wobec definicji v, wynika, że w ciągu W istnieją wartościowania w_k i w_m, takie, że: $w_k(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$ i $w_m(\gamma) = \mathbf{1}$. Wartościowania te na pewno wiąże relacja **R**. Przyjmijmy najpierw, że w_m jest pomocnicze w stosunku do w_k. Z dotychczasowych założeń, w myśl punktu (1) definicji wiązki, wynika, że $w_m(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$, a korzystając dalej z punktu (4) definicji wnioskujemy, że przy każdym wartościowaniu pomocniczym w stosunku do w_m poprzednik (γ) ma wartość $\mathbf{0}$ lub następnik (δ) ma wartość $\mathbf{1}$. Wobec zwrotności relacji **R** wartościowanie w_m jest pomocnicze względem samego siebie, a więc $w_m(\gamma) = \mathbf{0}$ lub $w_m(\delta) = \mathbf{1}$. Pierwszy człon tej alternatywy wykluczyliśmy, więc pozostaje tylko możliwość druga: $w_m(\delta) = \mathbf{1}$. Stąd zaś, wobec definicji v: $v(\delta) = \mathbf{1}$, co sprzeczne jest z hipotezą. Gdy z kolei przyjmiemy, że wartościowanie w_k jest pomocnicze względem w_m, to wtedy, korzystając z punktu (1) definicji wiązki, ustalimy, że $w_k(\gamma) = \mathbf{1}$, a dalsze rozumowanie przebiegnie jak poprzednio dla w_m.

Z kolei przypuśćmy, że $v(\gamma \to \delta) = \mathbf{0}$ i dla dowodu niewprost załóżmy, że bądź $v(\gamma) = \mathbf{0}$, bądź $v(\delta) = \mathbf{1}$. Jako pierwszą rozpatrzmy możliwość: $v(\gamma) = \mathbf{0}$. Ponieważ formuła musi się pojawić w ciągu utworzonym ze wszystkich wyrażeń sensownych języka INT jako jego kolejny, np. k-ty wyraz ($\gamma = \gamma_k$), zatem wartościowanie w_k z ciągu W spełnia warunek: $w_k(\gamma_k \vee \neg\gamma_k) = w_k(\gamma \vee \neg\gamma) = \mathbf{1}$. Przyjęliśmy założenie, że $v(\gamma) = \mathbf{0}$ i stąd, wobec definicji v, możemy wnosić, że dla $w_k(\gamma) = \mathbf{0}$. A zatem, zgodnie z punktem (3) definicji wiązki wartościowań stwierdzamy, że $w_k(\neg\gamma) = \mathbf{1}$. Ponieważ jest tautologią INT skomutowane prawo przepełnienia: $\neg\gamma \to (\gamma \to \delta)$ (sprawdź!), zatem $w_k(\neg\gamma \to (\gamma \to \delta)) = \mathbf{1}$. Korzystając z punktu (4) definicji wiązki wyprowadzamy wniosek: $w_k(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$, co wobec określenia v oznacza, że $v(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$. Sprzeczność.

Przeanalizujemy teraz drugą możliwość, zakładając, że zarazem $v(\gamma \to \delta) = \mathbf{0}$ oraz $v(\delta) = \mathbf{1}$. Z definicji v wnosimy, że istnieje w ciągu W takie wartościowanie w_k, że: $w_k(\delta) = \mathbf{1}$. Ponieważ prawo symplifikacji $\delta \to (\gamma \to \delta)$ jest tautologią INT, w szczególności $w_k(\delta \to (\gamma \to \delta)) = \mathbf{1}$. Punkt (4) definicji wiązki pozwala stąd wnioskować, że $w_k(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$, co wobec definicji v oznacza, że: $v(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$. Osiągnięta i tym razem sprzeczność kończy dowód części dotyczącej implikacji.

Uzupełnienie rozumowania o przypadki alternatywy i koniunkcji pozostawiamy Czytelnikowi.

Powróćmy teraz do formuły α. Ustaliliśmy, że $u'(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Ponieważ jednak $u' = w_0$, więc zgodnie z definicją wartościowania $v: v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Ale v jest wartościowaniem KRZ, a zatem: $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Wskazaliśmy tym samym wartościowanie KRZ falsyfikujące formułę α, co pozostaje w sprzeczności z założeniem o jej tautologiczności w tym rachunku.

(II) Aby zakończyć dowód lematu 3 załóżmy, że z kolei formuła $\neg\neg\alpha$ jest tautologią INT. Na mocy lematu 2 jest ona również tautologią KRZ. Z definicji wartościowania KRZ wnioskujemy, że przy każdym wartościowaniu KRZ formuła $\neg\alpha$ przyjmuje wartość $\mathbf{0}$, a formuła α wartość $\mathbf{1}$. Wykazaliśmy tym samym, że α jest tautologią KRZ •

Pojęcie spełniania w rachunku INT definiujemy i charakteryzujemy tak, jak to uczyniliśmy w §2 rozdziału I. Przejdźmy więc do sprecyzowania, czym jest na gruncie INT relacja wynikania.

Definicja wynikania w INT Ze zbioru formuł Φ wynika na gruncie INT zbiór formuł Ψ (symbolicznie: $\Phi \models_{INT} \Psi$) wtedy i tylko wtedy, gdy każde wartościowanie z każdej wiązki wartościowań INT spełniające Φ spełnia też Ψ.

Jeśli tak zdefiniowana relacja nie zachodzi między zbiorami Φ i Ψ na terenie rachunku INT, wówczas piszemy: $\Phi \not\models_{INT} \Psi$. Jeśli natomiast $\Phi \models_{INT} \{\alpha\}$, pisać będziemy: $\Phi \models_{INT} \alpha$.

Relacji wynikania w INT przysługują własności ogólne wypowiedziane w lematach 3 - 7 z §2 rozdziału I. Prócz nich relacja ta posiada własności specyficzne, wynikające z prawdziwościowej charakterystyki funktorów w INT, zawartej w definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych. Podobnie jak w KRZ, tak i w rachunku INT zachodzą charakterystyczne związki między relacją wynikania oraz funktorami implikacji i negacji, zwane semantycznymi analogonami twierdzeń o dedukcji. Jednakże z trzech twierdzeń obowiązujących w KRZ (por. twierdzenia 1, 2 i 3 z §2 rozdziału II) na teren rachunku intuicjonistycznego przenieść można tylko dwa pierwsze:

Twierdzenie 1 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{INT} \beta$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{INT} \alpha \rightarrow \beta$.

Dowód. (I) Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{INT} \beta$ i niewprost, że mimo to (2) $\Phi \not\models_{INT} \alpha \rightarrow \beta$. Z (2) wobec definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje taka wiązka wartościowań W i takie w niej wartościowanie v, że (3) v spełnia Φ, ale (4) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{0}$. Zatem zgodnie z definicją wiązki, istnieje w wiązce W wartościowanie pomocnicze względem v, nazwijmy je u(v **R** u), takie, że zarazem (5) $u(\alpha) = \mathbf{1}$ i (6) $u(\beta) = \mathbf{0}$. Z (3) oraz punktu (1) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych wynika, że (7) u spełnia zbiór Φ. Z kolei z (7) i (5) wyprowadzamy wniosek, że (8) u spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$. Stąd wobec założenia (1) konkludujemy, że (9) $u(\beta) = \mathbf{1}$, co pozostaje w sprzeczności z (6).

(II) Załóżmy z kolei, że (1) $\Phi \models_{INT} \alpha \rightarrow \beta$ i niewprost, że mimo to (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{INT} \beta$. Z (2) wobec definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje wiązka wartościowań intuicjonistycznych W oraz należące do niej wartościowanie v takie, że (3) v spełnia Φ i (4) $v(\alpha) = \mathbf{1}$, a jednocześnie (5) $v(\beta) = \mathbf{0}$. Z (1) i (3) zgodnie z definicją wynikania wyprowadzamy wniosek (6) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{1}$. Stąd, na mocy definicji wiązki wartościowań, przy wszystkich wartościowaniach pomocniczych względem v (a więc i przy samym v) poprzednik implikacji musi przyjąć wartość **0** lub jej następnik – wartość **1**, a zatem (7) $v(\alpha) = \mathbf{0}$ lub $v(\beta) = \mathbf{1}$. Ponieważ warunek (4) wyklucza prawdziwość pierwszego członu tej alternatywy, więc prawdziwy musi być człon drugi: (8) $v(\beta) = \mathbf{1}$. Warunki (8) i (5) pozostają jednak w sprzeczności •

Twierdzenie 2 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{INT} \neg\alpha$.

Dowód. (I) Niech (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$. Dla dowodu niewprost załóżmy ponadto, że (2) $\Phi \not\models_{INT} \neg\alpha$. Z (2) na mocy definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje wiązka wartościowań intuicjonistycznych W i należące do niej wartościowanie v takie, że (3) v spełnia Φ oraz (4) $v(\neg\alpha) = \mathbf{0}$. Zgodnie z punktem (5) definicji wiązki wartościowań istnieje w W pewne wartościowanie u pomocnicze względem v, takie, że (5) $u(\alpha) = \mathbf{1}$. Stosując doń punkt (1) definicji wiązki ustalamy

wobec (3), że (6) u spełnia Φ. Z (5) i (6) wnioskujemy, że (7) u spełnia $\Phi \cup \{\alpha\}$. Stąd wobec (1) i definicji wynikania wyprowadzamy wniosek (8) u spełnia $\{\beta, \neg\beta\}$. Oznacza to, że zarówno (9) $u(\beta) = \mathbf{1}$, jak i (10) $u(\neg\beta) = \mathbf{1}$. Z uwagi na (10) odwołujemy się znowu do definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych, by ustalić, że każde wartościowanie pomocnicze względem u (także samo u – skoro u **R** u) przypisać musi formule β wartość **0**: (11) $u(\beta) = \mathbf{0}$. Sprzeczność między (9) a (11) kończy tę część dowodu.

(II) Załóżmy teraz, że (1) $\Phi \models_{INT} \neg\alpha$, a dla dowodu niewprost, że (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$. Z (2), wobec definicji wynikania, wnioskujemy, że istnieje wiązka wartościowań intuicjonistycznych W i należące do niej wartościowanie v takie, że (3) v spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$. Posługując się lematem 1 dowiedzionym w §2 rozdziału II, wyprowadzamy wniosek, że (4) v spełnia Φ oraz (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Na podstawie (1) i (4) stwierdzamy, odwołując się znów do definicji wynikania, że (6) $v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Skoro tak, to każde wartościowanie pomocnicze względem v (więc i samo v) przypisuje formule α wartość **0**: (7) $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Sprzeczność między (5) i (7) kończy dowód tego twierdzenia •

Znane z §2 rozdziału II twierdzenie 3 nie jest prawdziwe w rachunku INT. Aby się o tym przekonać, rozważmy następujący

Kontrprzykład Wykażemy, że $\{\neg\neg p, \neg p\} \models_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$ i równocześnie $\{\neg\neg p\} \not\models_{INT} p$.

Załóżmy, że istnieje wiązka W i należące do niej wartościowanie v takie, że (1) $v(\neg\neg p) = \mathbf{1}$ i (2) $v(\neg p) = \mathbf{1}$. Z (1) wobec definicji wiązki wynika, że każde wartościowanie pomocnicze względem v (więc i samo v, ponieważ v **R** v) przypisuje wyrażeniu $\neg p$ wartość **0**. A zatem: (3) $v(\neg p) = \mathbf{0}$. Sprzeczność w rozumowaniu między (2) i (3) świadczy o tym, że nie istnieje wartościowanie spełniające zbiór $\{\neg\neg p, \neg p\}$. Prawdziwe jest więc następujące stwierdzenie: każde wartościowanie z każdej wiązki wartościowań intuicjonistycznych spełniające zbiór $\{\neg\neg p, \neg p\}$ spełnia także zbiór $\{\beta, \neg\beta\}$, gdzie β jest dowolną formułą ze zbioru Σ_{INT}, czyli: $\{\neg\neg p, \neg p\} \models_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$.

Rozważmy z kolei dwuelementową wiązkę wartościowań intuicjonistycznych $W = \{v, w\}$ ze zwrotną i przechodnią relacją $\mathbf{R} = \{\langle v, v\rangle, \langle v, w\rangle, \langle w, w\rangle\}$. Wiązkę określimy jednoznacznie, gdy każde z wartościowań wchodzących w jej skład zadamy na wszystkich zmiennych zdaniowych. Niech więc dla dowolnej zmiennej zdaniowej δ:

$$v(\delta) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{gdy} \quad \delta \neq p \\ \mathbf{0} & \quad \delta = p \end{cases}$$

natomiast

$$w(\delta) = \mathbf{1} \quad \text{dla wszystkich zmiennych}$$

Innymi słowy: dla zmiennych wartościowanie v różni się od wartościowania w tylko na zmiennej p. Stosując punkt (5) definicji wiązki ustalamy, że $v(\neg p) = w(\neg p) = \mathbf{0}$, gdyż wartościowanie w, pomocnicze zarówno względem v, jak i samego siebie, przypisuje zmiennej p wartość **1**, zaś $v(\neg\neg p) = \mathbf{1}$, ponieważ każde wartościowanie pomocnicze w stosunku do v (a więc w i samo v) przypisuje formule $\neg p$ wartość **0**. Ustaliliśmy więc, że wartościowanie v spełnia formułę $\neg\neg p$, a nie spełnia p. Oznacza to, że istotnie: $\neg\neg p \nvDash_{INT} p$ •

Zauważmy, że przytoczony kontrprzykład falsyfikuje w INT tylko jedną część twierdzenia 3 z § 2 rozdziału II, natomiast druga pozostaje w mocy. Wyrazimy ją w formie kolejnego lematu:

LEMAT 4 JEŻELI $\Phi \vDash_{INT} \alpha$, TO $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vDash_{INT} \{\beta, \neg\beta\}$.

Dowód lematu 4 przebiega podobnie do dowodu drugiej części twierdzenia 2.

Ogólne uwagi o regułach wnioskowania, ich rodzajach, własnościach, a także zachodzących między nimi stosunkach zawarte są w § 2 rozdziału I. Przypomnijmy tylko, że regułą jest dowolny zbiór par postaci $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$, w których Φ stanowi skończony zbiór przesłanek, natomiast α – wniosek. Regułę elementarną charakteryzującą się tym, że wszystkie składające się na nią pary są podstawieniami pewnej pary podstawowej, będziemy przedstawiać w formie schematu:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{array}}{\beta}$$

DEFINICJA REGUŁY NORMALNEJ INT REGUŁA JEST NORMALNA NA GRUNCIE INT WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ PARY $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$ NALEŻĄCEJ DO TEJ REGUŁY ZACHODZI WYNIKANIE: $\Phi \vDash_{INT} \alpha$.

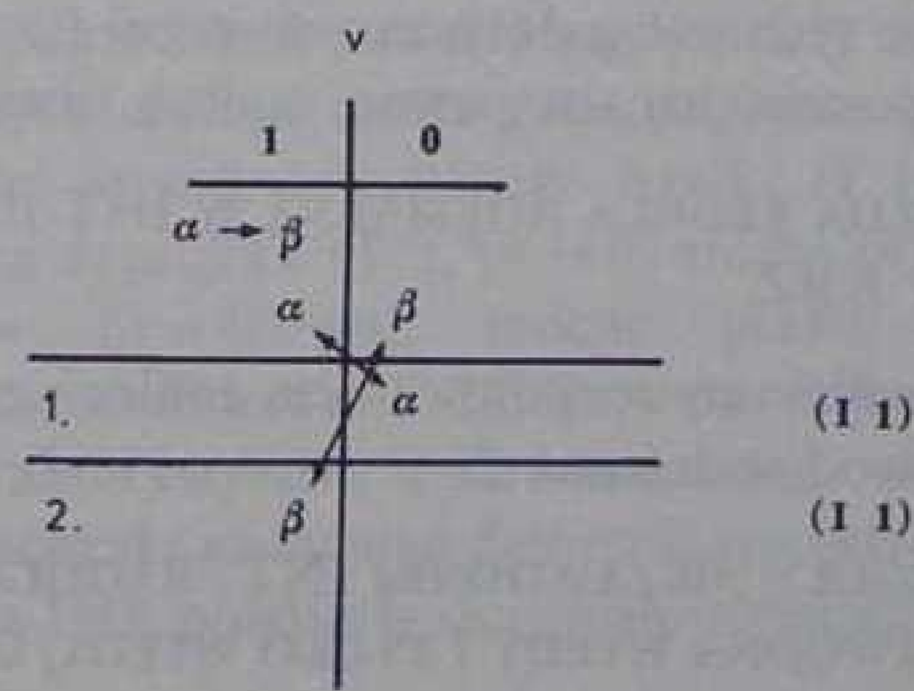
Dla uzyskania odpowiedzi na pytanie, czy pewna reguła elementarna jest normalna, w rachunku INT stosujemy, podobnie jak to czyniliśmy w KRZ (por. str. 45), rozumowanie niewprost. Zakładamy mianowicie, że badana reguła nie jest normalna, czyli twierdzimy, że należy do niej taka para, w której ze zbioru przesłanek nie wynika na gruncie INT formuła będąca wnioskiem. Posługując się definicją wynikania wnioskujemy z przyjętego założenia, że istnieje wiązka wartościowań intuicjonistycznych i pewne w niej wartościowanie spełniające zbiór przesłanek, a nie spełniające wniosku. Wartościowanie to przypisuje każdej z przesłanek wartość **1**, a wnioskowi wartość **0**. Przebieg rozumowania zapisujemy w diagramach, takich jak te, z których korzystaliśmy sprawdzając tautologiczność formuł w INT. Sprzeczność zamykająca każdą z dróg tego rozumowania świadczy o normalności badanej reguły, a jej brak choćby w jednym z rozważanych przypadków potwierdza przyjętą hipotezę, że reguła nie jest normalna. Ponieważ wszystkie pary badanej reguły są oparte na wspólnym schemacie, sprawdzeniu poddajemy właśnie ten schemat.

Przejdźmy teraz do przykładów:

(1) Sprawdzamy, czy jest normalna reguła elementarna o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

Załóżmy, że nie. Istnieje więc wiązka wartościowań intuicjonistycznych i należące do niej wartościowanie v takie, że:



Sprzeczność zamykająca obie drogi tego rozumowania świadczy o tym, że nie powiodła się próba rekonstrukcji wiązki i należącego do niej wartościowania, które spełniając przesłanki, nie spełniałoby wniosku rozpatrywanej reguły. Zachodzi więc wynikanie $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \models_{INT} \beta$, świadczące o normalności badanej reguły.

(2) Sprawdzamy, czy jest normalna reguła elementarna o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \beta\end{array}}{\alpha}$$

Załóżmy, że nie. Istnieje więc wiązka wartościowań intuicjonistycznych i należące do niej wartościowanie v takie, że:

v

	1	0	
	$\alpha \to \beta$		
	β	α	
1.		α	(I 1)

Już rozpatrując pierwszą drogę rekonstrukcji wartościowania obalającego nie natrafiamy na sprzeczność. Istnieje więc taka wiązka wartościowań intuicjonistycznych, do której należy wartościowanie weryfikujące przesłanki i falsyfikujące wniosek pewnej pary należącej do badanej reguły, a zatem reguła ta nie jest normalna na gruncie rachunku INT.

Na zakończenie tych uwag dotyczących reguł normalnych w INT sformułujemy w postaci lematu pewną ogólną obserwację:

Lemat 5 Każda reguła normalna w INT jest też regułą normalną w KRZ.

Lemat ten uzasadniamy rozumowaniem analogicznym do przeprowadzonego w dowodzie lematu 2.

Definicja reguły niezawodnej INT Reguła jest na gruncie INT niezawodna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej należącej do niej pary $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ zawsze wtedy, gdy Φ jest zbiorem tautologii INT, formuła α jest również tautologią tego rachunku.

Reguła podstawiania, niezawodna w KRZ, okazuje się również niezawodną w rachunku INT. Rozumowanie prowadzące do tego wniosku należy wzorować na argumentacji przedstawionej w § 2 rozdziału II (str. 48).

Co więcej, między regułami niezawodnymi w obu porównywanych rachunkach zachodzi następujący związek:

Lemat 6 Każda reguła niezawodna w INT jest też regułą niezawodną w KRZ.

Lemat 6 jest bezpośrednim wnioskiem z lematu 2 udowodnionego z § 2 tego rozdziału oraz definicji reguł niezawodnych w INT oraz KRZ.

Jeżeli chodzi o stosunek między zbiorami reguł normalnych i reguł niezawodnych w INT, to rządzi nim twierdzenie 1 z § 2 rozdziału I.

§ 3. System aksjomatyczny INT

W przypadku rachunku INT rozważania natury syntaktycznej wyprzedzały poszukiwania semantyczne. Najpierw pewne intuicje językowe sformalizowano układem aksjomatów i reguł, a dopiero później skierowano wysiłki na stworzenie modelu semantycznego, którego adekwatność względem tej formalizacji gwarantowana jest twierdzeniem o pełności.

Punktem wyjścia tych badań był KRZ w wersji aksjomatycznej. Należało jednak tak zmodyfikować ten rachunek, by przestały być jego tezami wszystkie formuły, które umożliwiały dowody nieefektywne. Jakie formuły miały być wykluczone ze zbioru tez rachunku INT? Przede wszystkim prawo wyłączonego środka (T 16) $\alpha \vee \neg\alpha$, mocne prawo podwójnej negacji (T 4) $\neg\neg\alpha \to \alpha$, mocne prawo kontrapozycji (Ax. 11) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$, mocne prawo Claviusa (T 11) $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$, prawo Peirce'a (T 15) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$, żeby wymienić najbardziej charakterystyczne, a zarazem najmocniej kwestionowane. Równocześnie należało zachować daleko idącą ostrożność, by w zbiorze tez rachunku INT pozostały oczywiste również dla intuicjonistów formuły, takie jak prawo niesprzeczności $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ czy też prawo przepełnienia (T 9) $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$. Skutkiem realizacji tych postulatów była istotna, chociaż na pierwszy rzut oka nieznaczna, modyfikacja układu aksjomatów dla KRZ. Tak więc:

Aksjomatem naszego systemu rachunku INT będzie każda formuła powstająca przez prawidłowe podstawienie w którymkolwiek z poniższych schematów aksjomatów dowolnych formuł języka rachunku INT w miejsce greckich liter α, β, γ:

Schematy aksjomatów INT

Ax. 1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$	
Ax. 2 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	sylogizm hipotetyczny
Ax. 3 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	prawo komutacji
Ax. 4 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	prawo skracania
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 7 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$	prawo mnożenia następników
Ax. 8 $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 9 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 10 $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$	prawo dodawania poprzedników
Ax. 11′ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$	słaby dylemat destrukcyjny
Ax. 12 $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$	prawo przepełnienia.

Wobec nieskończoności zbioru Σ_{INT} na aksjomatykę rachunku INT składa się nieskończenie wiele formuł, z których każda jest pewnym podstawieniem jednego z dwunastu przytoczonych wyżej schematów.

Jedyną **regułą pierwotną** naszego systemu INT jest reguła elementarna o schemacie:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

zwaną **regułą odrywania (RO)**. Pamiętamy, że była ona również jedyną regułą pierwotną systemu aksjomatycznego KRZ.

DEFINICJA TEZY INT WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO INT WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW INT,

ALBO (2) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA.

Mówiąc swobodnie: tezą INT jest każda formuła, którą można wyprowadzić z aksjomatów systemu przez skończeniekrotne stosowanie reguły odrywania.

Dowody tez w rachunku INT zapisywać będziemy dokładnie tak samo jak to czyniliśmy w KRZ, a więc w postaci ciągów formuł numerowanych po lewej i opisanych po prawej stronie. Przykładowy dowód prawa tożsamości: $p \rightarrow p$ przeprowadzony na gruncie KRZ (por. str. 51) jest również dobrym dowodem intuicjonistycznym. Z powodów, które wyjaśnialiśmy w § 3 rozdziału II (str. 52) także w rachunku intuicjonistycznym dowodzić będziemy nie poszczególnych tez, lecz ich schematów.

Porównując aksjomatyki rachunków: INT oraz KRZ, dochodzimy do wniosku, że każdy aksjomat rachunku INT jest albo aksjomatem, albo tezą KRZ, bowiem schematy Ax. 1 - Ax. 10 są identyczne w obu rachunkach, natomiast Ax. 11′ i Ax. 12 znamy z KRZ jako schematy tez, T 12 i T 9. Wobec faktu, że jedyna reguła pierwotna systemu aksjomatycznego INT jest równocześnie regułą w KRZ, każdy dowód przeprowadzony w INT może być uznany za dowód na gruncie KRZ. W związku z tym oczywisty jest następujący

LEMAT 7 KAŻDA TEZA INT JEST TEZĄ KRZ.

Zależność odwrotna nie zachodzi.

Dokonamy teraz przeglądu tez dowiedzionych w KRZ, aby odpowiedzieć na pytanie, czy są wśród nich takie, które na podstawie dowodów przeprowadzonych w KRZ uznać można za tezy rachunku INT. Niewątpliwie wszystkie formuły oparte na schematach:

(T 1) $\alpha \rightarrow \alpha$	prawo tożsamości
(T 2) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$	prawo symplifikacji

są również tezami w INT. Dowody tych schematów w KRZ (por. str. 52) odwołują się do środków, z których wolno nam korzystać również na terenie rachunku INT. Dowód schematu

(T 3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ sylogizm Fregego

odwołuje się do wtórnych na gruncie KRZ środków dowodowych: reguły komutacji i reguły przechodniości implikacji (por. str. 54). Jak niebawem wykażemy, reguły te wolno nam będzie stosować również w rachunku INT, zatem również T 3 uznamy za schemat tez INT na podstawie jego „klasycznego" dowodu.

(T 9) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ prawo przepełnienia

(T 12) $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ słaby dylemat destrukcyjny

wprowadzamy do rachunku INT bez dowodów, jako schematy aksjomatów: Ax. 12 i Ax. 11'. Studiując natomiast dowody schematów T 4, T 5, T 6, T 7, T 8, T 10 i T 11 dochodzimy do wniosku, że bezpośrednio lub pośrednio wykorzystują one właściwy dla KRZ Ax. 11 $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$ – mocne prawo kontrapozycji, które nie figuruje na liście schematów aksjomatów rachunku INT. Żaden z tych dowodów nie może więc być podstawą uznania wyprowadzonego w nim prawa za schemat tez rachunku INT. Chociaż niektóre spośród tych schematów okażą się ważne na gruncie INT (T 5, T 6, T 7, T 10), ich dowody muszą być zmodyfikowane tak, aby wykorzystywały jedynie środki dowodowe właściwe z punktu widzenia omawianego systemu. Nowe, intuicjonistyczne dowody wymienionych praw przytoczymy po uzupełnieniu pierwotnego zestawu środków dowodowych – wtórnymi.

Odsyłając Czytelnika do § 3 rozdziału I, gdzie obszernie omawialiśmy ogólne aspekty „bezpiecznego" wzbogacania arsenału środków dowodowych, powtórzymy jedynie konkluzję tych rozważań: do każdego dowodu wolno nam wpisać każdą wcześniej udowodnioną tezę oraz wolno posługiwać się w nim regułami wyprowadzalnymi w danym systemie aksjomatycznym. A oto definicje przenoszące na teren rachunku INT pojęcie reguły wyprowadzalnej:

Definicja relacji dowiedlności w INT Formuła α jest dowiedlna w INT ze zbioru formuł Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{d\text{-}INT} \alpha$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, którego ostatnim wyrazem jest $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ i w którym dowolny wyraz jest

albo (1) elementem zbioru Φ (założeniem),
albo (2) aksjomatem opartym na jednym ze schematów aksjomatów INT,
albo (3) powstał z poprzedzających go wyrazów tego ciągu przez zastosowanie reguły odrywania.

Definicja reguły wyprowadzalnej w INT Reguła jest wyprowadzalna w systemie aksjomatycznym INT wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej należącej do niej pary $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \vdash_{d\text{-}INT} \alpha$.

Jeżeli więc chcemy uzasadnić w INT wyprowadzalność pewnej reguły o schemacie $\langle \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \{\beta\} \rangle$ wystarczy, że wykażemy intuicjonistyczną dowiedlność schematu wniosku β ze schematów przesłanek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Uzasadnieniu takiemu nadajemy – podobnie jak w KRZ – kształt skończonego ciągu numerowanych i dokładnie opisanych formuł.

Ponieważ każdy aksjomat INT jest aksjomatem bądź tezą KRZ, a jedyna reguła pierwotna INT jest zarazem regułą pierwotną KRZ, oczywisty jest

Lemat 8 Każda reguła wyprowadzalna w INT jest też regułą wyprowadzalną w KRZ.

Równie oczywisty jak sam lemat jest fakt, że zależność odwrotna nie zachodzi.

Przeglądając dowody reguł wyprowadzalnych w KRZ: RKom, RPI, RP, PRO – konstatujemy, że zachowują one swoją moc uzasadniającą również na terenie rachunku INT. Wykorzystuje się w nich bowiem tylko takie pierwotne środki dowodowe, które są wspólne systemom aksjomatycznym obu rachunków. Tak więc na podstawie uzasadnień z § 3 rozdziału II (str. 53-54) uznajemy, że następujące reguły są wyprowadzalne w systemie aksjomatycznym rachunku INT:

(RKom) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$ Reguła komutacji

(RP) $\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$ Reguła poprzedzania

(RPI) $\dfrac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$ Reguła przechodniości implikacji

(PRO) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \quad \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$ Poprzedzona reguła odrywania

Ponieważ na liście reguł wyprowadzalnych w INT są między innymi reguły, które stosowaliśmy w „klasycznym" dowodzie T 3, a zatem dowód tego schematu nie budzi zastrzeżeń jako dowód intuicjonistyczny. Korzystając ze wzbogaconego asortymentu środków dowodowych wykażemy teraz, że wspomniane już: T 5, T 6, T 7 i T 10 są schematami tez naszego aksjomatycznego systemu rachunku INT.

(T 5) $\alpha \to \neg\neg\alpha$ słabe prawo podwójnego przeczenia

1. $(\neg\alpha \to \alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha)$ Ax. 11' $\alpha/\neg\alpha$, β/α
2. $\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha)$ T 2 $\beta/\neg\alpha$
3. $\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha)$ RPI 2, 1
4. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)$ RKom 3
5. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ T 1 $\alpha/\neg\alpha$
6. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ RO 4, 5

(T 6) $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\beta)$ słabe prawo transpozycji

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ Ax. 11'
2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ T 2 α/β, β/α
3. $\beta \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ RPI 2, 1
4. $(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$ RKom 3

(T 7) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ słabe prawo kontrapozycji

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ Ax. 11'
2. $(\alpha \to \neg\beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ RKom 1
3. $\neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta)$ T 2 $\alpha/\neg\beta$, β/α
4. $\neg\beta \to ((\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ RPI 3, 2
5. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ RKom 4

(T 10) $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ słabe prawo Claviusa

1. $(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)$ Ax. 11' β/α

2. $\alpha \to \alpha$ T 1
3. $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$ RO 1, 2

Dopuszczając nowe sposoby dołączania kolejnych wierszy dowodowych (wpisywanie gotowych tez, stosowanie reguł wyprowadzalnych) przekształcamy definicję relacji dowiedlności w definicję relacji inferencji:

Definicja relacji inferencji w INT Formuła α jest inferowalna w INT ze zbioru formuł Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{INT} \alpha$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg wyrażeń sensownych $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, którego ostatnim wyrazem jest $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ i w którym dowolny wyraz jest
albo (1) elementem zbioru Φ (założeniem),
albo (2) tezą INT (w szczególności – aksjomatem opartym na którymś ze schematów aksjomatów INT),
albo (3) powstaje z poprzedzających go wyrazów ciągu przez zastosowanie reguły odrywania bądź dowolnej reguły wyprowadzalnej w INT.

Przypomnijmy, jakie ogólne własności przysługują relacji inferencji w rachunku INT.

Lemat 9 (i) $\Phi \vdash_{d-INT} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \vdash_{INT} \alpha$;
(ii) $\varnothing \vdash_{INT} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą INT;
(iii) $\Phi \vdash_{INT} \Phi$;
(iv) Jeśli $\Phi \vdash_{INT} \Psi$ oraz $\Psi \vdash_{INT} \Omega$, to $\Phi \vdash_{INT} \Omega$;
(v) Jeśli $\Phi \vdash_{INT} \alpha$ oraz $\Phi \subset \Psi$, to $\Psi \vdash_{INT} \alpha$.

Dowody poszczególnych faktów składających się na lemat 9 znajdzie Czytelnik w § 3 rozdziału I (lematy 1-4). Wystarczy w nich tylko każde wystąpienie symboli: $\vdash_d$ oraz $\vdash$ zastąpić symbolami $\vdash_{d-INT}$ oraz $\vdash_{INT}$.

Relacji inferencji w KRZ przysługiwały pewne specyficzne własności, ujmujące zależności między relacją inferencji a stałymi logicznymi: implikacją i negacją. Sformułowaliśmy je w § 3 rozdziału II w postaci tzw. twierdzeń o dedukcji (por. twierdzenia 4-6). Dwa spośród nich obowiązują także na gruncie rachunku INT:

Twierdzenie 3 (o dedukcji wprost)
Jeżeli $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \beta$, to $\Phi \vdash_{INT} \alpha \to \beta$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \beta$. Wobec definicji relacji $\vdash_{INT}$ istnieje skończony ciąg formuł uzasadniający inferencję β ze zbioru $\Phi \cup \{\alpha\}$. Niech w tym ciągu formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tworzące zbiór Ψ, (taki że $\Psi \subset \Phi$), pełnią rolę założeń. A zatem: $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \beta$. Stąd oraz z lematu 9 (i) wnioskujemy, że $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-INT} \beta$. Oznacza to istnienie skończonego ciągu Π: $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, w którym $\gamma_k = \beta$, uzasadniającego dowiedlność β ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$. Ciąg Π zbudowany jest wyłącznie przy użyciu pierwotnych środków dowodowych. Tworzymy następnie nowy ciąg formuł Ω:

$$(\Omega) \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha \to \gamma_1, \alpha \to \gamma_2, \ldots, \alpha \to \gamma_k,$$

którego ostatnim wyrazem jest formuła $\alpha \to \beta$. Wykażemy posługując się indukcją ze względu na budowę ciągu Π, że Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Rozważmy zatem ciąg Π. Dowolna należąca doń formuła $\gamma_m (1 \leqslant m \leqslant k)$ jest

albo (1) założeniem ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$,
albo (2) aksjomatem rachunku INT,
albo (3) wynikiem stosowania reguły odrywania do pewnych wyrazów ciągu Π wcześniejszych od γ_m.

(1) Gdy $\gamma_m \in \Psi$, wówczas formułę $\alpha \to \gamma_m$ wolno wpisać do ciągu Ω jako wynik zastosowania wyprowadzalnej w INT reguły poprzedzania. Jeśli $\gamma_m = \alpha$, wówczas formuła $\alpha \to \gamma_m$ przybiera postać $\alpha \to \alpha$ i może być wprowadzona do ciągu Ω jako teza oparta na schemacie T 1.

(2) Gdy γ_m jest aksjomatem, wówczas formułę $\alpha \to \gamma_m$ wpisujemy do ciągu Ω jako tezę uzyskaną w wyniku użycia reguły poprzedzania do tego aksjomatu.

(3) Gdy γ_m powstała w wyniku aplikowania reguły odrywania do wyrazów ciągu Π wcześniejszych od γ_m, istnieją s, t < m takie, że $\gamma_t = \gamma_s \to \gamma_m$. Na mocy samej konstrukcji ciągu Ω wyrażenia $\alpha \to \gamma_s$ oraz $\alpha \to \gamma_t = \alpha \to (\gamma_s \to \gamma_m)$ występują w nim przed formułą $\alpha \to \gamma_m$, a więc można uzasadnić jej obecność w ciągu Ω powołując się na poprzedzoną regułę odrywania.

Wykazaliśmy tym samym, że ciąg Ω uzasadnia inferowalność $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Stąd, na mocy lematu 9 (v), wnioskujemy, że $\Phi \vdash_{INT} \alpha \to \beta$ ●

TWIERDZENIE 4 (O DEDUKCJI NIEWPROST — SŁABE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\Phi \vdash_{INT} \neg\alpha$.

Dowód. Załóżmy (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \gamma$ i $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \neg\gamma$. Na mocy twierdzenia o dedukcji wprost otrzymujemy z kolei: (2) $\Phi \vdash_{INT} \alpha \to \gamma$ i $\Phi \vdash_{INT} \alpha \to \neg\gamma$, co oznacza, że (3) $\Phi \vdash_{INT} \{\alpha \to \gamma, \alpha \to \neg\gamma\}$. Korzystając z Ax. 11′ i reguły odrywania uzasadniamy kolejną inferencję (4) $\{\alpha \to \gamma, \alpha \to \neg\gamma\} \vdash_{INT} \neg\alpha$. Z (3) i (4) na mocy lematu 9 (iv) wnioskujemy, że $\Phi \vdash_{INT} \neg\alpha$ ●

Mocne twierdzenie o dedukcji niewprost w rachunku INT n i e o b o w i ą z u j e. W dowodzie tego twierdzenia prowadzonym na gruncie KRZ (por. twierdzenie 6, str. 60) wykorzystywaliśmy schemat mocnego prawa podwójnego przeczenia — T 4, którego środkami intuicjonistycznymi udowodnić nie można.

Na zakończenie tych rozważań sformułujemy obowiązujące w INT twierdzenia o dedukcji w wersji szczególnie użytecznej dla praktyki dowodowej:

TWIERDZENIE O DEDUKCJI WPROST (TDW)
JEŻELI $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \vdash_{INT} \beta$, TO $\varnothing \vdash_{INT} \alpha_1 \to (\ldots(\alpha_k \to \beta)\ldots)$.

SŁABE TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIEWPROST (STDN)
JEŻELI $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta\} \vdash_{INT} \{\gamma, \neg\gamma\}$, TO $\varnothing \vdash_{INT} \alpha_1 \to (\ldots(\alpha_k \to \neg\beta)\ldots)$.

Oba te twierdzenia — TDW i STDN — są bezpośrednimi wnioskami z twierdzeń 3 i 4. W praktyce dowodowej mają one bardzo istotne znaczenie (por. komentarz na str. 61 - 63), ponieważ postępując zgodnie z wyrażoną w nich dyrektywą, możemy orzec o formule, że jest tezą INT na podstawie określonej inferencji, której uzasadnienie jest zazwyczaj o wiele łatwiejsze od budowy dowodu aksjomatycznego.

Spośród czterech przykładów podanych w KRZ dla zilustrowania sposobu stosowania twierdzeń o dedukcji tylko dwa: (1) i (2), dadzą się powtórzyć w rachunku INT:

(1) Wykażemy, że schematem tez INT jest (T 13) $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$.
Najpierw uzasadniamy inferencję: $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash_{INT} \beta$.

1.	α	założenie
2.	$\alpha \to \beta$	założenie
3.	β	RO 2, 1

Ciągiem formuł 1 - 3 potwierdziliśmy fakt, że $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \vdash_{INT} \beta$.

Wobec TDW: $\varnothing \vdash_{INT} \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$, co zgodnie z lematem 9 (ii) oznacza, że formuła $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ jest schematem tez INT.

(2) Wykażemy, że schematem tez INT jest (T 14) $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$. Najpierw, poniższym ciągiem, uzasadniamy następującą inferencję: $\{(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta, \alpha\} \vdash_{INT} \{\gamma, \neg\gamma\}$.

1.	$(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta$	założenie
2.	α	założenie
3.	$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to (\alpha \to \beta)$	Ax. 5 $\alpha/\alpha \to \beta$, $\beta/\neg\beta$
4.	$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\beta$	Ax. 6 $\alpha/\alpha \to \beta$, $\beta/\neg\beta$
5.	$\alpha \to \beta$	RO 3, 1
6.	$\neg\beta$	RO 4, 1
7.	β	RO 5, 2
8.	$\beta \to (\neg\beta \to \gamma)$	Ax. 12 α/β, β/γ
9.	$\beta \to (\neg\beta \to \neg\gamma)$	Ax. 12 α/β, $\beta/\neg\gamma$
10.	$\neg\beta \to \gamma$	RO 8, 7
11.	$\neg\beta \to \neg\gamma$	RO 9, 7
12.	γ	RO 10, 6
13.	$\neg\gamma$	RO 11, 6

Wykazaliśmy więc, że $\{(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta, \alpha\} \vdash_{INT} \{\gamma, \neg\gamma\}$. W myśl STDN wnioskujemy zatem, że $\varnothing \vdash_{INT} ((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$, co wobec lematu 9 (ii) znaczy, że T 14 jest schematem tez INT.

Podobnie jak w KRZ, relacji $\vdash_{INT}$ przysługuje jeszcze jedna ważna własność:

Lemat 10 Jeśli $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{INT} \gamma$ oraz $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{INT} \gamma$, to wtedy $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{INT} \gamma$.

Dowód lematu 10 możemy pominąć, gdyż Czytelnik z łatwością odtworzy go na podstawie dowodu analogicznego lematu, kończącego paragraf poświęcony syntaktycznemu ujęciu KRZ (lemat 2, § 3 rozdziału II, str. 63 - 64).

§ 4. *Twierdzenie o pełności dla INT*

Udowodnimy z kolei, realizując plan nakreślony w rozdziale I, że semantyczny i syntaktyczny opis INT są dwiema wersjami tego samego rachunku logicznego.

Twierdzenie 5 (o pełności dla INT) Dla dowolnego wyrażenia sensownego α języka INT: α jest tezą INT wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią INT.

Dowód. (I) Uzasadnienie faktu, że każda teza rachunku INT jest tautologią tego rachunku, wymaga, jak pamiętamy z rozważań w § 4 rozdziału I, przeprowadzenia rozumowania indukcyjnego z uwagi na długość dowodu danej tezy. Należy zatem wykazać, że:

1° każdy schemat aksjomatów INT jest schematem tautologii tego rachunku oraz, że

2° każda reguła pierwotna aksjomatycznego systemu INT jest regułą niezawodną w tym rachunku.

Ten ostatni fakt wynika bezpośrednio z przykładu (1) (str. 91) i twierdzenia 1 udowodnionego w § 2 rozdziału II; natomiast sprawdzenie, że istotnie wszystkie schematy aksjomatów są schematami tautologicznymi, pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie. Skoro każdy aksjomat INT jest formułą tautologiczną, a jedyna reguła pierwotna INT prowadzi od tautologii do tautologii, zatem i każda teza tego rachunku musi być tautologią. Zamykamy tym samym pierwszą część dowodu twierdzenia o pełności i przechodzimy do znacznie trudniejszej części drugiej:

(II) Każda tautologia INT jest tezą tego rachunku.

Podobnie jak w KRZ, zastosujemy tu metodę Henkina opisaną ogólnie w § 4 rozdziału I. Celem, do którego będziemy dążyć, jest rekonstrukcja wartościowania obalającego pewną formułę α, o której założymy dla dowodu niewprost, że będąc tautologią nie jest tezą rachunku INT. Dla określenia takiego wartościowania skorzystamy z twierdzenia o relatywnych nadsystemach zupełnych (por. str. 26 - 28), które tu przypominamy w wersji dostosowanej do rachunku INT:

Twierdzenie 6 (o relatywnych nadsystemach zupełnych dla INT). Jeżeli formuła α nie jest inferowalna z Ω, to istnieje zbiór formuł INT Π^{α}_{Ω} taki, że:

(1) $\alpha \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;

(2) jeżeli $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{INT} \beta$, to $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;

(3) jeżeli $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, to $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{INT} \alpha$;

(4) $\Omega \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Zbiór Π^{α}_{Ω}, poza wyżej przytoczonymi, posiada jeszcze inne, specyficzne dla rachunku INT własności. Przedstawiamy je w kolejnym lemacie. Łatwo dostrzec, porównując jego treść z wypowiedzią lematu 3 z §4 rozdziału II, że własności zbioru Π^{α}_{Ω} są w INT słabsze niż w KRZ.

LEMAT 11 (1) JEŚLI $\neg\beta\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\beta\notin\Pi^{\alpha}_{\Omega}$;

(2) $\beta\wedge\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ ORAZ $\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$;

(3) $\beta\vee\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$;

(4) JEŚLI $\beta\to\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\beta\notin\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Dowód. (1) Załóżmy, że $\neg\beta\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i niewprost, że $\beta\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Stąd, wobec definicji relacji inferencji: $\Pi^{\alpha}_{\Omega}\vdash_{INT}\{\beta,\neg\beta\}$. Korzystając z Ax. 12 $\beta\to(\neg\beta\to\alpha)$ ustalamy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega}\vdash_{INT}\alpha$, co zgodnie z twierdzeniem 6 (2) oznacza, że $\alpha\in\Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Sprzeczność z twierdzeniem 6 (1) kończy dowód tej części lematu.
Implikacja odwrotna nie zachodzi. W KRZ dla jej dowodu korzystaliśmy z prawa wyłączonego środka, które nie jest tezą INT.

Dowody pozostałych warunków lematu 11 pomijamy, gdyż są one dokładnie takie same jak dowody odpowiednich warunków 2(i)-4(i) lematu 3 z §4 rozdziału II, o ile tylko występujący tam symbol inferencji $\vdash_{KRZ}$ zastąpić konsekwentnie znakiem $\vdash_{INT}$. Implikacja z 4(ii) w intuicjonizmie nie zachodzi. Dla jej uzasadnienia w KRZ korzystaliśmy z warunku 1(ii), on zaś – jak wspomnieliśmy wyżej – w INT nie jest prawdziwy •

Zbiór formuł Φ nazywać będziemy **systemem** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on następujący warunek:

$$\text{jeżeli} \quad \Phi\vdash_{INT}\alpha, \quad \text{to} \quad \alpha\in\Phi.$$

Odnotujmy, że zbiór Π^{α}_{Ω}, którego istnienie wykazaliśmy w twierdzeniu 6, jest systemem (por. warunek 2 tego twierdzenia).

LEMAT 12 JEŚLI Φ JEST SYSTEMEM, WÓWCZAS SPEŁNIONE SĄ NASTĘPUJĄCE DWA WARUNKI:

(1) JEŚLI $\neg\beta\notin\Phi$, TO ISTNIEJE ZBIÓR $\Pi^{\neg\beta}_{\Phi\cup\{\beta\}}$ MAJĄCY WŁASNOŚCI 1-4 Z TWIERDZENIA 6.

(2) JEŚLI $\beta\to\gamma\notin\Phi$, TO ISTNIEJE ZBIÓR $\Pi^{\gamma}_{\Phi\cup\{\beta\}}$ MAJĄCY WŁASNOŚCI 1-4 Z TWIERDZENIA 6.

Dowód. Zakładamy, że zbiór formuł Φ jest systemem. W obu warunkach składających się na lemat 12, aby wykazać istnienie stosownego zbioru, wystarczy stwierdzić, że spełnione są założenia twierdzenia 6, odpowiednio: $\Phi\cup\{\beta\}\nvdash_{INT}\neg\beta$ oraz $\Phi\cup\{\beta\}\nvdash_{INT}\gamma$.

(1) Załóżmy więc, że $\neg\beta\notin\Phi$ i niewprost, że $\Phi\cup\{\beta\}\vdash_{INT}\neg\beta$. Stosując twierdzenie o dedukcji wprost otrzymujemy z założenia niewprost, że $\Phi\vdash_{INT}\beta\to\neg\beta$. Ponieważ tezą INT jest słabe prawo Claviusa (T 10) $(\beta\to\neg\beta)\to\neg\beta$, mamy dalej $\Phi\vdash_{INT}\neg\beta$. Skoro przyjęliśmy, że Φ jest systemem, zatem $\neg\beta\in\Phi$. Dochodzimy więc do sprzeczności z założeniem i w konsekwencji uznajemy, że spełniony jest warunek: $\Phi\cup\{\beta\}\nvdash_{INT}\neg\beta$. Zgodnie z twierdzeniem 6 istnieje więc zbiór $\Pi^{\neg\beta}_{\Phi\cup\{\beta\}}$ o własnościach wyliczonych w punktach (1)-(4) tego twierdzenia.

(2) Załóżmy z kolei, że $\beta\to\gamma\notin\Phi$ i niewprost, że $\Phi\cup\{\beta\}\vdash_{INT}\gamma$. Wobec twierdzenia o dedukcji wprost: $\Phi\vdash_{INT}\beta\to\gamma$. Skoro Φ jest systemem, to $\beta\to\gamma\in\Phi$. Sprzeczność z założeniem prowadzi do zaakceptowania $\Phi\cup\{\beta\}\nvdash_{INT}\gamma$, a to pozwala skorzystać z twierdzenia 6 i stwierdzić istnienie zbioru $\Pi^{\gamma}_{\Phi\cup\{\beta\}}$ •

Powróćmy teraz do II części dowodu twierdzenia o pełności dla INT. Załóżmy, że α nie jest tezą naszego aksjomatycznego systemu INT. W myśl lematu 9(ii) oznacza to, że $\varnothing\nvdash_{INT}\alpha$. Istnieje więc na mocy twierdzenia 6 zbiór $\Pi^{\alpha}_{\varnothing}$ (który dalej oznaczać będziemy symbolem Π^{α}) spełniający wszystkie warunki tego twierdzenia oraz lematu 11. Zbiór Π^{α} jest systemem (por. twierdzenie 6 (2)), wolno więc w myśl lematu 12 skonstruować dlań zbiory kształtu $\Pi^{\neg\gamma}_{\Pi^{\alpha}\cup\{\gamma\}}$ i $\Pi^{\delta}_{\Pi^{\alpha}\cup\{\gamma\}}$, o ile $\neg\gamma\notin\Pi^{\alpha}$ oraz $\gamma\to\delta\notin\Pi^{\alpha}$. Takie zbiory same też są systemami, stąd (znowu stosując lemat 12) można dla nich tę konstrukcję powtórzyć itd.

Rozważmy teraz rodzinę $\mathbf{\Phi}$ zbiorów formuł, na którą składają się: zbiór Π^{α} oraz wszystkie zbiory powstałe na mocy lematu 12 ze zbiorów należących do $\mathbf{\Phi}$. Podkreślmy raz jeszcze, że każdy zbiór z rodziny $\mathbf{\Phi}$ spełnia warunki (1)-(4) twierdzenia 6 oraz (1)-(4) lematu 11.

Tworzymy z kolei rodzinę odwzorowań $\mathbf{V}$, z których każde związane jest z dokładnie jednym zbiorem z rodziny $\mathbf{\Phi}$ i określone następującym warunkiem:

Dla dowolnego $\Pi\in\mathbf{\Phi}$ oraz dowolnego $\beta\in\Sigma_{INT}$

$$v_\Pi(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \beta \in \Pi \\ 0 & \text{gdy} \quad \beta \notin \Pi \end{cases}$$

W rodzinie **V** określamy relację **R** między odwzorowaniami postulując, by:

$$v_\Pi \mathbf{R}\, v_\Omega \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Pi \subset \Omega$$

Bezpośrednio z określenia relacji **R** wnioskujemy, że jest ona, podobnie jak relacja inkluzji ($\subset$), zwrotna i przechodnia.

Jest też oczywiste, że gdy $v_\Pi(\beta) = \mathbf{1}$, to dla dowolnego odwzorowania v_Ω pozostającego z v_Π w relacji **R**: $v_\Omega(\beta) = \mathbf{1}$. Załóżmy bowiem, że istotnie $v_\Pi(\beta) = \mathbf{1}$. Zatem, z określenia odwzorowania v_Π, wiemy, że $\beta \in \Pi$. Zachodzeniu relacji między odwzorowaniami odpowiada inkluzja $\Pi \subset \Omega$. Zatem $\beta \in \Omega$, a w konsekwencji $v_\Omega(\beta) = \mathbf{1}$. Wykazaliśmy zatem, że dowolne odwzorowanie z rodziny **V** spełnia warunek (1) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych. Aby wykazać, że rodzina **V** z relacją **R** tworzy taką właśnie wiązkę, należy dowieść, że dowolne należące do niej odwzorowanie v_Π spełnia również pozostałe warunki wspomnianej definicji. Drobiazgowy dowód tego faktu byłby zbyt długi na to, aby przytaczać go w całości, dlatego ograniczmy się do przedstawienia tutaj wyłącznie jego części dotyczącej funktorów negacji i implikacji.

Załóżmy, że v_Π jest dowolnym odwzorowaniem ze zbioru **V**, natomiast Π — elementem rodziny zbiorów $\mathbf{\Phi}$, a nadto γ i δ są dowolnymi formułami z Σ_{INT}.

Rozpoczynamy sprawdzanie warunku dla n e g a c j i:
Gdy $v_\Pi(\neg\gamma) = \mathbf{1}$, wówczas dla każdego odwzorowania v_Ω pozostającego w relacji **R** do v_Π: $v_\Omega(\neg\gamma) = \mathbf{1}$. Z definicji odwzorowania wnioskujemy, że $\neg\gamma \in \Omega$, a następnie, używając lematu 11 (1), że $\gamma \notin \Omega$. Ponownie korzystając z określenia odwzorowania v_Ω ustalamy, że $v_\Omega(\gamma) = \mathbf{0}$ dla dowolnego odwzorowania v_Ω pomocniczego względem v_Π.
Gdy $v_\Pi(\neg\gamma) = \mathbf{0}$, wtedy $\neg\gamma \notin \Pi$ z określenia odwzorowania v_Π. Zbiór Π jest, jak pamiętamy, systemem, istnieje zatem na mocy lematu 12 (1) stosowny zbiór $\Pi^{\neg\gamma}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$, który wraz z Π należy do rodziny $\mathbf{\Phi}$. Zgodnie z definicją relacji **R** jest on pomocniczy względem Π i oczywiście $\Pi \subset \Pi^{\neg\gamma}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$. Na mocy twierdzenia 6 (4): $\Pi \cup \{\gamma\} \subset \Pi^{\neg\gamma}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$; a więc $\gamma \in \Pi^{\neg\gamma}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$, co wobec definicji odwzorowań tworzących rodzinę **V** pozwala wnioskować, że $v_{\Pi^{\neg\gamma}_{\Pi\cup\{\gamma\}}}(\gamma) = \mathbf{1}$. Wykazaliśmy tym samym, że kiedy zachodzi $v_\Pi(\neg\gamma) = \mathbf{0}$, to istnieje takie wartościowanie pomocnicze, przy którym formuła γ przyjmuje wartość $\mathbf{1}$.

Z kolei sprawdzamy warunek dla i m p l i k a c j i:
Gdy $v_\Pi(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$, wówczas dla każdego odwzorowania v_Ω pomocniczego względem v_Π także mamy $v_\Omega(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$. Dla każdego z tych wartościowań (także do v_Π, które jest pomocnicze względem samego siebie z uwagi na zwrotność **R**) stosuje się rozumowanie następujące: ponieważ $v_\Omega(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}$, więc zgodnie z definicją odwzorowań tworzących rodzinę **V**: $\gamma \to \delta \in \Omega$. Możemy wnosić stąd, na podstawie lematu 11 (4), że $\gamma \notin \Omega$ lub $\delta \in \Omega$. To zaś oznacza, że dla dowolnego odwzorowania v_Ω pomocniczego względem v_Π zachodzi albo $v_\Omega(\gamma) = \mathbf{0}$, albo $v_\Omega(\delta) = \mathbf{1}$. Gdy $v_\Pi(\gamma \to \delta) = \mathbf{0}$, z definicji odwzorowań tworzących rodzinę **V** wnioskujemy, że $\gamma \to \delta \notin \Pi$. Na mocy lematu 12 (2) istnieje zbiór $\Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$, który zgodnie z określeniem rodziny $\mathbf{\Phi}$ także stanowi jej element. Z uwagi na twierdzenie 6 (4) zachodzi inkluzja $\Pi \cup \{\gamma\} \subset \Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$. Wynika stąd po pierwsze: $\Pi \subset \Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$ co wobec definicji relacji **R** oznacza, że $v_{\Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}}$ jest odwzorowaniem pomocniczym w stosunku do v_Π, zaś po drugie mamy: $\gamma \in \Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$, co w myśl określenia odwzorowań z rodziny **V** pozwala stwierdzić, że $v_{\Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}}(\gamma) = \mathbf{1}$. Z twierdzenia 6 (1) wiemy, że $\delta \notin \Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}$, a zatem $v_{\Pi^{\delta}_{\Pi\cup\{\gamma\}}}(\delta) = \mathbf{0}$. Pokazaliśmy zatem, że istnieje wartościowanie pomocnicze względem v_Π, które spełnia poprzednik i zarazem falsyfikuje następnik rozważanej implikacji.

Konkludując: w przedstawionym tu fragmencie dowodu II części twierdzenia o pełności dla INT stwierdziliśmy, że dowolne odwzorowanie v_Π z rodziny **V** spełnia warunki (5) oraz (4) definicji wiązki wartościowań intuicjonistycznych.

Czytelnik winien samodzielnie sprawdzić, że spełnia ono również warunki (2) i (3) — dla koniunkcji i alternatywy. Na podstawie tak uzupełnionego dowodu wolno nam będzie stwierdzić, że rodzina **V** wraz ze zwrotną i przechodnią relacją **R** stanowi istotnie wiązkę wartościowań intuicjonistycznych.

Przypomnijmy, że do rodziny $\mathbf{\Phi}$ należy w zbiór Π^{α}. W wiązce **V** istnieje zatem związane z nim wartościowanie $v_{\Pi^{\alpha}}$. Z uwagi na twierdzenie 6 (1) mamy $\alpha \notin \Pi^{\alpha}$, co na mocy określenia odwzorowań z rodziny **V** oznacza, że $v_{\Pi^{\alpha}}(\alpha) = \mathbf{0}$. Skonstruowaliśmy więc wiązkę wartościowań intuicjonistycznych i wskazaliśmy w niej takie wartościowanie, które obala formułę α, mimo założenia jej tautologiczności w rachunku INT. Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia o pełności dla INT •

Udowodnione wyżej twierdzenie świadczy o tym, że oba ujęcia rachunku INT – semantyczne i syntaktyczne – prezentują jeden i ten sam rachunek logiczny.

Rozdział IV

Trójwartościowy rachunek zdań Łukasiewicza

W §2 rozdziału II oprócz spójników **ekstensjonalnych** analizowanych w KRZ wyróżniliśmy spójniki **intensjonalne**, uzależniające ocenę logiczną zdania złożonego zbudowanego przy ich pomocy nie tylko od oceny zdań składowych, lecz także od dodatkowych informacji, zazwyczaj dotyczących ich treści.

Wśród spójników intensjonalnych na szczególną uwagę zasługują tzw. **modalności aletyczne**, tj. zwroty: „konieczne, że ...", „możliwe, że ...". Badane już przez Arystotelesa, przewijające się w rozważaniach uczonych Średniowiecza, są także obecnie przedmiotem intensywnych dociekań logików i filozofów. Jedną z prób formalnego uchwycenia praw rządzących użyciem tych zwrotów podjął z początkiem lat dwudziestych naszego stulecia **Jan Łukasiewicz**. Wykazał on, że rozważając wartościowania przypisujące formułom nie dwie (**1**, **0**), a trzy (**1**, **1/2**, **0**) wartości logiczne, stwierdzamy, że możliwe jest niesprzeczne opisanie pewnych oczywistych praw dotyczących sposobu posługiwania się owymi modalnymi spójnikami zdaniowymi. Rachunek logiczny, którego wersja semantyczna odwoływała się do takich wartościowań, nazwano **trójwartościowym rachunkiem Łukasiewicza – Ł3**. Był on pierwszym w bardzo licznej rodzinie rachunków wielowartościowych konstruowanych i badanych między innymi przez: **E. Posta** (1921), **A. Heytinga** (1930), **K. Goedla** (1932), **B. Sobocińskiego** (1933), **St. Jaśkowskiego** (1935), **J. Słupeckiego** (1938).

Opisując system Ł3 posłużymy się semantyką stworzoną w latach siedemdziesiątych bieżącego stulecia przez **R. Suszkę**. Jej zasadniczy pomysł polega na zastąpieniu trzeciej wartości logicznej intensjonalną negacją. Koncepcja ta znajduje uzasadnienie w oryginalnym pomyśle

Łukasiewicza, który, rezerwując wartość 1/2 dla zdań o przyszłych zdarzeniach przypadkowych, charakteryzował negację następującą tabelką:

$v(\alpha)$	$v(\neg\alpha)$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

Negacja zdania nieprawdziwego (czyli przyjmującego wartość inną niż 1) może być albo zdaniem nieprawdziwym (wiersz drugi), albo prawdziwym (wiersz trzeci), zależnie od treści tego zdania. O wyborze którejś z tych możliwości decyduje bowiem to, czy w zdaniu tym była mowa o zdarzeniu, które już zaszło, czy też o zdarzeniu przypadkowym, które dopiero zajdzie. Stąd wynika wniosek, że na rachunek Ł3 można patrzeć jak na próbę sformalizowania nieekstensjonalnej negacji.

Twierdzenie o pełności dla rachunku Ł3 opublikował w 1931 roku **M. Wajsberg**, twierdzenia o dedukcji dowiódł **W. A. Pogorzelski** w roku 1964.

§ 1. Język Ł3

Przystępujemy do opisu kolejnego rachunku zdaniowego — trójwartościowego rachunku zdań Łukasiewicza Ł3. Poddamy w nim analizie te same zwroty języka naturalnego:

... i ...
... lub ...
jeżeli ..., to ...
nieprawda, że ...

które były już przedmiotem badań zarówno w KRZ, jak i w INT.

Podstawowa wersja języka Ł3 niczym się nie będzie różnić od języka dwóch poprzednio rozważanych rachunków.

Alfabet języka Ł3. Alfabet ten składa się z trzech następujących grup symboli:

(1) Stałe logiczne: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ zwane odpowiednio funktorami koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji.
(2) Zmienne zdaniowe: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, p_3 \ldots$ tworzące zbiór przeliczalny.
(3) Nawiasy: (,).

Poszczególne symbole alfabetu będziemy interpretować w języku naturalnym analogicznie jak to czyniliśmy w KRZ i INT.

DEFINICJA WYRAŻENIA JĘZYKA Ł3 WYRAŻENIEM JĘZYKA Ł3 JEST KAŻDY SKOŃCZONY CIĄG SYMBOLI ALFABETU TEGO JĘZYKA.

DEFINICJA WYRAŻENIA SENSOWNEGO JĘZYKA Ł3 WYRAŻENIEM SENSOWNYM JĘZYKA Ł3 JEST TAKIE I TYLKO TAKIE WYRAŻENIE TEGO JĘZYKA, KTÓRE ZOSTAŁO ZBUDOWANE ZGODNIE Z NASTĘPUJĄCYMI REGUŁAMI:
(1) KAŻDA POJEDYNCZA ZMIENNA ZDANIOWA JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM,
(2) JEŻELI α, β SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI, TO $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Wyrażenia sensowne języka Ł3, zwane dalej także formułami, tworzą zbiór $\Sigma_{Ł3}$. Poszczególne wyrażenia sensowne i ich zbiory oznaczamy zgodnie z umową z § 1 rozdziału I (por. str. 11).

Przyjęty język rachunku Ł3, zwany podstawowym, ten sam, w którym opisywaliśmy KRZ i INT, pozwala na łatwe zestawienie i porównanie tych trzech rachunków zdaniowych.

Ponieważ, jak wspominaliśmy, rachunek Ł3 był pierwotnie konstruowany z zamiarem wykorzystania go do analizy modalności aletycznych, będziemy chcieli spojrzeć nań pod tym kątem — jako na rachunek modalny. W tym celu uwzględniona zostanie *rozszerzona wersja* języka Ł3, w której przytoczony wyżej alfabet został wzbogacony o dwie stałe logiczne odpowiadające spójnikom modalnym:

symbol $\Box$: dla jednoargumentowego spójnika „konieczne, że ..."
symbol $\Diamond$: dla jednoargumentowego spójnika „możliwe, że ..."

W wyrażeniach rozszerzonej wersji języka Ł3 mogą się więc pojawiać symbole: $\Box$ i $\Diamond$. Aby przy użyciu tych dodatkowych symboli móc tworzyć formuły języka Ł3, należy jeszcze w definicji wyrażenia sensownego dodać regułę:

(3) JEŻELI α JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM, TO $\Box\alpha$ i $\Diamond\alpha$ RÓWNIEŻ SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Dla zbioru wszystkich formuł rozszerzonego języka rachunku Ł3 zarezerwujemy symbol $\Sigma^{+}_{Ł3}$. W języku tym można oddać strukturę logiczną zdań złożonych języka naturalnego zbudowanych z użyciem zwrotów modalnych. Tak np. strukturę zdania:

„Jeżeli nieprawda, że możliwe, że jutro będzie padał deszcz, to konieczne, że nieprawda, że jutro będzie padał deszcz"

zanotujemy w rozszerzonym języku Ł3 w postaci następującej formuły:

$$\neg\Diamond p \rightarrow \Box\neg p.$$

§ 2. *Wartościowania w Ł3*

W ogólnych uwagach wstępnych tego rozdziału próbowaliśmy wyjaśnić, dlaczego w rachunku Ł3 posługujemy się nieekstensjonalną negacją. Teraz, gdy przystępujemy do prawdziwościowej charakterystyki stałych logicznych tego rachunku, przypomnijmy, że rezygnujemy z oryginalnej koncepcji twórcy Ł3 – Jana Łukasiewicza – i odrzucamy wprowadzoną przez niego trzecią wartość logiczną. Zakładamy, że każda formuła może przyjąć tylko jedną z dwóch wartości: **1** lub **0** (rozumianych jako prawda i nieprawda) oraz że negacja ma charakter intensjonalny.

Problem charakterystyki prawdziwościowej funktorów nieekstensjonalnych rozwiązać można dwojako. Sposób pierwszy polega na uzależnieniu wartości przypisywanej przez dane wartościowanie formule złożonej od wartości przypisywanych jej podformułom przez **pewną rodzinę wartościowań skojarzonych z danym** (tę metodę stosowaliśmy w sematycznym opisie INT). Stosując sposób drugi bierzemy pod uwagę wyłącznie dane wartościowanie i uzależniamy wartość formuły od wartości, jakie przypisze ono formułom z **pewnego zbioru szerszego od zbioru jej podformuł**. Szukając adekwatnego semantycznego ujęcia dla Ł3 posłużymy się drugą metodą. W definicji wartościowania scharakteryzujemy równolegle każdy funktor i jego negację, uzależniając każdorazowo ocenę nie tylko od wartości argumentów tego funktora, ale także od wartości negacji tych argumentów.

Odwołując się do intuicji, które próbowaliśmy zwerbalizować w uwagach wstępnych, odnotujmy, że nie wszystkie układy ocen formuły i jej negacji są możliwe; wykluczona jest sytuacja, gdy zarówno formuła, jak i jej negacja (por. tabelka ze str. 110) przyjmują wartość **1**. Z tego powodu w tabelce, stanowiącej część integralną definicji wartościowania, rozważać będziemy trzy różne możliwe układy wartości dla danej formuły α i jej negacji. Wyliczmy je:

I. – $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ – α ma wartość **1**, $\neg\alpha$ ma wartość **0**
II. – $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$ – α ma wartość **0**, $\neg\alpha$ ma wartość **0**
III. – $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ – α ma wartość **0**, $\neg\alpha$ ma wartość **1**

DEFINICJA WARTOŚCIOWANIA W Ł3 WARTOŚCIOWANIEM W Ł3 NAZYWAMY KAŻDĄ FUNKCJĘ v ZE ZBIORU $\Sigma_{Ł3}$ W ZBIÓR WARTOŚCI LOGICZNYCH (symbolicznie: $v\colon \Sigma_{Ł3} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$) TAKĄ, ŻE DLA WSZELKICH FORMUŁ $\alpha, \beta \in \Sigma_{Ł3}$:

JEŻELI				TO						
$v(\alpha)$	$v(\neg\alpha)$	$v(\beta)$	$v(\neg\beta)$,	$v(\alpha\wedge\beta)$	$v(\neg(\alpha\wedge\beta))$	$v(\alpha\vee\beta)$	$v(\neg(\alpha\vee\beta))$	$v(\alpha\rightarrow\beta)$	$v(\neg(\alpha\rightarrow\beta))$	$v(\neg\neg\alpha)$
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0

Bezpośrednim wnioskiem płynącym z tej definicji jest ważna własność wartościowań w Ł3, którą możemy sformułować tak: Dla dowolnych wartościowań v_1 i v_2 oraz dla dowolnych formuł $\alpha, \beta \in \Sigma_{Ł3}$: jeśli $v_1(\alpha) = v_2(\alpha)$ i $v_1(\beta) = v_2(\beta)$ oraz $v_1(\neg\alpha) = v_2(\neg\alpha)$ i $v_1(\neg\beta) = v_2(\neg\beta)$, to dla dowolnego wyrażenia sensownego γ utworzonego wyłącznie z formuł α, β zachodzi $v_1(\gamma) = v_2(\gamma)$. W szczególności zauważmy, że gdy dwa wartościowania v_1 i v_2 tak samo oceniają każdą ze zmiennych zdaniowych oraz negację tej zmiennej (tj. $v_1(p) = v_2(p)$, $v_1(\neg p) = v_2(\neg p)$ itd. dla q, r,...), to również identycznie oceniają one każdą formułę Ł3. **Podsumowując**: wartość formuły jest jednoznacznie określona przez wartości jej bezpośrednich podformuł oraz ich negacji – natomiast wartościowanie jest zadane jednoznacznie przez podanie wartości, jakie przypisuje wszystkim zmiennym oraz ich negacjom.

Przyjrzyjmy się bliżej tabelce zawierającej charakterystyki prawdziwościowe poszczególnych funktorów. Otóż w wierszach 1, 3, 7 i 9 funktor negacji, a wraz z nim wszystkie pozostałe funktory podstawowej wersji języka Ł3, zachowują się zgodnie z definicją wartościowania w KRZ. Innymi słowy: odtworzona w tych wierszach tabelka dla funktorów KRZ jest fragmentem tabelki dla funktorów w rachunku Ł3. Wobec identyczności języków tych rachunków wyciągamy stąd wniosek, że każda formuła falsyfikowana przez pewne wartościowanie w KRZ zostanie też sfalsyfikowana przez stosownie dobrane wartościowanie w Ł3.

LEMAT 1 JEŻELI DLA WARTOŚCIOWANIA v W KRZ: $v(\alpha) = \mathbf{0}$, TO ISTNIEJE WARTOŚCIOWANIE v' W Ł3 TAKIE, ŻE: $v'(\alpha) = \mathbf{0}$.

Dowód. Niech $\alpha \in \Sigma_{KRZ} (= \Sigma_{Ł3})$. Załóżmy, że v jest wartościowaniem w KRZ takim, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Zdefiniujemy wartościowanie v' w Ł3 określając je następująco dla dowolnej zmiennej p:

(i) $v'(p) = \mathbf{1}$ i $v'(\neg p) = \mathbf{0}$ gdy $v(p) = \mathbf{1}$
(ii) $v'(p) = \mathbf{0}$ i $v'(\neg p) = \mathbf{1}$ gdy $v(p) = \mathbf{0}$

Prowadząc dowód przez indukcję ze względu na złożoność formuły możemy wykazać, że dla dowolnej formuły β zachodzą następujące równości:

$$v'(\beta) = v(\beta) \quad \text{oraz} \quad v'(\neg\beta) = v(\neg\beta).$$

K r o k w y j ś c i o w y: zakładamy, że β jest zmienną zdaniową. Bezpośrednio ze sposobu określenia v' wnioskujemy, że dowodzone równości zachodzą.

K r o k i n d u k c y j n y: przyjmijmy, że β jest formułą złożoną, a zatem ma postać $(\beta_1 \wedge \beta_2)$, $(\beta_1 \vee \beta_2)$, $(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ czy też $\neg\beta_1$, ponadto zaś że dowodzone równości zachodzą dla podformuł β_1 i β_2 (założenie indukcyjne).

1. Jako pierwszy rozważamy przypadek, w którym $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$.

1.1. Niech $v(\beta_1 \wedge \beta_2) = \mathbf{1}$. Z definicji wartościowania w KRZ wnioskujemy, że $v(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = \mathbf{0}$, a ponadto że zachodzą związki: $v(\beta_1) = v(\beta_2) = \mathbf{1}$ oraz $v(\neg\beta_1) = v(\neg\beta_2) = \mathbf{0}$. Stosując założenie indukcyjne ustalamy, że w takim razie:

$$v'(\beta_1) = v'(\beta_2) = \mathbf{1} \quad \text{oraz} \quad v'(\neg\beta_1) = v'(\neg\beta_2) = \mathbf{0}$$

Korzystamy z kolei z definicji wartościowania w Ł3 i stwierdzamy, że $v'(\beta_1 \wedge \beta_2) = \mathbf{1}$, a $v'(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = \mathbf{0}$. A zatem w rozważanym przypadku $v'(\beta_1 \wedge \beta_2) = v(\beta_1 \wedge \beta_2)$ oraz $v'(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = v(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2))$.

1.2. Niech $v(\beta_1 \wedge \beta_2) = \mathbf{0}$. Z definicji wartościowania w KRZ wnioskujemy, że $v(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = \mathbf{1}$. Może mieć miejsce jeden z dwóch przypadków: albo $v(\beta_1) = \mathbf{0}$, albo $v(\beta_2) = \mathbf{0}$. Rozważmy je po kolei:

1.2.1. Załóżmy, że $v(\beta_1) = \mathbf{0}$. Oznacza to, że $v(\neg\beta_1) = \mathbf{1}$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym: $v'(\beta_1) = \mathbf{0}$, $v'(\neg\beta_1) = \mathbf{1}$. Wtedy jednak definicja wartościowania w Ł3 pozwala wnioskować, że $v'(\beta_1 \wedge \beta_2) = \mathbf{0}$ oraz $v'(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = \mathbf{1}$, co oznacza, że dowodzone identyczności zachodzą.

1.2.2. Załóżmy, że $v(\beta_2) = \mathbf{0}$. Oznacza to, że $v(\neg\beta_2) = \mathbf{1}$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym: $v'(\beta_2) = \mathbf{0}$, $v'(\neg\beta_2) = \mathbf{1}$. Wobec definicji wartościowania w Ł3: $v'(\beta_1 \wedge \beta_2) = \mathbf{0}$, a zarazem $v'(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2)) = \mathbf{1}$. A zatem i w tym przypadku dowodzone identyczności zachodzą.

W analogiczny sposób należy rozpatrywać kolejne przypadki:

2. gdy β ma postać $\beta_1 \vee \beta_2$,
3. gdy β ma postać $\beta_1 \rightarrow \beta_2$,
4. gdy β ma postać $\neg\beta_1$.

Tę część dowodu pozostawiamy jednak Czytelnikowi jako łatwe, choć nużące długością ćwiczenie. Po jego wykonaniu krok indukcyjny uznajemy na dowiedziony; a zatem, zgodnie z zasadą indukcji matematycznej, kończymy w tym miejscu dowód lematu stwierdzeniem, że dla dowolnej formuły α takiej, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$, istnieje wartościowanie v' falsyfikujące α w Ł3 •

Definicja wartościowania daje nam możliwość wskazania w zbiorze $\Sigma_{Ł3}$ podzbioru z tautologii tego rachunku:

DEFINICJA TAUTOLOGII Ł3 JEŻELI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH Ł3 JEST STAŁA I RÓWNA $\mathbf{1}$, WÓWCZAS MÓWIMY, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ Ł3.

Zgodnie z przyjętą interpretacją wartości $\mathbf{1}$ jako prawdy, uważać będziemy tautologie Ł3 za schematy pewnych zawsze prawdziwych zdań języka naturalnego.

Korzystając z lematu 1 potrafimy określić wzajemny stosunek między zbiorem tautologii Ł3 a zbiorem tautologii KRZ:

LEMAT 2 KAŻDA TAUTOLOGIA Ł3 JEST TAUTOLOGIĄ KRZ.

Dowód. Załóżmy niewprost, że formuła $\alpha \in \Sigma_{Ł3}$ $(= \Sigma_{KRZ})$ jest tautologią Ł3, ale nie jest tautologią KRZ. Istnieje wówczas wartościowanie w KRZ, nazwijmy je v, takie, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Wobec lematu 1 istnieje także v′ – wartościowanie w Ł3 – falsyfikujące α. A zatem α, wbrew założeniu, nie jest tautologią Ł3 i ta sprzeczność kończy dowód •

W rachunku Ł3, podobnie jak w KRZ, tautologiczność formuł badać będziemy dwiema metodami: **tabelkową** (wprost) i **niewprost**. Jako pierwszą opiszemy metodę tabelkową.

Z definicji wartościowania w Ł3 wynika, że trudność wyrażoną w pytaniu – jak jest możliwe ustalenie wartości formuły przy nieskończenie wielu wartościowaniach? – potrafimy przezwyciężyć tu tak samo jak w KRZ. Zauważmy bowiem, że formuły w języku Ł3, analogicznie jak wyrażenia sensowne w KRZ, zbudowane są ze skończenie wielu zmiennych. Wiemy również, że wartość danej formuły zależy tylko i wyłącznie od wartości jej zmiennych i negacji tych zmiennych. Dysponując tylko dwiema wartościami, skończoną liczbę zmiennych danej formuły ocenić możemy tylko na skończenie wiele sposobów. Z tego powodu, żeby odpowiedzieć na pytanie: czy dana formuła jest tautologią, nie musimy rozważać każdego z nieskończonej liczby wartościowań z osobna. Wystarczy wziąć pod uwagę tylko te, które różnią się między sobą wartością zmiennych występujących w formule bądź wartością negacji tych zmiennych. Ogół wartościowań podzielimy więc na skończenie wiele grup, tak aby każda zawierała te i tylko te wartościowania, które identycznie oceniają zmienne i negacje zmiennych badanej formuły. Dla przykładu: gdy formuła jest zbudowana z jednej zmiennej, powiedzmy p, rozważamy trzy grupy wartościowań dyktowanych przez trzy układy wartości dla p oraz $\neg$p:

	układ wartości	wartościowania v takie, że:
1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{1}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$
2	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$
3	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{1}$

Tab. 1

Gdy formuła utworzona jest z dwóch zmiennych np. p oraz q, układów wartości wyznaczających poszczególne grupy wartościowań jest aż dziewięć:

	układ wartości	wartościowania v takie, że:
1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0};\ \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{1}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{1}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
2	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0};\ \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{1}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
3	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0};\ \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$v(p) = \mathbf{1}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{1}$
4	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{0};\ \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{1}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
5	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{0};\ \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
6	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{0};\ \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{0}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{1}$
7	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1};\ \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{1}$; $v(q) = \mathbf{1}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
8	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1};\ \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{1}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{0}$
9	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1};\ \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$v(p) = \mathbf{0}$, $v(\neg p) = \mathbf{1}$; $v(q) = \mathbf{0}$, $v(\neg q) = \mathbf{1}$

Tab. 2

Ogólnie, jeżeli formuła zbudowana jest z n różnych zmiennych zdaniowych, w konstrukcji tabelki uwzględnić należy 3^n różnych układów wartości. Zauważmy przy okazji, że metoda wprost badania tautologiczności formuł zastosowana w rachunku Ł3 jest znacznie bardziej pracochłonna niż w przypadku KRZ. Aby sprawdzić formułę zbudowaną np. z trzech zmiennych, posługiwaliśmy się w KRZ tabelką uwzględniającą 8 różnych układów wartości. Ta sama formuła, badana na gruncie Ł3, wymaga już tabelki o 27 wierszach. Poza tym, konieczność zapisania w tabelce – prócz wartości wszystkich podformuł badanej formuły – także ocen przypisywanych negacjom tych podformuł prowadzi do podwojenia liczby kolumn tabelki. Praktyczne posługiwanie się metodą tabelkową w Ł3 będzie więc żmudne. Ma jednak tę niewątpliwą zaletę, że zawsze w skończonej liczbie kroków daje odpowiedź na pytanie o tautologiczność formuły.

Prześledźmy zatem na kilku przykładach stosowanie opisanej techniki. Znowu odwołamy się do tych formuł, które rozważaliśmy już na gruncie KRZ i INT, co umożliwi nam nie tylko porównanie metod rozstrzygania, lecz także zbiorów tautologii wszystkich trzech rachunków.

(1) Czy jest tautologią Ł3 formuła **p ∨ ¬p**?

p	¬p	¬¬p	p ∨ ¬p
1	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**

Formuła **p ∨ ¬p** n i e j e s t tautologią Ł3. Konieczność uwzględnienia w tabelce kolumny z nagłówkiem ¬¬p wynika stąd, że dla ustalenia wartości formuły $p \vee \neg p$ musimy znać nie tylko wartości jej podformuł $\{p, \neg p\}$, ale także wartości negacji tych podformuł $\{\neg p, \neg\neg p\}$.

(2) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\neg(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p})$?

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	0	1	1
0	0	0	0
0	1	0	1

Formuła $\neg(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p})$ n i e j e s t tautologią Ł3. Kolumna z nagłówkiem $\neg\neg p$ pojawia się z tych samych przyczyn co w poprzednim przykładzie. Mogliśmy natomiast pominąć kolumnę o nagłówku $p \wedge \neg p$, która występowała w analogicznym przykładzie rozpatrywanym na gruncie KRZ, ponieważ wartość negacji koniunkcji nie jest uzależniona od wartości samej koniunkcji (por. definicję wartościowania w Ł3).

(3) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{q} \to \neg\mathbf{p})$?

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	q	$\neg q$	$\neg\neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q \to \neg p$	$\neg(\neg q \to \neg p)$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1

Formuła $(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{q} \to \neg\mathbf{p})$ jest tautologią Ł3.

(4) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(\neg\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$?

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	q	$\neg q$	$\neg\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg(\neg p \to \neg q)$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1

Formuła $(\neg\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$ jest tautologią Ł3.

Na marginesie przykładów (3) i (4) zauważmy, że z uwagi na identyczność zero-jedynkowej charakterystyki formuły oraz jej podwójnej negacji, można byłoby upraszczać nieco tabelki eliminując z nich kolumny z podwójnie zanegowanymi formułami.

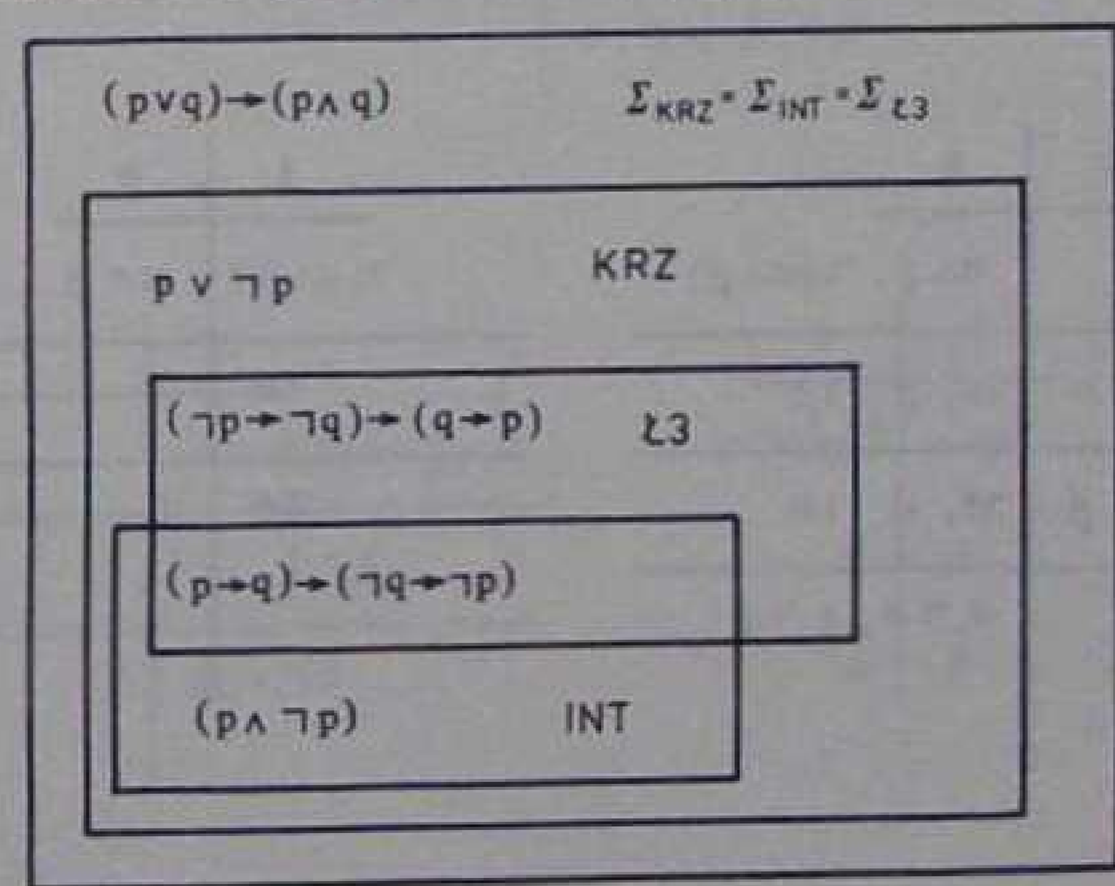
(5) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$?

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1

Formuła $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ n i e j e s t tautologią Ł3.

W tej chwili możemy już porównać zbiory tautologii wszystkich trzech rachunków zdaniowych: KRZ, INT oraz Ł3. Okazuje się, że tautologie Ł3 (podobnie jak tautologie INT — por. lemat 1, § 2 rozdziału III) stanowią właściwy podzbiór zbioru wszystkich tautologii KRZ (lemat 2; przykłady (1), (2)). Jeżeli natomiast skonfrontujemy przykłady (2), (3) i (4) z odpowiednimi przykładami z § 2 rozdziału III, wyciągniemy wniosek, że zbiory tautologii rachunków Ł3 oraz INT krzyżują się.

Oto graficzny wyraz tych zależności, uwzględniający miejsce formuł sprawdzanych w przykładach (1)-(5):



Przechodzimy teraz do omówienia drugiej metody sprawdzania tautologiczności formuł: metody niewprost. Z jej ideą dokładnie zapoznaliśmy się w KRZ. Powtórzmy tylko, że jest to próba rekonstrukcji wartościowania falsyfikującego dane wyrażenie sensowne, której punktem wyjścia jest założenie o fałszywości badanej formuły. Diagramy, w których notować będziemy przebieg takiej próby, będą podobne do tych, które stosowaliśmy w KRZ, ale reguły budowy diagramu wynikające bezpośrednio z definicji wartościowania w Ł3 będą oczywiście inne. Przypominamy w końcu, że badaną formułę uznajemy za tautologię Ł3 tylko wtedy, gdy **n i e p o w i o d ł a s i ę ż a d n a z m o ż l i w y c h p r ó b** budowy wartościowania obalającego, czyli gdy każde zmierzające do tego celu rozumowanie zamknęło się sprzecznością: równoczesnym przypisaniem jednej i tej samej formule różnych wartości logicznych. Zasady poszukiwania sprzeczności w diagramach dla Ł3 są takie same jak te, które stosowaliśmy na gruncie KRZ.

Reguły konstrukcji diagramów:

(K 1)

1	0
$\alpha \wedge \beta$	$\neg(\alpha \wedge \beta)$
α	$\neg\alpha$
β	$\neg\beta$

(K 00)

	1	0
		$\alpha \wedge \beta, \neg(\alpha \wedge \beta)$
1.	α	$\neg\alpha, \beta, \neg\beta$
2.	β	$\neg\beta, \alpha, \neg\alpha$
3.		$\alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta$

(K 01)

	1	0
	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \beta$
1.	$\neg\alpha$	α
2.	$\neg\beta$	β

(A 1)

	1	0
	$\alpha \vee \beta$	$\neg(\alpha \vee \beta)$
1.	α	$\neg\alpha$
2.	β	$\neg\beta$

(A 00)

	1	0
		$\alpha \vee \beta, \neg(\alpha \vee \beta)$
1.	$\neg\alpha$	$\alpha, \beta, \neg\beta$
2.	$\neg\beta$	$\beta, \alpha, \neg\alpha$
3.		$\alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta$

(A 01)

1	0
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \vee \beta$
$\neg\alpha$	α
$\neg\beta$	β

(I 1)

	1	0
	$\alpha \to \beta$	$\neg(\alpha \to \beta)$
1.	$\neg\alpha$	α
2.	β	$\neg\beta$
3.		$\alpha, \neg\alpha, \beta, \neg\beta$

(I 00)

	1	0
		$\alpha \to \beta, \neg(\alpha \to \beta)$
1.	α	$\neg\alpha, \beta, \neg\beta$
2.	$\neg\beta$	$\beta, \alpha, \neg\alpha$

(I 01)

1	0
$\neg(\alpha \to \beta)$	$\alpha \to \beta$
α	$\neg\alpha$
$\neg\beta$	β

(N 1)

1	0
$\neg\alpha$	$\neg\neg\alpha$
	α

(N 00)

1	0
	$\neg\alpha, \neg\neg\alpha$
	α

(N 01)

1	0
$\neg\neg\alpha$	$\neg\alpha$
α	

Zwraca uwagę fakt, że reguł konstrukcji dla diagramów w Ł3 jest więcej i są one bardziej skomplikowane niż te, z którymi zetknęliśmy się w KRZ. Na pytanie, jak w praktyce stosować dyrektywy zawarte w regułach, jak realizować próbę określenia wartościowania falsyfikującego daną formułę, odpowiemy kilkoma przykładami. Wrócimy w nich do formuł już sprawdzonych metodą tabelkową.

(1) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$?
Załóżmy, że nie jest. Istnieje więc wartościowanie, które tej formule przypisuje wartość **0**. Wartościowanie takie może formule $\neg(p \vee \neg p)$ przypisać jedną z dwóch wartości logicznych: **1** albo **0**. Analizujemy obie te sytuacje kolejno, w dwóch oddzielnych diagramach, oznaczonych (d **01**), (d **00**):

(d 01)

1	0
$\neg(p \vee \neg p)$	$p \vee \neg p$
$\neg p$	p
$\neg\neg p$	$\neg p$

Stosujemy regułę (**A 01**) i uzyskujemy sprzeczność

Rozważamy drugą możliwość:

(d 00)

	1	0
		$p \vee \neg p, \neg(p \vee \neg p)$
1.	$\neg p$	$p, \neg p, \neg\neg p$
2.	$\neg\neg p$	$\neg p, p, \neg p$
	p	
3.		$p, \neg p, \neg p, \neg\neg p$
		p

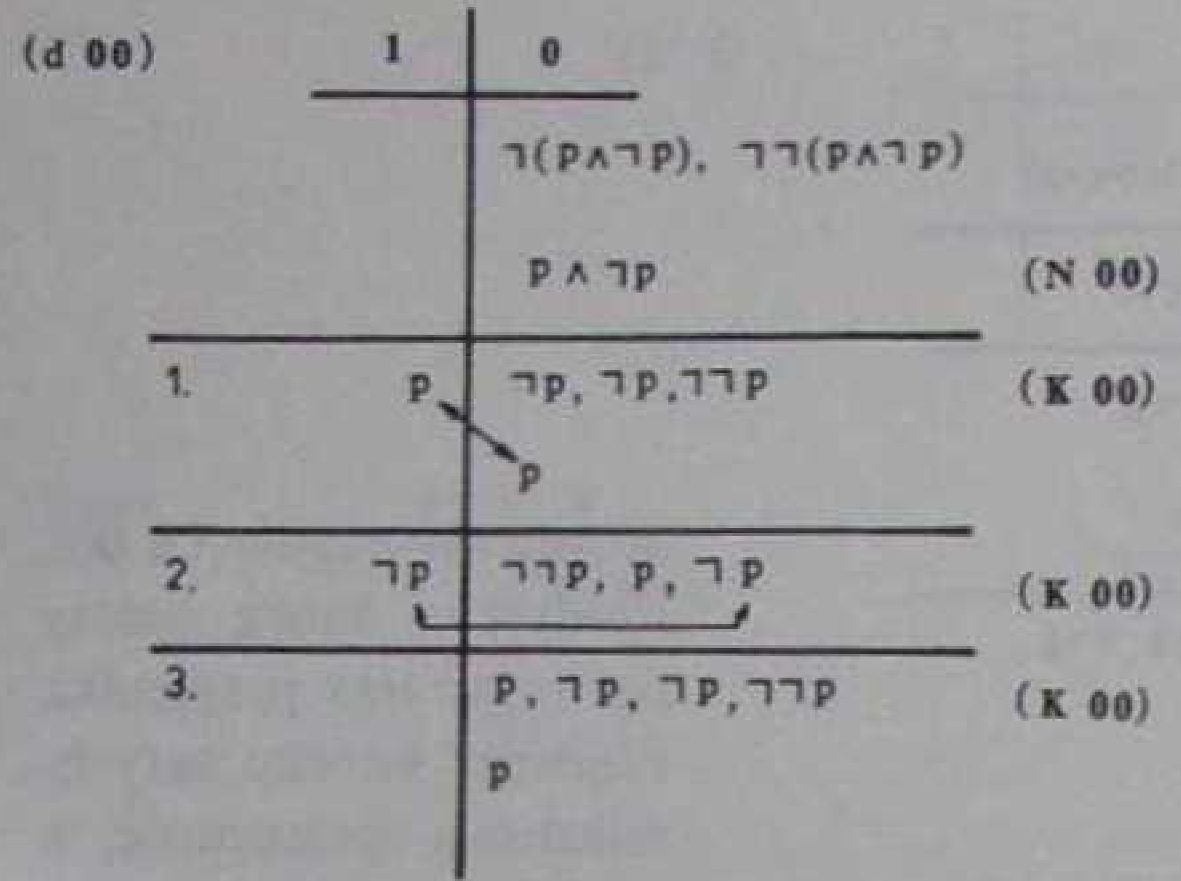
Stosujemy regułę (**A 00**), zgodnie z którą należy rozważyć trzy przypadki. Pierwszy kończy natychmiastowa sprzeczność, w drugim stosujemy (**N 01**) i także zamykamy rozumowanie sprzecznością. W trzecim korzystamy z (**N 00**) i po stwierdzeniu, że osiągnęliśmy już najbardziej elementarne formuły i ich negacje – kończymy rozumowanie nie natrafiając na sprzeczność. Powiodła się zatem rekonstrukcja wartościowania falsyfikującego formułę $p \vee \neg p$. Okazało się, że przyjmuje ona wartość **0** przy każdym wartościowaniu v takim, że: $v(p) = v(\neg p) = \mathbf{0}$. Oznacza to, że formuła $p \vee \neg p$ n i e j e s t tautologią Ł3.

(2) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\neg(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p})$?
Zakładamy, że nie, po czym stosujemy reguły:

(d 01)

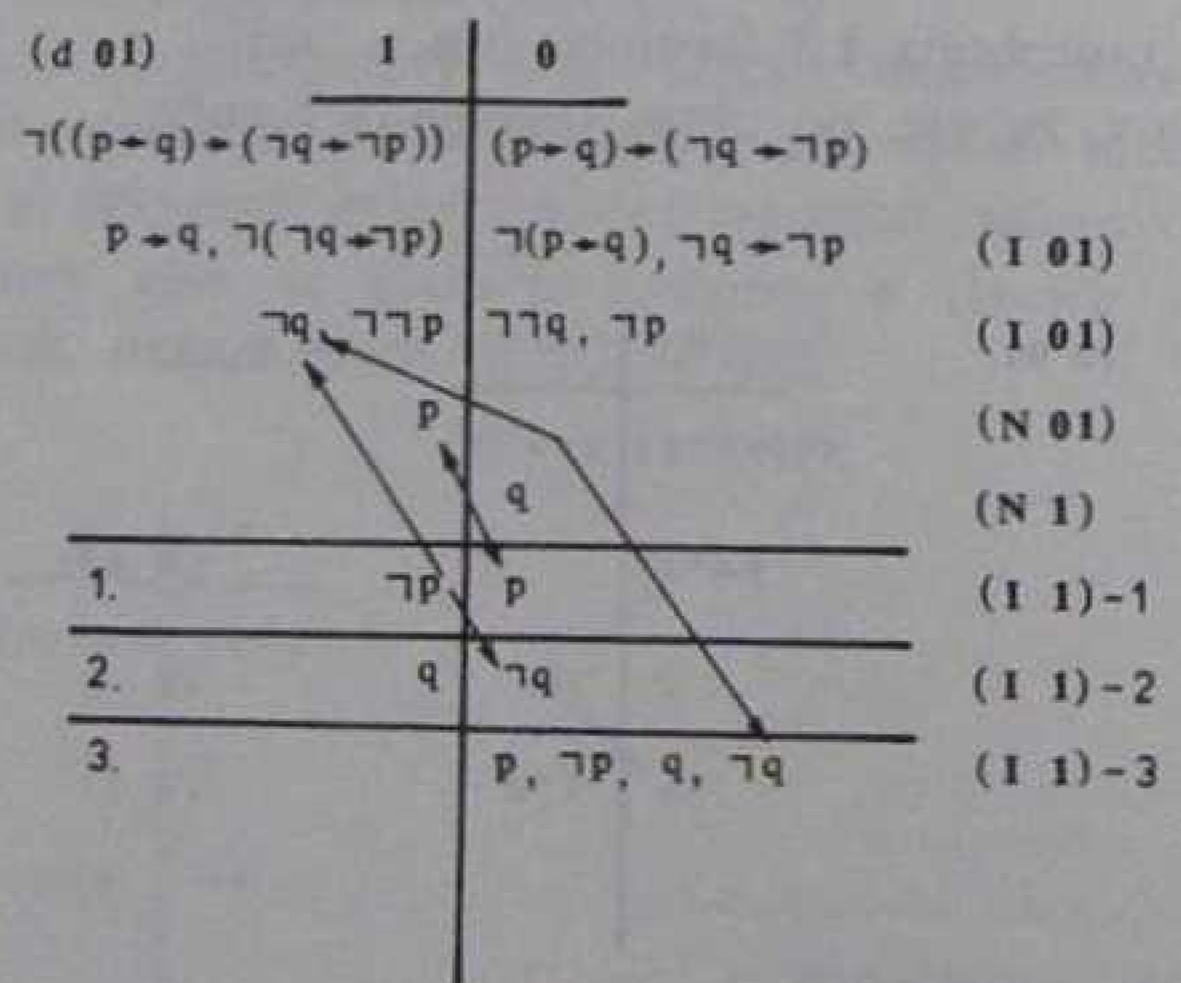
1	0	
$\neg\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg(p \wedge \neg p)$	
$p \wedge \neg p$		(N 01)
p	$\neg p$	(K 1)
$\neg p$	$\neg\neg p$	(K 1)

W rozumowaniu wystąpiła sprzeczność; przechodzimy więc do rozpatrzenia drugiej możliwości:

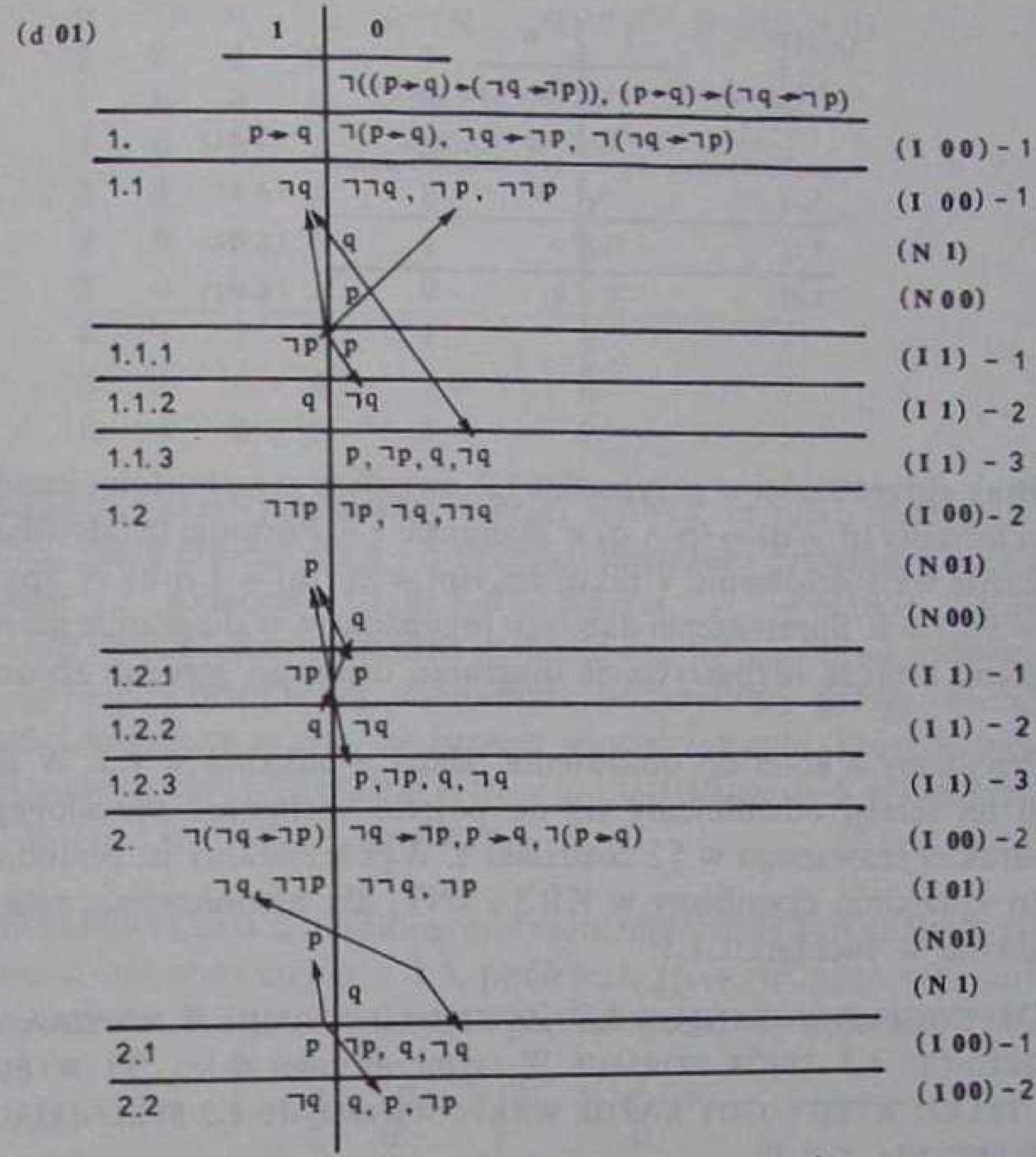


Pierwszy przypadek, po zastosowaniu (N 00), kończy natychmiastowa sprzeczność, w drugim natrafiamy na nią od razu. W trzecim korzystamy z (N 00), ale mimo dojścia do najbardziej elementarnych formuł, nie znajdujemy sprzeczności. Oznacza to, że formuła $\neg(p \wedge \neg p)$ n i e j e s t tautologią Ł3.

(3) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$? Zakładamy, że nie:



We wszystkich trzech przypadkach natrafiamy na sprzeczność, przechodzimy zatem do kolejnego diagramu:



W każdym z podprzypadków natknęliśmy się na sprzeczność. Ponieważ w żadnym z dwóch diagramów rekonstrukcja wartościowania obalającego nie powiodła się, badana formuła jest tautologią Ł3.

(4) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$? Ponieważ sprawdzenie dla tej formuły przebiega analogicznie jak w przykładzie (3), a odpowiedź na postawione pytanie już uzyskaliśmy stosując metodę tabelkową, więc sporządzenie diagramów (skądinąd żmudne) pozostawiamy Czytelnikowi.

(5) Czy jest tautologią Ł3 formuła $(p \vee q) \to (p \wedge q)$? Zakładamy, że nie:

(d 01)	1	0	
	$\neg((p \vee q) \to (p \wedge q))$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$	
	$p \vee q, \neg(p \wedge q)$	$\neg(p \vee q), p \wedge q$	(I 01)
1.	p	$\neg p$	(A 1)
1.1.	$\neg p$	p	(K 01)
1.2.	$\neg q$	q	(K 01)

Brak sprzeczności w przypadku 1.2. świadczy o nietautologiczności formuły $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ w rachunku Ł3. Formułę tę falsyfikuje każde wartościowanie v takie, że: $v(p) = v(\neg q) = \mathbf{1}$ oraz $v(\neg p) = v(q) = \mathbf{0}$. Sprawdzenie dalszych przypadków w diagramie pierwszym, a także rozpatrywanie diagramu drugiego, jest już zbędne.

Przejdźmy z kolei do omówienia relacji wynikania w Ł3. W definicji tej relacji odwołujemy się do pojęcia spełniania określonego i scharakteryzowanego w §2 rozdziału I. Wykorzystamy je, podobnie jak to uprzednio czyniliśmy w KRZ i INT, dla zdefiniowania relacji wynikania w rachunku Ł3:

DEFINICJA WYNIKANIA W Ł3 ZE ZBIORU FORMUŁ Φ WYNIKA NA GRUNCIE Ł3 ZBIÓR FORMUŁ Ψ (symbolicznie: $\Phi \models_{Ł3} \Psi$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY KAŻDE WARTOŚCIOWANIE Ł3 SPEŁNIAJĄCE Φ SPEŁNIA TEŻ Ψ.

Ogólne własności tej relacji znamy z lematów 3 - 7 dowiedzionych w §2 rozdziału I. W KRZ i INT relacji tej przysługiwały też inne ważne własności przedstawione w twierdzeniach zwanych semantycznymi odpowiednikami twierdzeń o dedukcji: twierdzenia 1 - 3 z §2 rozdziału II oraz 1 - 2 z §2 rozdziału III. Żadne z nich nie zachowuje prawdziwości w rachunku Ł3. Świadczą o tym trzy proste kontrprzykłady:

KONTRPRZYKŁAD 1 Analogon twierdzenia 1 (§2 rozdział II) nie obowiązuje w rachunku Ł3, ponieważ: $\{p \to (p \to q), p\} \models_{Ł3} q$, a równocześnie $\{p \to (p \to q)\} \not\models_{Ł3} p \to q$. Potwierdzenie tych faktów znajdziemy w następującej tabelce:

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$p \to (p \to q)$
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1

Z analizy wszystkich wierszy tabelki wynika, że tylko wartościowania, które zmiennym p i q oraz ich negacjom przypisują oceny zgodne z układem $\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}; \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ (wiersz 1), spełniają zbiór $\{p \to (p \to q), p\}$. Równocześnie spełniają one formułę q, co sprawia, że $\{p \to (p \to q), p\} \models_{Ł3} q$. Natomiast podkreślony szósty wiersz tabelki świadczy o tym, że istnieją wartościowania, które jednocześnie weryfikują formułę $p \to (p \to q)$ i falsyfikują $p \to q$. Oznacza to, że $\{p \to (p \to q)\} \not\models_{Ł3} p \to q$ •

KONTRPRZYKŁAD 2 Analogon twierdzenia 2 (§2 rozdziału II) również nie obowiązuje w Ł3, ponieważ: $\{p \to \neg p, p\} \models_{Ł3} \{p, \neg p\}$ a równocześnie $\{p \to \neg p\} \not\models_{Ł3} \neg p$. Potwierdza to tabelka:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \to \neg p$
1	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	1

Jest oczywiste, że zbioru $\{p, \neg p\}$ nie spełnia **żadne** wartościowanie Ł3, ponieważ definicja wartościowania w Ł3 wyklucza sytuację, w której formuła i jej negacja równocześnie przyjmują wartość **1**. Analizując poszczególne wiersze tabelki możemy się przekonać, że również zbioru $\{p \to \neg p, p\}$ nie spełnia żadne wartościowanie. Możemy więc sformułować następujący wniosek: dowolne wartościowanie Ł3 spełniające zbiór $\{p \to \neg p, p\}$ spełnia też zbiór $\{p, \neg p\}$, czyli zachodzi wynikanie $\{p \to \neg p, p\} \models_{Ł3} \{p, \neg p\}$. Natomiast podkreślony drugi wiersz tabelki wskazuje te wartościowania spełniające zbiór $\{p \to \neg p\}$, które nie spełniają formuły $\neg p$;

zgodnie z definicją wynikania: $\{p \to \neg p\} \not\models_{Ł3} \neg p$, co kończy uzasadnienie kontrprzykładu 2 •

Kontrprzykład 3 Analogon twierdzenia 3 (§ 2 rozdział II) także nie obowiązuje w Ł3, gdyż: $\{\neg p \to p, \neg p\} \models_{Ł3} \{p, \neg p\}$, a zarazem $\{\neg p \to p\} \not\models_{Ł3} p$. Uzasadnienia dostarcza tabelka:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg p \to p$
1	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**

Analiza tabelki prowadzi do wniosku, że żadne wartościowanie nie spełnia zbioru $\{\neg p \to p, \neg p\}$. Skoro tak, to każde wartościowanie Ł3 spełniające zbiór $\{\neg p \to p, \neg p\}$ spełnia też zbiór $\{p, \neg p\}$, a zatem: $\{\neg p \to p, \neg p\} \models_{Ł3} \{p, \neg p\}$. Podkreślony wiersz tabelki wskazuje wartościowania spełniające zbiór $\{\neg p \to p\}$ i nie spełniające formuły p, czyli $\{\neg p \to p\} \not\models_{Ł3} p$, co kończy uzasadnienie kontrprzykładu 3 •

Zależność między wynikaniem a implikacją, określana w KRZ jako semantyczna wersja twierdzenia o dedukcji wprost, przyjmuje w Ł3 postać słabszą:

Twierdzenie 1 Jeżeli $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tautologią Ł3, wówczas: $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{Ł3} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{Ł3} \alpha \to \beta$.

Dowód. Obie części dowodu wymagają analizy następującej tabelki:

α	$\neg\alpha$	β	$\neg\beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \vee \neg\alpha$
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Założenie o tautologiczności formuły $\alpha \vee \neg\alpha$ pozwala nam pominąć w czasie analizy wiersze podkreślone: 4, 5 i 6, w których formuła $\alpha \vee \neg\alpha$ nie przyjmuje wartości **1**.

(I) Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{Ł3} \beta$ i niewprost, że: $\Phi \not\models_{Ł3} \alpha \to \beta$. Istnieje zatem wartościowanie v spełniające zbiór Φ, takie, że: $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{0}$. W tabelce, wśród nie podkreślonych wierszy, wskazać możemy dwa (drugi i trzeci), w których wartością $\alpha \to \beta$ jest **0**. Do którejkolwiek z tych dwóch grup należy wartościowanie v, zawsze $v(\alpha) = \mathbf{1}$ i $v(\beta) = \mathbf{0}$. Wnioskujemy więc, że v spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$ i nie spełnia formuły β. Oznacza to, że $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{Ł3} \beta$, co jest sprzeczne z założeniem.

(II) Załóżmy teraz, że $\Phi \models_{Ł3} \alpha \to \beta$ i niewprost, że: $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{Ł3} \beta$. Istnieje zatem wartościowanie v spełniające zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$, a przy tym $v(\beta) = \mathbf{0}$. Przy wartościowaniu takim spełniony jest także dowolny podzbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$, w szczególności zbiory Φ i $\{\alpha\}$. Rozpatrując w tabelce wiersze drugi i trzeci stwierdzamy, że niezależnie od oceny przypisywanej $\neg\beta$, wartością $\alpha \to \beta$ jest **0**. Wnioskujemy stąd, że v spełnia zbiór Φ i nie spełnia $\alpha \to \beta$, co oznacza, że – wbrew założeniu – $\Phi \not\models_{Ł3} \alpha \to \beta$ •

Inny odpowiednik twierdzenia 1 z § 2 rozdziału II stanowi semantyczna wersja tzw. iterowanego twierdzenia o dedukcji:

Twierdzenie 2 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{Ł3} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{Ł3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$.

Dowód. (I) Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{Ł3} \beta$, a dla dowodu niewprost, że: $\Phi \not\models_{Ł3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. Istnieje więc wartościowanie v spełniające Φ i takie, że $v(\alpha \to (\alpha \to \beta)) = \mathbf{0}$. Rozważmy stosowną tabelkę:

α	$\neg\alpha$	β	$\neg\beta$	$\alpha \to \beta$	$\neg(\alpha \to \beta)$	$\alpha \to (\alpha \to \beta)$
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

Tylko w dwóch wierszach tej tabelki (drugim i trzecim) znajdujemy wartość **0** dla formuły $\alpha \to (\alpha \to \beta)$. W obu tych wierszach wartością formuły α jest **1**, a wartością β – **0**. Wartościowanie v musi zatem spełniać warunki: $v(\alpha) = \mathbf{1}$, $v(\beta) = \mathbf{0}$. Wtedy $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{Ł3} \beta$, co pozostaje w sprzeczności z założeniem.

(II) Załóżmy z kolei, że $\Phi \models_{Ł3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$ a także, niewprost, że $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{Ł3} \beta$. Istnieje zatem wartościowanie v, które spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$, a przy tym $v(\beta) = \mathbf{0}$. Poszukując w tabelce układów wartości, które odpowiadałyby tej sytuacji, natrafiamy znowu na wiersze drugi i trzeci. W obu tych wierszach formuła $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ ma wartość **0**. Wartościowanie v musi więc spełniać zbiór Φ i nie spełniać formuły $\alpha \to (\alpha \to \beta)$. Oznacza to, że $\Phi \not\models_{Ł3} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. Sprzeczność •

Zanim zdefiniujemy w Ł3 dwa podstawowe rodzaje reguł: normalne i niezawodne, przypomnijmy, że ogólne wiadomości na ich temat znaleźć można w §2 rozdziału I (str. 16 - 17). Regułę definiowaliśmy jako dowolny zbiór par $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$, w którym Φ stanowi niepusty zbiór przesłanek, a formuła α – wniosek.

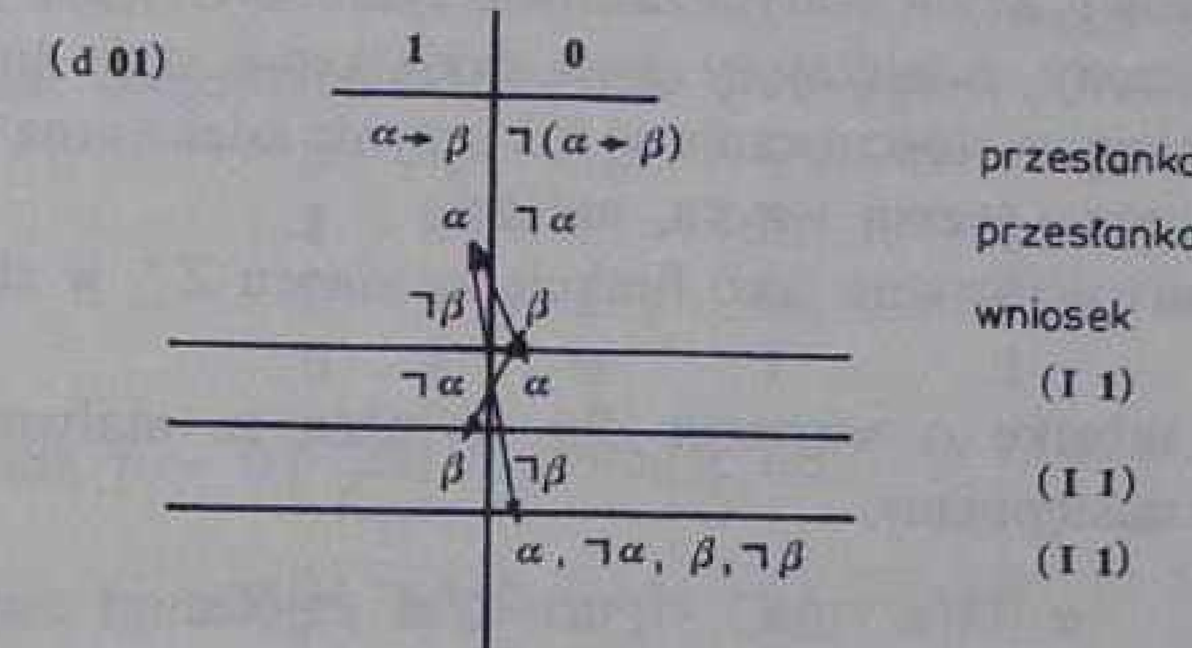
DEFINICJA REGUŁY NORMALNEJ Ł3 REGUŁA JEST NORMALNA W Ł3 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ NALEŻĄCEJ DO TEJ REGUŁY ZACHODZI WYNIKANIE: $\Phi \models_{Ł3} \alpha$.

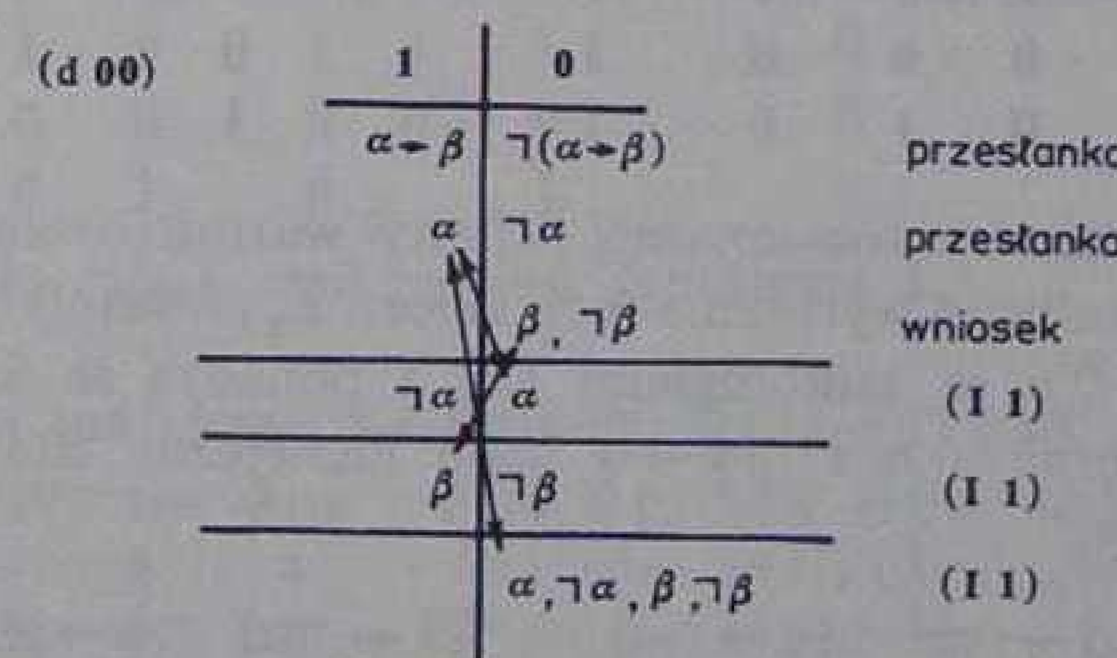
Pytanie o normalność reguły potrafimy praktycznie rozstrzygnąć wówczas, gdy wszystkie należące do niej pary zbudowane są zgodnie z jakimś schematem. Poddajemy wtedy analizie ów schemat, by ustalić, czy spełnia on kryterium normalności. Normalność reguł badamy tymi samymi metodami, które miały zastosowanie przy stwierdzaniu tautologiczności formuł: tabelkową i niewprost. Ilustrowanie przykładami metody tabelkowej jest zbędne; stosowaliśmy ją w dowodach twierdzeń 1 i 2, by ustalić, czy między parami zbiorów formuł zachodzi relacja wynikania. Ograniczymy się tylko do przykładowego rozstrzygnięcia metodą niewprost, czy reguła odrywania (RO) o schemacie $\langle \{\alpha \to \beta, \alpha\}, \{\beta\} \rangle$, normalna w KRZ i w INT, jest normalna również w Ł3.

(1) Sprawdzamy, czy jest normalna reguła elementarna o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

Zakładamy, że z przesłanek pary podstawowej nie wynika w Ł3 jej wniosek. Istnieje więc wartościowanie, które przesłankom daje wartość **1**, a wnioskowi – **0**. Przy rozpatrywanym wartościowaniu formuła $\neg\beta$ przyjąć może albo wartość **0** albo **1**. Uwzględniając tę okoliczność rozważamy dwa diagramy: (d **01**) oraz (d **00**). Sprzeczność kończąca każdą z możliwych prób określenia wartościowania weryfikującego przesłanki i falsyfikującego wniosek świadczy o normalności badanej reguły. Brak sprzeczności w którymkolwiek z rozważanych przypadków potwierdza hipotezę, że reguła nie jest normalna.





Wobec sprzeczności zamykającej każdą z dróg w obu diagramach rozważana reguła elementarna jest normalna.

DEFINICJA REGUŁY NIEZAWODNEJ Ł3 REGUŁA JEST NA GRUNCIE Ł3 NIEZAWODNA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA KAŻDEJ NALE-

ŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle$ ZAWSZE WTEDY, GDY Φ JEST ZBIOREM TAUTOLOGII Ł3, FORMUŁA α JEST RÓWNIEŻ TAUTOLOGIĄ TEGO RACHUNKU.

W myśl twierdzenia udowodnionego w § 2 rozdziału I każda reguła normalna w Ł3 jest w tym rachunku niezawodna. Komentarz ten w szczególności odnosi się do reguły odrywania. Inną regułą niezawodną w Ł3 jest zdefiniowana w § 2 rozdziału II (str. 48) nieelementarna i nienormalna r e g u ł a p o d s t a w i a n i a. Jej niezawodność w Ł3 wykazuje się bez trudu tą samą techniką co w KRZ.

Wyczerpaliśmy tym samym w przypadku Ł3 problematykę semantycznej wersji rachunku logicznego nakreśloną w rozdziale I. Przypomnijmy jednak, że dla rachunku Ł3 przyjęliśmy dwa języki symboliczne: *podstawowy*, z tym samym zasobem symboli co język KRZ oraz INT, i *rozszerzony*, zawierający dwie dodatkowe stałe logiczne: $\Box$ i $\Diamond$. Aby definicję wartościowania w Ł3 uczynić adekwatną w stosunku do rozszerzonej wersji języka, należy:

1° określić wartościowanie jako funkcję ze zbioru $\Sigma^{+}_{Ł3}$ w zbiór $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ oraz

2° uzupełnić tabelkę o wartości dla wyrażeń ze stałymi $\Box$ i $\Diamond$ w sposób następujący:

α	$\neg\alpha$	$\Box\alpha$	$\neg\Box\alpha$	$\Diamond\alpha$	$\neg\Diamond\alpha$
1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1

Na marginesie tak rozszerzonej definicji wartościowania odnotujmy, że dla dowolnego wyrażenia α ze zbioru $\Sigma^{+}_{Ł3}$ formuły $\Box\alpha \vee \neg\Box\alpha$ oraz $\Diamond\alpha \vee \neg\Diamond\alpha$ są tautologiami Ł3, a ponadto że formuły: $\Box\alpha$ i $\neg(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$ oraz $\Diamond\alpha$ i $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ mają identyczne charakterystyki zero-jedynkowe:

α	$\neg\alpha$	$\neg\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow \neg\alpha$	$\neg(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$	$\neg\neg(\alpha \rightarrow \neg\alpha)$	$\neg\alpha \rightarrow \alpha$	$\neg(\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1

Porównanie odpowiednich kolumn w obu tabelkach upewnia nas, że możliwe jest zdefiniowanie funktorów modalnych $\Box$, $\Diamond$ w terminach

$\rightarrow$, $\neg$, czyli możliwa jest każdorazowa eliminacja funktorów modalnych na rzecz określonych wyrażeń implikacyjno-negacyjnych. Wobec łatwości, z jaką eliminujemy funktory modalne z języka Ł3, trudno jest uznać ten rachunek za **istotnie** modalny. Niemniej rozważymy kilka przykładów formuł, w których funktory modalne *explicite* występują, aby przekonać się, jak są na gruncie Ł3 rozumiane.

(1) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\Box \mathbf{p} \vee \Box \neg \mathbf{p}$?

p	$\neg$p	$\neg\neg$p	$\Box$p	$\neg\Box$p	$\Box\neg$p	$\neg\Box\neg$p	$\Box$p $\vee$ $\Box\neg$p
1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1

Formuła $\Box$p $\vee$ $\Box\neg$p nie jest tautologią Ł3.

(2) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\mathbf{p} \rightarrow \Diamond \mathbf{p}$?

p	$\neg$p	$\Diamond$p	$\neg\Diamond$p	p $\rightarrow$ $\Diamond$p
1	0	1	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1

Formuła p $\rightarrow$ $\Diamond$p jest tautologią Ł3.

(3) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\Box(\mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p})$?

p	$\neg$p	$\neg\neg$p	p $\vee$ $\neg$p	$\neg$(p $\vee$ $\neg$p)	$\Box$(p $\vee$ $\neg$p)
1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1

Formuła $\Box$(p $\vee$ $\neg$p) nie jest tautologią Ł3.

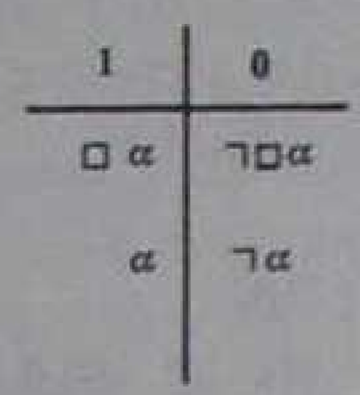
(4) Czy jest tautologią Ł3 formuła $\Diamond \Box \mathbf{p} \rightarrow \Box \Diamond \mathbf{p}$?

p	$\neg$p	$\Box$p	$\neg\Box$p	$\Diamond\Box$p	$\neg\Diamond\Box$p	$\Diamond$p	$\neg\Diamond$p	$\Box\Diamond$p	$\neg\Box\Diamond$p	$\Diamond\Box$p $\rightarrow$ $\Box\Diamond$p
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1

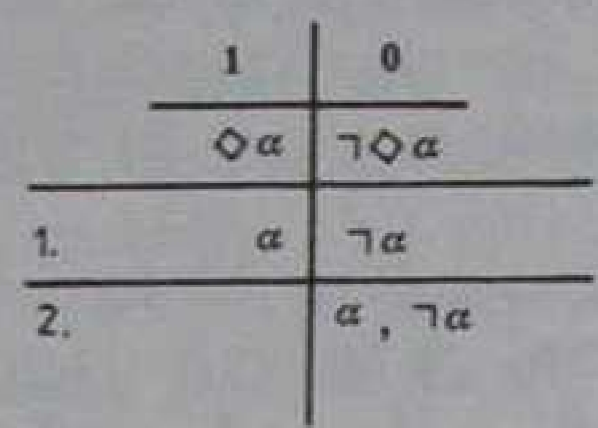
Formuła $\Diamond\Box$p $\rightarrow$ $\Box\Diamond$p jest tautologią Ł3.

Rezygnujemy w tym miejscu z przykładów, w których tautologiczność formuł z funktorami modalnymi sprawdzana jest metodą niewprost. Jednak, aby Czytelnik mógł samodzielnie posługiwać się tą metodą, uzupełnimy dotychczasową listę dyrektyw budowy diagramów o reguły odnoszące się do funktorów modalnych.

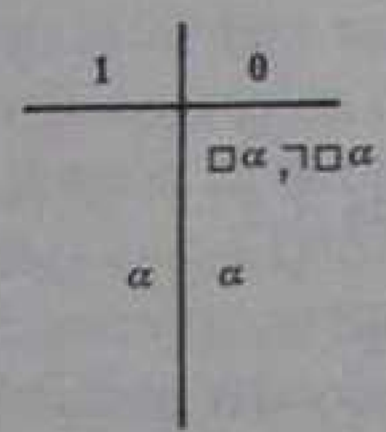
(□ 1)



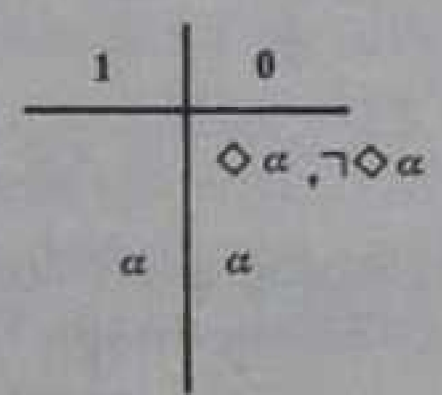
(◇1)



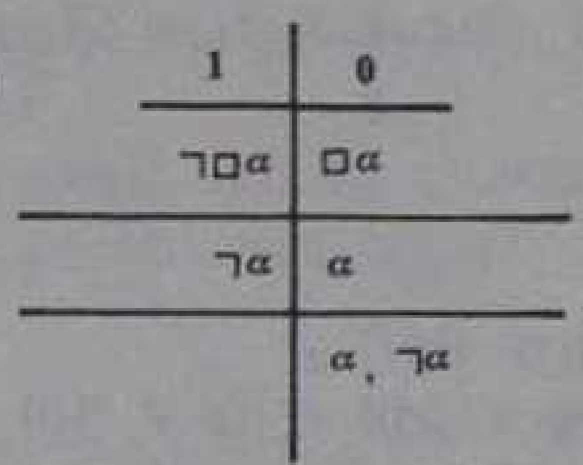
(□ 00)



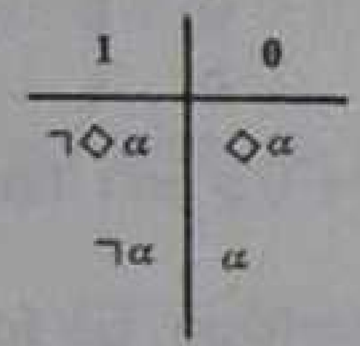
(◇ 00)



(□ 01)



(◇ 01)



§ 3. System aksjomatyczny Ł3

System aksjomatyczny rachunku Ł3 budujemy zgodnie z ogólnymi uwagami zawartymi w § 3 rozdziału I. Intuicje językowe związane ze sposobem użycia w języku naturalnym poszczególnych spójników zdaniowych będą tu nieco inne niż te, którymi kierowaliśmy się w opisie aksjomatycznym KRZ. Używamy przecież innej niż w KRZ negacji; jest to, jak wiemy z poprzedniego paragrafu, negacja nieekstensjonalna, nie zawsze zmieniająca wartość nieprawdziwej wypowiedzi. Stąd konieczność dokonania pewnych modyfikacji w aksjomatyce KRZ, tak by stała się adekwatna w stosunku do semantycznych intencji rachunku Ł3.

Aksjomatem naszego systemu Ł3 będzie każda formuła powstająca przez uszczegółowienie któregokolwiek z poniższych schematów, tj. wpisanie w miejsce występujących w nich greckich liter dowolnych wyrażeń sensownych Ł3:

Schematy aksjomatów Ł3

Ax. 1	$\alpha \to (\beta \to \beta)$	
Ax. 2	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	sylogizm hipotetyczny
Ax. 3	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	prawo komutacji
Ax. 4′	$(\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))$	
Ax. 5	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 6	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 7	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$	prawo mnożenia następników
Ax. 8	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 9	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 10	$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$	prawo dodawania poprzedników
Ax. 11	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$	mocne prawo kontrapozycji
Ax. 12′	$\alpha \vee (\neg\alpha \vee (\beta \vee (\neg\beta \vee (\alpha \to \beta))))$	

Wobec nieskończonej liczebności zbioru $\Sigma_{Ł3}$ na aksjomatykę tego rachunku składa się nieskończenie wiele formuł, z których każda opiera się na jednym z przytoczonych tu dwunastu schematów.

Uważny Czytelnik dostrzegł zapewne różnicę między schematem Ax. 4 z KRZ a Ax. 4′ w Ł3. Jakkolwiek oba schematy służą temu samemu celowi: redukcji powtarzających się poprzedników implikacji, to schemat używany na gruncie KRZ jest środkiem o wiele radykalniejszym, dalej redukcję posuwającym. Istotnym *novum* aksjomatyki systemu Ł3 jest schemat Ax. 12′ nie posiadający odpowiednika w aksjomatyce KRZ. Stanowi on pewnego rodzaju sumę osłabionych wersji nie obowiązujących w Ł3 praw klasycznego rachunku zdań: prawa wyłączonego środka i tzw. paradoksu implikacji $(\alpha \vee (\alpha \to \beta))$.

Jedyną **regułą pierwotną** naszego systemu Ł3 jest, podobnie jak w KRZ oraz w INT, reguła elementarna (**reguła odrywania**) o schemacie:

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

DEFINICJA TEZY Ł3 WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO Ł3 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha(\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW Ł3,

ALBO (2) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA.

Jak wynika z kształtu przytoczonej definicji, na gruncie Ł3 akceptuje się tę samą co w KRZ czy INT metodę dowodzenia tez. Podobnie jak w tych wcześniej omówionych rachunkach, każdy dowód przyjmuje postać skończonego ciągu formuł numerowanych po lewej i opisanych po prawej stronie. Z powodów wyjaśnionych już w § 3 rozdziału II (str. 51) prezentować będziemy schematy dowodów uzasadniające schematy tez. Podane tam przykłady dowodów schematów T1 i T2 są równocześnie dowodami z punktu widzenia systemu Ł3. Wobec tego:

(T1) $\alpha \to \alpha$ prawo tożsamości
(T2) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ prawo symplifikacji

są schematami tez rachunku Ł3.

Dążąc do wzbogacenia nielicznych pierwotnych środków dowodowych aksjomatycznego systemu Ł3, przenieśmy na grunt tego rachunku pojęcia, którymi posługiwaliśmy się przy opisie KRZ i INT, mianowicie pojęcia relacji dowiedlności i reguły wyprowadzalnej.

DEFINICJA RELACJI DOWIEDLNOŚCI W Ł3 FORMUŁA α JEST DOWIEDLNA W Ł3 ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{d-Ł3} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha(\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),

ALBO (2) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW Ł3,

ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA.

DEFINICJA REGUŁY WYPROWADZALNEJ W Ł3 REGUŁA JEST WYPROWADZALNA W SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM Ł3 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \vdash_{d-Ł3} \alpha$.

Przypomnijmy, że w przypadku reguł posiadających schemat, uzasadnienie wyprowadzalności polega na wykazaniu, że ze schematów przesłanek dowiedlny jest schemat wniosku. Aksjomatyka Ł3 pozwala bez zmian przenieść na grunt tego rachunku przedstawione w § 3 rozdziału II (str. 53-54) uzasadnienie wyprowadzalności następujących trzech reguł:

(RKom) $$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$$ Reguła komutacji

(RPI) $$\frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$ Reguła przechodniości implikacji

(RP) $$\frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$$ Reguła poprzedzania

Natomiast uzasadnienia wyprowadzalnej w KRZ i INT reguły:

(PRO) $$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma) \quad \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$$ Poprzedzona reguła odrywania

nie można powtórzyć w rachunku Ł3, z uwagi na to, że wykorzystywany w tym uzasadnieniu schemat Ax. 4 nie figuruje wśród schematów aksjomatów Ł3. W Ł3 natomiast wyprowadzalna jest, przypominająca (PRO), podwójnie poprzedzona reguła odrywania:

(PPRO) $$\frac{\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \quad \alpha \to (\alpha \to \beta)}{\alpha \to (\alpha \to \gamma)}$$ Podwójnie poprzedzona reguła odrywania

Uzasadniając jej wyprowadzalność wykazujemy, że:
$\{\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)), \alpha \to (\alpha \to \beta)\} \vdash_{d-Ł3} \alpha \to (\alpha \to \gamma)$

1. $\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ założenie
2. $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ założenie
3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$ Ax. 2 $\beta/\beta \to \gamma$, $\gamma/\alpha \to \gamma$
4. $(\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to (((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to$ $\to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))) \to (\alpha \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))))$ Ax. 2 $\beta/\alpha \to (\beta \to \gamma)$, $\gamma/((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to$ $\to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$
5. $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))) \to$ $\to (\alpha \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))))$ RO 4, 1
6. $\alpha \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$ RO 5, 3
7. $(\alpha \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))) \to (((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to$ $\to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))))$ Ax. 3 $\beta/(\beta \to \gamma) \to$ $\to (\alpha \to \gamma)$, $\gamma/\alpha \to (\alpha \to \gamma)$
8. $((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$ RO 7, 6
9. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ Ax. 2
10. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \to$ $\to (\alpha \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))))$ Ax. 2 $\beta/\alpha \to \beta$, $\gamma/(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$
11. $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \to (\alpha \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$ RO 10, 2
12. $\alpha \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ RO 11, 9
13. $(\alpha \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \to ((((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to$ $\to (\alpha \to \gamma)))) \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))))$ Ax. 2 $\beta/(\beta \to \gamma) \to$ $\to (\alpha \to \gamma)$, $\gamma/\alpha \to$ $\to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$
14. $(((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))) \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))))$ RO 13, 12
15. $\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$ RO 14, 8
16. $(\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))) \to (\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma)))$ Ax. 4′ $\beta/\alpha \to \gamma$

17. $\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$ RO 16, 15
18. $(\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))) \to (\alpha \to (\alpha \to \gamma))$ Ax. 4′ β/γ
19. $\alpha \to (\alpha \to \gamma)$ RO 18, 17

Uzasadnimy ponadto wyprowadzalność w systemie Ł3 czterech reguł ułatwiających operowanie funktorem alternatywy. Dwie pierwsze, bliźniaczo podobne i noszące tę samą nazwę, pozwalają włączać do dowodu formuły alternatywne, o ile znalazł się w nim już którykolwiek z ich członów:

(DA) $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ Reguła dołączania alternatywy

Uzasadniając wyprowadzalność (DA) wykażemy, że zachodzi relacja dowiedlności: $\{\alpha\} \vdash_{d-Ł3} \alpha \vee \beta$

1. α założenie
2. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$ Ax. 8
3. $\alpha \vee \beta$ RO 2, 1

(DA) $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ Reguła dołączania alternatywy

Uzasadniając wyprowadzalność (DA) wykażemy, że zachodzi relacja dowiedlności: $\{\beta\} \vdash_{d-Ł3} \alpha \vee \beta$

1. β założenie
2. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$ Ax. 9
3. $\alpha \vee \beta$ RO 2, 1

(OCA) $\dfrac{\alpha \vee (\beta \to \gamma) \quad \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \gamma}$ Reguła odrywania w członie alternatywy

Uzasadniając wyprowadzalność (OCA) wykażemy, że zachodzi relacja dowiedlności: $\{\alpha \vee (\beta \to \gamma), \alpha \vee \beta\} \vdash_{d-Ł3} \alpha \vee \gamma$

1. $\alpha \vee (\beta \to \gamma)$ założenie
2. $\alpha \vee \beta$ założenie
3. $\gamma \to (\alpha \vee \gamma)$ Ax. 9 β/γ
4. $(\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to (\alpha \vee \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \vee \gamma)))$ Ax. 2 α/β, β/γ, $\gamma/\alpha \vee \gamma$

5. $((\beta\to\gamma)\to((\gamma\to(\alpha\vee\gamma))\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))))\to((\gamma\to(\alpha\vee\gamma))\to$
$\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))))$ — Ax. 3 $\alpha/\beta\to\gamma$, $\beta/\gamma\to\to(\alpha\vee\gamma)$, $\gamma/\beta\to(\alpha\vee\gamma)$
6. $(\gamma\to(\alpha\vee\gamma))\to((\beta\to\gamma)\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))$ — RO 5, 4
7. $(\beta\to\gamma)\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))$ — RO 6, 3
8. $\alpha\to(\alpha\vee\gamma)$ — Ax. 8 β/γ
9. $\beta\to((\alpha\to(\alpha\vee\gamma))\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma)))$ — Ax. 1 α/β, $\beta/\alpha\to(\alpha\vee\gamma)$
10. $(\beta\to((\alpha\to(\alpha\vee\gamma))\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma))))\to((\alpha\to(\alpha\vee\gamma))\to$
$\to(\beta\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma))))$ — Ax. 3 α/β, $\beta/\alpha\to(\alpha\vee\gamma)$, $\gamma/\alpha\to(\alpha\vee\gamma)$
11. $(\alpha\to(\alpha\vee\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma)))$ — RO 10, 9
12. $\beta\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma))$ — RO 11, 8
13. $(\beta\to(\alpha\to(\alpha\vee\gamma)))\to(\alpha\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))$ — Ax. 3 α/β, β/α, $\gamma/\alpha\vee\gamma$
14. $\alpha\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))$ — RO 13, 12
15. $(\alpha\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))\to(((\beta\to\gamma)\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))\to((\alpha\vee(\beta\to\gamma))\to$
$\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))))$ — Ax. 10 $\beta/\beta\to\gamma$, $\gamma/\beta\to\to(\alpha\vee\gamma)$
16. $((\beta\to\gamma)\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))\to((\alpha\vee(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma)))$ — RO 15, 14
17. $(\alpha\vee(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\vee\gamma))$ — RO 16, 7
18. $\beta\to(\alpha\vee\gamma)$ — RO 17, 1
19. $(\alpha\to(\alpha\vee\gamma))\to((\beta\to(\alpha\vee\gamma))\to((\alpha\vee\beta)\to(\alpha\vee\gamma)))$ — Ax. 10 $\gamma/\alpha\vee\gamma$
20. $(\beta\to(\alpha\vee\gamma))\to((\alpha\vee\beta)\to(\alpha\vee\gamma))$ — RO 19, 8
21. $(\alpha\vee\beta)\to(\alpha\vee\gamma)$ — RO 20, 18
22. $\alpha\vee\gamma$ — RO 21, 2

(PA) $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\vee\boldsymbol{\alpha}}$ Reguła przemienności alternatywy

Uzasadnienie wyprowadzalności (PA) sprowadza się do wykazania, że zachodzi $\{\alpha\vee\beta\}\vdash_{d-Ł3}\beta\vee\alpha$

1. $\alpha\vee\beta$ — założenie
2. $(\alpha\to(\beta\vee\alpha))\to((\beta\to(\beta\vee\alpha))\to((\alpha\vee\beta)\to(\beta\vee\alpha)))$ — Ax. 10 $\gamma/\beta\vee\gamma$
3. $\alpha\to(\beta\vee\alpha)$ — Ax. 9 α/β, β/α

4. $\beta\to(\beta\vee\alpha)$ — Ax. 8 α/β, β/α
5. $(\beta\to(\beta\vee\alpha))\to((\alpha\vee\beta)\to(\beta\vee\alpha))$ — RO 2, 3
6. $(\alpha\vee\beta)\to(\beta\vee\alpha)$ — RO 5, 4
7. $\beta\vee\alpha$ — RO 6, 1

Śledząc przeprowadzone w § 3 rozdziału II dowody tez T 1 - T 12, dochodzimy do wniosku, że prócz T 1 i T 2, o których już była mowa, tezami Ł3 są również:

(T 4) $\neg\neg\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}$ — mocne prawo podwójnego przeczenia
(T 5) $\boldsymbol{\alpha}\to\neg\neg\boldsymbol{\alpha}$ — słabe prawo podwójnego przeczenia
(T 6) $(\boldsymbol{\alpha}\to\neg\boldsymbol{\beta})\to(\boldsymbol{\beta}\to\neg\boldsymbol{\alpha})$ — słabe prawo transpozycji
(T 7) $(\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\beta})\to(\neg\boldsymbol{\beta}\to\neg\boldsymbol{\alpha})$ — słabe prawo kontrapozycji
(T 8) $(\neg\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\beta})\to(\neg\boldsymbol{\beta}\to\boldsymbol{\alpha})$ — mocne prawo transpozycji
(T 9) $\boldsymbol{\alpha}\to(\neg\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\beta})$ — prawo przepełnienia.

Dowody tych formuł bez żadnych zmian powtórzyć można na gruncie rachunku Ł3. Nie jest to natomiast możliwe w odniesieniu do dowodów schematów T 3, T 10, T 11 oraz T 12. Dowodów tych nie tylko nie przeniesiemy na teren Ł3, lecz nawet nie zmodyfikujemy ich tak, by były w tym rachunku poprawne. Okazuje się bowiem, że schematy te są w Ł3 nietautologiczne (Czytelnik zechce sam sprawdzić rzetelność tej informacji metodami z § 2). Uprzedzając zatem wnioski płynące z twierdzenia o pełności, które udowodnimy dopiero w następnym paragrafie, stwierdzamy, że nie istnieją w Ł3 dowody dla wyliczonych wyżej czterech schematów formuł. Nie są więc one schematami tez tego rachunku. Z tego samego powodu nie są schematami tez Ł3, T 14 - T 16 (uzasadniane w KRZ z pomocą twierdzeń o dedukcji). Łatwy dowód T 13 pozostawiamy Czytelnikowi, a tymczasem pokażemy, posługując się wtórnymi środkami dowodowymi w postaci reguł wyprowadzalnych i gotowych tez, że są również schematami tez rachunku Ł3:

(T 17) $\boldsymbol{\alpha}\to(\neg\boldsymbol{\beta}\to\neg(\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\beta}))$

1. $(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\beta)$ — T 1 $\alpha/\alpha\to\beta$
2. $\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\beta)$ — RKom 1
3. $((\alpha\to\beta)\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$ — T 7 $\alpha/\alpha\to\beta$
4. $\alpha\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$ — RPI 2, 3

(T 18) $(\neg\boldsymbol{\alpha}\wedge\neg\boldsymbol{\beta})\to\neg(\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta})$ prawo de Morgana

1. $(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\to\neg\alpha$ — Ax. 5 $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$

2. $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg\beta$ Ax. 6 $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$
3. $((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ T 6 $\alpha/\neg\alpha \wedge \neg\beta$, β/α
4. $((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ T 6 $\alpha/\neg\alpha \wedge \neg\beta$
5. $\alpha \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ RO 3, 1
6. $\beta \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ RO 4, 2
7. $(\alpha \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \to ((\beta \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)))$ Ax. 10 $\gamma/\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
8. $(\beta \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ RO 7, 5
9. $(\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ RO 8, 6
10. $((\alpha \vee \beta) \to \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \to ((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta))$ T 6 $\alpha/\alpha \vee \beta$, $\beta/\neg\alpha \wedge \neg\beta$
11. $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$ RO 10, 9

(T 19) $\neg(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \to (\neg\boldsymbol{\alpha} \vee \neg\boldsymbol{\beta})$ prawo de Morgana

1. $\neg\alpha \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ Ax. 8 $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$
2. $\neg\beta \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ Ax. 9 $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$
3. $(\neg\alpha \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \alpha)$ T 8 $\beta/\neg\alpha \vee \neg\beta$
4. $(\neg\beta \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \beta)$ T 8 α/β, $\beta/\neg\alpha \vee \neg\beta$
5. $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \alpha$ RO 3, 1
6. $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \beta$ RO 4, 2
7. $(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \alpha) \to ((\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \beta) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)))$ Ax. 7 $\alpha/\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, β/α, γ/β
8. $(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \beta) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta))$ RO 7, 5
9. $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)$ RO 8, 6
10. $(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta)) \to (\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta))$ T 8 $\alpha/\neg\alpha \vee \neg\beta$, $\beta/\alpha \wedge \beta$
11. $\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ RO 10, 9

(T 20) $(\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\alpha}) \to \boldsymbol{\alpha}$

1. $(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \vee \alpha) \to \alpha))$ Ax. 10 β/α, γ/α
2. $\alpha \to \alpha$ T 1
3. $(\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \vee \alpha) \to \alpha)$ RO 1, 2
4. $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ RO 3, 2

(T 21) $(\boldsymbol{\alpha} \vee \neg\boldsymbol{\alpha}) \to ((\boldsymbol{\alpha} \to (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta})) \to (\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}))$

1. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)))$ Ax. 10 $\beta/\neg\alpha$, $\gamma/\alpha \to \beta$
2. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ T 9
3. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ RKom 2
4. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)))$ RKom 1
5. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))$ RO 4, 3
6. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta))$ RKom 5

Dopuszczenie nowych środków dowodowych przekształca definicję relacji dowiedlności w definicję relacji inferencji:

DEFINICJA RELACJI INFERENCJI W Ł3 FORMUŁA α JEST INFEROWALNA W Ł3 ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{Ł3} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST α ($\gamma_k = \alpha$) I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST
ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),
ALBO (2) TEZĄ Ł3 (W SZCZEGÓLNOŚCI – AKSJOMATEM OPARTYM NA KTÓRYMŚ ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW Ł3),
ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA BĄDŹ DOWOLNEJ REGUŁY WYPROWADZALNEJ W Ł3.

Relacji tej przysługują własności, o których mowa w lematach 1 - 4 § 3 rozdziału I. Sformułujemy je tutaj w stylizacji odpowiedniej dla Ł3, pomijając dowody analogiczne do przedstawionych w § 3 rozdziału I.

LEMAT 3 (i) $\Phi \vdash_{d-Ł3} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \vdash_{Ł3} \alpha$;
(ii) $\varnothing \vdash_{Ł3} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TEZĄ Ł3;
(iii) $\Phi \vdash_{Ł3} \Phi$;
(iv) JEŚLI $\Phi \vdash_{Ł3} \Psi$ ORAZ $\Psi \vdash_{Ł3} \Omega$, TO $\Phi \vdash_{Ł3} \Omega$;
(v) JEŚLI $\Phi \vdash_{Ł3} \alpha$ ORAZ $\Phi \subset \Psi$, TO $\Psi \vdash_{Ł3} \alpha$.

Inna własność relacji inferencji, znana z rachunków KRZ i INT, jaką jest twierdzenie o dedukcji wprost, podlega w Ł3 znacznemu osłabieniu i wobec tego przestaje odgrywać rolę skutecznego narzędzia dowodowego. Podobnie jak w wersji semantycznej, udowodnimy nawet dwa twierdzenia o dedukcji wprost: iterowane i ograniczone. Niestety, oba mają zastosowanie tylko wówczas, gdy dowodzona formuła implikacyjna ma ściśle określony kształt (co najmniej dwukrotnie powtórzony poprzednik) bądź charakter (alternatywa poprzednika i jego negacji jest tezą Ł3).

TWIERDZENIE 3 (O DEDUKCJI WPROST – ITEROWANE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \beta$, TO $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to (\alpha \to \beta)$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \beta$. Zgodnie z definicją relacji $\vdash_{\text{Ł3}}$ istnieje skończony ciąg formuł uzasadniający inferencję ze zbioru $\Phi \cup \{\alpha\}$. Niech w tym ciągu formuły $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tworzące zbiór Ψ, a pochodzące ze zbioru Φ, pełnią rolę założeń. A zatem: $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \beta$. Wobec lematu 3(i): $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-\text{Ł3}} \beta$, co oznacza istnienie skończonego ciągu Π: $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (w którym $\gamma_k = \beta$), uzasadniającego dowiedlność β ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$. Ciąg Π zbudowany jest wyłącznie przy użyciu pierwotnych środków dowodowych. Konstruujemy nowy ciąg formuł Ω:

$$(\Omega)\quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,\ \alpha \to (\alpha \to \gamma_1),\ \alpha \to (\alpha \to \gamma_2), \dots, \alpha \to (\alpha \to \gamma_k).$$

Ostatnim wyrazem ciągu Ω jest formuła $\alpha \to (\alpha \to \beta)$. Wykażemy posługując się indukcją ze względu na budowę ciągu Π, że Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ ze zbioru założeń Ψ. Musimy usprawiedliwić obecność w ciągu Ω każdej z formuł $\alpha \to (\alpha \to \gamma_m)$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$. Rozważając ciąg Π stwierdzamy, że dowolna należąca doń formuła γ_m $(1 \leqslant m \leqslant k)$ jest

albo (1) założeniem ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$,
albo (2) aksjomatem rachunku Ł3,
albo (3) wynikiem stosowania reguły odrywania do pewnych wyrazów ciągu Π wcześniejszych od γ_m.

(1) Gdy $\gamma_m \in \Psi$, wówczas formułę $\alpha \to (\alpha \to \gamma_m)$ wpisujemy do ciągu Ω jako wynik dwukrotnego zastosowania wyprowadzalnej w Ł3 reguły poprzedzania. Jeśli $\gamma_m = \alpha$, wówczas formułę $\alpha \to (\alpha \to \gamma_m)$ wolno wpisać do ciągu jako rezultat zastosowania reguły poprzedzania do prawa tożsamości (T 1) $\alpha \to \alpha$.

(2) Gdy γ_m jest aksjomatem, wówczas formułę $\alpha \to (\alpha \to \gamma_m)$ wpisujemy do ciągu Ω jako tezę uzyskaną w wyniku dwukrotnego użycia reguły poprzedzania do tego aksjomatu.

(3) Gdy γ_m powstała w wyniku aplikowania reguły odrywania do wyrazów ciągu Π wcześniejszych od γ_m, istnieją $s, t < m$ takie, że $\gamma_t = \gamma_s \to \gamma_m$. Na mocy samej konstrukcji ciągu Ω wyrażenia

$\alpha \to (\alpha \to \gamma_s)$ oraz $\alpha \to (\alpha \to \gamma_t) = \alpha \to (\alpha \to (\gamma_s \to \gamma_m))$ występują w nim przed formułą $\alpha \to (\alpha \to \gamma_m)$, a więc można uzasadnić jej obecność w ciągu Ω powołując się na wyprowadzalną w Ł3 podwójnie poprzedzona regułę odrywania.

Wykazaliśmy więc, że ciąg Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to (\alpha \to \beta)$ ze zbioru założeń Ψ, a wobec lematu 3(v), wnioskujemy, że $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to (\alpha \to \beta)$ •

TWIERDZENIE 4 (O DEDUKCJI WPROST – OGRANICZONE)
JEŻELI $\alpha \vee \neg\alpha$ JEST TEZĄ Ł3 I $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \beta$, TO $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to \beta$.

Dowód. Załóżmy, że $\alpha \vee \neg\alpha$ jest tezą naszego systemu Ł3, a nadto że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \beta$. Wobec twierdzenia 3: $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. Przypomnijmy, że jest tezą Ł3 (T 21) $(\alpha \vee \neg\alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta))$ i dopiszmy tę tezę wraz z tezą $\alpha \vee \neg\alpha$ do ciągu uzasadniającego $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to (\alpha \to \beta)$. Dwukrotne zastosowanie reguły odrywania pozwoli nam dołączyć $\alpha \to \beta$ jako ostatni wyraz w ciągu, który po takim uzupełnieniu stanowi uzasadnienie dla $\Phi \vdash_{\text{Ł3}} \alpha \to \beta$ •

Analogony znanych z KRZ twierdzeń o dedukcji niewprost w rachunku Ł3 nie zachodzą.

Opis syntaktycznej wersji Ł3 zakończymy wykazując, że relacji inferencji w tym rachunku przysługuje inna ważna, wykorzystywana w dowodzie twierdzenia o pełności, własność:

LEMAT 4 JEŚLI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \gamma$ ORAZ $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{\text{Ł3}} \gamma$, TO WTEDY $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{\text{Ł3}} \gamma$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{Ł3}} \gamma$ oraz $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{\text{Ł3}} \gamma$. Wobec lematu 3(i) zachodzi $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-\text{Ł3}} \gamma$ i $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{d-\text{Ł3}} \gamma$. Relację dowiedlności w przypadku $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-\text{Ł3}} \gamma$ uzasadnia skończony ciąg: $\gamma_1, \dots, \gamma_k = \gamma$, a w przypadku $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{d-\text{Ł3}} \gamma$: $\delta_1, \dots, \delta_m = \gamma$. Załóżmy, że w pierwszym ciągu formuły $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_t$ są wszystkimi założeniami ze zbioru Φ, a w drugim ciągu założenia z Φ oznaczmy $\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_n$. Utwórzmy nowy ciąg Ω:

$$(\Omega)\quad \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_t,\ \ \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_n,\ \ \alpha \vee \beta,\ \ \gamma_1 \vee \beta, \dots, \gamma_k \vee \beta,$$
$$\gamma_k \vee \delta_1, \dots, \gamma_k \vee \delta_m,\ \ \gamma.$$

Wykażemy, że ciąg ten stanowi uzasadnienie inferowalności γ ze zbioru założeń $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\}$.

(1) Pierwsze $t+n+1$ wyrażeń ciągu Ω to podzbiór zbioru $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\}$,

(2) Każdy wyraz ciągu $\gamma_1, \ldots, \gamma_k = \gamma$ jest bądź
- założeniem $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_t$, α, bądź
- aksjomatem Ł3, bądź
- wynikiem zastosowania reguły odrywania.

Gdy γ_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ jest jednym z założeń $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_t$, wówczas $\gamma_j \vee \beta$ włączamy do ciągu Ω na mocy reguły dołączania alternatywy.
Gdy γ_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ jest formułą α, wówczas $\gamma_j \vee \beta$ ma postać $\alpha \vee \beta$ i znajduje się już w ciągu Ω (jako jego $t+n+1$ wyraz).
Gdy γ_j jest aksjomatem, formułę $\gamma_j \vee \beta$ wprowadzamy do Ω jako tezę (wobec reguły dołączania alternatywy).
Gdy γ_j powstaje z γ_s i $\gamma_t = \gamma_s \rightarrow \gamma_j$ $(s, t < j)$ na mocy reguły odrywania, załóżmy dla indukcji, że obecność wyrażeń $\gamma_s \vee \beta$ i $\gamma_t \vee \beta$ w ciągu Ω została już uzasadniona. Stosując reguły wyprowadzalne (regułę przemienności alternatywy i regułę odrywania w członie alternatywy) włączyć możemy do Ω również $\gamma_j \vee \beta$.

(3) Każdy wyraz ciągu $\delta_1, \ldots, \delta_m = \gamma$ jest bądź
- założeniem $\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n$, β bądź
- aksjomatem Ł3 bądź
- wynikiem zastosowania reguły odrywania.

Gdy δ_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ jest jednym z założeń $\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n$, wówczas $\gamma_k \vee \delta_j$ włączamy do ciągu Ω na mocy reguły dołączania alternatywy.
Gdy δ_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ jest formułą β, wówczas $\gamma_k \vee \beta$ ma postać $\gamma \vee \beta$ i znajduje się już w ciągu Ω (jako jego $t+n+1+k$ wyraz).
Gdy δ_j jest aksjomatem, formułę $\gamma_k \vee \delta_j$ wprowadzamy do Ω jako tezę (wobec reguły dołączania alternatywy).
Gdy δ_j powstaje z δ_s i $\delta_t = \delta_s \rightarrow \delta_j$ $(s, t < j)$ na mocy reguły odrywania, załóżmy dla indukcji, że obecność wyrażeń $\gamma_k \vee \delta_s$ i $\gamma_k \vee \delta_t$ w ciągu Ω została już uzasadniona. Stosując wyprowadzalną regułę odrywania w członie alternatywy włączyć możemy do Ω również $\gamma_k \vee \delta_j$.

(4) Przedostatni wyraz ciągu Ω: $\gamma_k \vee \delta_m$ to po prostu formuła postaci $\gamma \vee \gamma$. Z niej oraz (T20) $(\gamma \vee \gamma) \rightarrow \gamma$ na drodze odrywania otrzymamy ostatni element ciągu γ, kończąc tym samym dowód lematu •

Twierdzenie 5 (o pełności dla Ł3) Dla dowolnego wyrażenia sensownego α języka Ł3: α jest tezą Ł3 wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią Ł3.

Dowód. (I) Uzasadnienie faktu, że każda teza Ł3 jest tautologią Ł3 przebiega zgodnie ze schematem z §4 rozdziału I. Należy zatem pokazać, że:

1° każdy schemat aksjomatów Ł3 jest schematem tautologii tego rachunku oraz, że

2° każda reguła pierwotna aksjomatycznego systemu Ł3 jest regułą niezawodną w tym rachunku (por. uwagę na str. 131).

(II) W dowodzie faktu, że każda tautologia Ł3 jest równocześnie tezą systemu aksjomatycznego Ł3, zastosujemy metodę Henkina i skorzystamy z twierdzenia Assera (dowiedzionego w postaci ogólnej w §4 rozdziału I). Przypominamy je tutaj w wersji dostosowanej do omawianego rachunku:

Twierdzenie 6 (o relatywnych nadsystemach zupełnych dla Ł3)
Jeżeli formuła α nie jest inferowalna z Ω, to istnieje zbiór formuł Ł3 Π^{α}_{Ω} taki, że:
(1) $\alpha \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(2) jeżeli $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \beta$, to $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(3) jeżeli $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, to $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{Ł3} \alpha$;
(4) $\Omega \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Zbiór Π^{α}_{Ω}, poza wyżej przytoczonymi, posiada jeszcze inne, specyficzne dla rachunków Ł3 własności:

Lemat 5 (1) Jeśli $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, to $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(2) $\neg\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(3) $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(4) $\neg(\beta \wedge \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(5) $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(6) $\neg(\beta \vee \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(7) $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ wtw, gdy $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub ($\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$)

(8) $\neg(\beta \to \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW. GDY $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ ORAZ $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Dowód. (1) Załóżmy, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, a dla dowodu niewprost, że również $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Korzystając z (T 9) $\beta \to (\neg\beta \to \alpha)$ i reguły odrywania uzasadniamy inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$, która wobec twierdzenia 6(2) pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 6(1).

(2i) Załóżmy, że $\neg\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Reguła odrywania i (T 4) $\neg\neg\beta \to \beta$ pozwalają uzasadnić inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \beta$, skąd przez twierdzenie 6(2) mamy: $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(2ii) Załóżmy, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Reguła odrywania i (T 5) $\beta \to \neg\neg\beta$ uzasadniają inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg\neg\beta$. Stosując twierdzenie 6(2) wnioskujemy, że $\neg\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(3i) Niech $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Reguła odrywania i aksjomaty Ax. 5 oraz Ax. 6 (w postaci $(\beta \wedge \gamma) \to \beta$, $(\beta \wedge \gamma) \to \gamma$) umożliwiają uzasadnienie inferencji $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \{\beta, \gamma\}$, a dalej, przez twierdzenie 6(2), wnioskujemy, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(3ii) Załóżmy z kolei, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Weźmy pod uwagę ciąg formuł:

1.	β	założenie
2.	γ	założenie
3.	$(\beta \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to (\beta \wedge \gamma)))$	Ax. 7 α/β
4.	$\beta \to \beta$	T 1 α/β
5.	$(\beta \to \gamma) \to (\beta \to (\beta \wedge \gamma))$	RO 3, 4
6.	$\beta \to \gamma$	RP 2
7.	$\beta \to (\beta \wedge \gamma)$	RO 5, 6
8.	$\beta \wedge \gamma$	RO 7, 1

Ciąg ten uzasadnia inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \beta \wedge \gamma$, co wobec twierdzenia 6(2) oznacza, że $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(4i) Niech $\neg(\beta \wedge \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Korzystając z reguły odrywania oraz (T 19) $\neg(\beta \wedge \gamma) \to (\neg\beta \vee \neg\gamma)$ uzasadniamy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg\beta \vee \neg\gamma$. Zgodnie z twierdzeniem 6(2): $\neg\beta \vee \neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Załóżmy niewprost, że $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wnioskujemy stąd, stosując twierdzenie 6(3), że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\beta\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$ i jednocześnie że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\gamma\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$. Wobec lematu 4 mamy: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\beta \vee \neg\gamma\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$. Ponieważ jednak $\neg\beta \vee \neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, więc $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$. A zatem, przez twierdzenie 6(2), $\alpha \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, co pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 6(1).

(4ii) Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

A. Niech $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Biorąc pod uwagę Ax. 5 $(\beta \wedge \gamma) \to \beta$ oraz tezę

(T 7) $((\beta \wedge \gamma) \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg(\beta \wedge \gamma))$ uzasadnimy przy użyciu reguły odrywania inferencję: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg(\beta \wedge \gamma)$. A zatem, zgodnie z twierdzeniem 6(2): $\neg(\beta \wedge \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

B. Gdy z kolei $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, aby uzasadnić zachodzenie inferencji $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg(\beta \wedge \gamma)$, wykorzystać należy Ax. 6 $(\beta \wedge \gamma) \to \gamma$ oraz tezę (T 7) $((\beta \wedge \gamma) \to \gamma) \to (\neg\gamma \to \neg(\beta \wedge \gamma))$ i regułę odrywania. Z uwagi na twierdzenie 6(2): $\neg(\beta \wedge \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(5i) Niech $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Ponadto załóżmy niewprost, że ani β, ani γ do zbioru Π^{α}_{Ω} nie należą. Zgodnie z twierdzeniem 6(3) mamy: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$ oraz $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\gamma\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$. Lemat 4 pozwoli wyprowadzić kolejny wniosek: $\Pi^{\alpha} \cup \{\beta \vee \gamma\} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$, co wobec przyjętego założenia oznacza, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \alpha$. Stosując twierdzenie 6(2) uzyskamy sprzeczność z twierdzeniem 6(1).

(5ii) Rozpatrujemy dwa przypadki:

A. Niech $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Reguła odrywania i Ax. 8 $\beta \to (\beta \vee \gamma)$ pozwolą uzasadnić inferencję: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \beta \vee \gamma$, a w rezultacie, przez twierdzenie 6(2), także wniosek: $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

B. Gdy $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, w ciągu usprawiedliwiającym zachodzenie inferencji $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \beta \vee \gamma$ wykorzystujemy Ax. 9 $\gamma \to (\beta \vee \gamma)$ oraz regułę odrywania. Fakt, że $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, wynika z twierdzenia 6(2).

(6i) Niech $\neg(\beta \vee \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Aby uzasadnić, że zachodzi inferencja $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \{\neg\beta, \neg\gamma\}$, korzystamy z reguły odrywania, aksjomatów 8 i 9 (tj. $\beta \to (\beta \vee \gamma)$ i $\gamma \to (\beta \vee \gamma)$) i tezy (T 7) w dwóch wersjach:

$$(\beta \to (\beta \vee \gamma)) \to (\neg(\beta \vee \gamma) \to \neg\beta), \quad (\gamma \to (\beta \vee \gamma)) \to (\neg(\beta \vee \gamma) \to \neg\gamma)$$

Po uzasadnieniu tej inferencji, z twierdzenia 6(2) wnioskujemy, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(6ii) Gdy $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, ciągiem analogicznym do użytego w punkcie (3ii) niniejszego dowodu uzasadniamy inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg\beta \wedge \neg\gamma$. Dalej, korzystając z (T 18) $(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \to \neg(\beta \vee \gamma)$ i reguły odrywania, wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{\text{Ł}3} \neg(\beta \vee \gamma)$. Stąd zaś, na mocy twierdzenia 6(2), wynika: $\neg(\beta \vee \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(7i) Niech $\beta \to \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Dla dowodu niewprost załóżmy ponadto, że: $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, $\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz ($\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$). Informacja zawarta w dwóch pierwszych członach założenia niewprost pozwala uprościć alternatywę w członie trzecim do postaci: $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ lub $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Tym samym rozważyć należy dwa przypadki:

A. Gdy $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, wówczas stosując regułę odrywania uzasadniamy inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \gamma$. Stąd, wobec twierdzenia 6(2): $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, co pozostaje w sprzeczności z drugim członem założenia niewprost.

B. Gdy $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, korzystamy z (T 7) $(\beta \to \gamma) \to (\neg\gamma \to \neg\beta)$ oraz reguły odrywania, aby uzasadnić inferencję $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \neg\beta$. Zgodnie z twierdzeniem 6(2): $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, co sprzeczne z pierwszym członem założenia niewprost.

(7ii) Należy rozpatrzyć aż trzy przypadki:

A. Załóżmy, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Stosując (T 9) $\beta \to (\neg\beta \to \gamma)$, regułę komutacji i regułę odrywania wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \beta \to \gamma$. A zatem, wobec twierdzenia 6(2): $\beta \to \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

B. Gdy $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, wystarczy użyć reguły poprzedzania, by uzasadnić wniosek: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \beta \to \gamma$. Stąd na mocy twierdzenia 6(2) mamy: $\beta \to \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

C. Niech $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, $\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Załóżmy równocześnie, dla dowodu niewprost, że $\beta \to \gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Z założeń tych twierdzenie 6(3) pozwala wywnioskować, że:

$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \vdash_{Ł3} \alpha$$
$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\beta\} \vdash_{Ł3} \alpha$$
$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\gamma\} \vdash_{Ł3} \alpha$$
$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\gamma\} \vdash_{Ł3} \alpha$$
$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \to \gamma\} \vdash_{Ł3} \alpha$$

Stąd na mocy lematu 4 wyprowadzamy wniosek:

$$\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \Big\{\beta \vee \big(\neg\beta \vee (\gamma \vee (\neg\gamma \vee (\beta \to \gamma)))\big)\Big\} \vdash_{Ł3} \alpha.$$

Ponieważ jednak $\beta \vee \big(\neg\beta \vee (\gamma \vee (\neg\gamma \vee (\beta \to \gamma)))\big)$ jest schematem Ax. 12, więc $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \alpha$, skąd zgodnie z twierdzeniem 6(2): $\alpha \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, a to, jak wiadomo, pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 6(1).

(8i) Gdy $\neg(\beta \to \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, rozważamy dwa ciągi formuł:

1.	$\neg(\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\beta \to (\neg\beta \to \gamma)$	T 9 α/β, β/γ
3.	$\neg\beta \to (\beta \to \gamma)$	RKom 2
4.	$(\neg\beta \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\beta \to \gamma) \to \beta)$	T 8 α/β, $\beta/\beta \to \gamma$
5.	$\neg(\beta \to \gamma) \to \beta$	RO 4, 3
6.	β	RO 5, 1

1.	$\neg(\beta \to \gamma)$	założenie
2.	$\gamma \to (\beta \to \gamma)$	T 2 α/γ
3.	$(\gamma \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\beta \to \gamma) \to \neg\gamma)$	T 7 α/γ, $\beta/\beta \to \gamma$
4.	$\neg(\beta \to \gamma) \to \neg\gamma$	RO 3, 2
5.	$\neg\gamma$	RO 4,1

Oba te ciągi uzasadniają inferencję: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \{\beta, \neg\gamma\}$. Wobec twierdzenia 6(2) oznacza to, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(8ii) Załóżmy, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Korzystając z reguły odrywania i (T 17) $\beta \to (\neg\gamma \to \neg(\beta \to \gamma))$ uzasadniamy natychmiast inferencję: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \vdash_{Ł3} \neg(\beta \to \gamma)$, która zgodnie z twierdzeniem 6(2) świadczy o tym, że $\neg(\beta \to \gamma) \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Tym samym długi i żmudny dowód lematu 5 dobiegł końca ●

Lemat 5 umożliwia przeprowadzenie dowodu II części twierdzenia o pełności dla Ł3. Załóżmy więc, że formuła α jest tautologią Ł3, a dla dowodu niewprost przypuśćmy, że nie jest ona tezą tego rachunku. Z tej hipotezy wnioskujemy, na mocy lematu 3 (ii), że $\emptyset \nvdash_{Ł3} \alpha$. Wobec twierdzenia o relatywnych nadsystemach zupełnych dla Ł3 istnieje więc zbiór $\Pi^{\alpha}_{\emptyset}$ (dalej, zamiast $\Pi^{\alpha}_{\emptyset}$ będziemy pisać tylko Π^{α}) o własnościach ujętych w punktach (1 - 4) tego twierdzenia, spełniający nadto warunki (1 - 8) lematu 5. Definiujemy następnie odwzorowanie $v\colon \Sigma_{Ł3} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ kładąc dla dowolnej formuły δ:

$$v(\delta) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{gdy} \quad \delta \in \Pi^{\alpha} \\ \mathbf{0} & \text{gdy} \quad \delta \notin \Pi^{\alpha} \end{cases}$$

Lemat 5 pozwala wykazać, że tak określone odwzorowanie v jest w rachunku Ł3 wartościowaniem. Drobiazgowy dowód tego faktu jest zbyt długi, żeby przytoczyć go w całości. Zademonstrujemy dla przykładu część dotyczącą funktora implikacji. Załóżmy więc, że formuła δ ma kształt $\beta \to \gamma$ i sprawdźmy, w jaki sposób odwzorowanie v uzależnia jej wartość od postulowanej wartości jej podformuł. Rozważmy kolejno przypadki:

1. $v(\beta) = \mathbf{1}$. Z definicji v: $\beta \in \Pi^{\alpha}$. Z lematu 5(2) i (1): $\neg\neg\beta \in \Pi^{\alpha}$ oraz $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}$, co oznacza, że $v(\neg\beta) = \mathbf{0}$. Z uwagi na wartość formuły γ w obrębie przypadku 1 zajść mogą trzy sytuacje:

1.1. $v(\gamma) = \mathbf{1}$. Wówczas $\gamma \in \Pi^{\alpha}$ a na mocy lematu 5(2) i (1): $\neg\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}$ i $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}$, co oznacza że, $v(\neg\gamma) = \mathbf{0}$. Skoro $\gamma \in \Pi^{\alpha}$ z lematu 5(7) wnioskujemy, że $\beta \to \gamma \in \Pi^{\alpha}$, a zatem $v(\beta \to \gamma) = \mathbf{1}$.

1.2. $v(\gamma) = \mathbf{0}$, $v(\neg\gamma) = \mathbf{0}$. Z definicji v: $\gamma \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}$. Na mocy lematu 5(7) wyprowadzamy wniosek: $\beta \rightarrow \gamma \notin \Pi^{\alpha}$, co oznacza wobec określenia v: $v(\beta \rightarrow \gamma) = 0$.

1.3. $v(\gamma) = 0$, $v(\neg\gamma) = 1$. Z definicji v: $\gamma \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}$. Na mocy lematu 5(7) wyprowadzamy wniosek: $\beta \rightarrow \gamma \notin \Pi^{\alpha}$, co oznacza wobec określenia v: $v(\beta \rightarrow \gamma) = 0$.

2. $v(\beta) = 0$, $v(\neg\beta) = 0$. Z określenia v: $\beta \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}$.

2.1. $v(\gamma) = 1$. Wówczas $\gamma \in \Pi^{\alpha}$, a więc spełniony jest drugi człon alternatywy z lematu 5(7). W konsekwencji $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}$, a tym samym $v(\beta \rightarrow \gamma) = 1$.

2.2. $v(\gamma) = 0$, $v(\neg\gamma) = 0$. Z defnicji v: $\gamma \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\gamma \notin \Pi^{\alpha}$. Spełniony jest zatem trzeci człon alternatywy z lematu 5(7), skąd wyprowadzamy wniosek: $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}$, co oznacza wobec określenia v: $v(\beta \rightarrow \gamma) = 1$.

2.3. $v(\gamma) = 0$, $v(\neg\gamma) = 1$. Z definicji v: $\gamma \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\gamma \in \Pi^{\alpha}$. W tym przypadku, podobnie jak w 1.2 i 1.3 żaden z członów alternatywy z lematu 5(7) nie jest spełniony, a zatem implikacja $\beta \rightarrow \gamma$ do zbioru Π^{α} nie należy i w konsekwencji $v(\beta \rightarrow \gamma) = 0$.

3. $v(\beta) = 0$, $v(\neg\beta) = 1$. Z określenia v: $\beta \notin \Pi^{\alpha}$ i $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}$. Niezależnie od sposobu oceny formuł γ i $\neg\gamma$, zawsze prawdziwy jest pierwszy z członów alternatywy z lematu 5(7) z uwagi na to, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}$. Stąd $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}$, a w rezultacie $v(\beta \rightarrow \gamma) = 1$.

Gdy wyniki tych ustaleń porównamy z tabelką funktora implikacji w definicji wartościowania dla Ł3 (por. str. 113) stwierdzimy, że zdefiniowane wyżej odwzorowanie v dokładnie odpowiada jej wymogom. Analogiczne dowody należy sporządzić nie tylko dla pozostałych funktorów, lecz także dla ich negacji. Na ich podstawie formułujemy wniosek, że odwzorowanie v jest wartościowaniem rachunku Ł3. Powróćmy w końcu do formuły α, o której na mocy lematu 5(1) wiemy, że $\alpha \notin \Pi^{\alpha}$. Z definicji v wnioskujemy, że $v(\alpha) = 0$. Wskazaliśmy tym samym wartościowanie w Ł3 falsyfikujące formułę α, która nie jest wobec tego tautologią Ł3. Sprzeczność z założeniem kończy dowód ▪

Udowodnione w tym paragrafie twierdzenie o pełności dla trójwartościowego rachunku Łukasiewicza świadczy o identyczności porównywanych zbiorów tautologii i tez systemu Ł3. Obie konstrukcje – semantyczna (§ 2) i syntaktyczna (§ 3) – opisują ten sam rachunek zdań.

Rozdział V

Modalny rachunek zdań S4 Lewisa

System S4 jest reprezentantem licznej rodziny zdaniowych rachunków modalnych służących do analizy tzw. **modalności aletycznych**, czyli zwrotów: „możliwe, że ...", „konieczne, że ...". Do tej rodziny, choć nie bez zastrzeżeń (por. uwagi na str. 132), zaliczyć można również omówiony w poprzednim rozdziale trójwartościowy rachunek Łukasiewicza Ł3. Podana w Ł3 charakterystyka spójników modalnych (definiowalnych – jak się okazało – w terminach implikacji i negacji) nie ujawnia jednak ich cech swoistych.

Rachunek S4 jest jednym z pięciu systemów (S1 - S5), które wiąże się z nazwiskiem **C. I. Lewisa**, choć faktycznie był on twórcą dwóch spośród nich: S2 i S3. Celem, który mu przyświecał, było adekwatne sformalizowanie okresu warunkowego, a więc budowa rachunku logicznego, w którym implikacja zdawałaby sprawę z nieekstensjonalnych aspektów użycia spójnika „jeżeli ..., to ..." w języku naturalnym. Okazało się jednak, że rachunki te mogą być skutecznie wykorzystane do analizy modalności aletycznych i dzięki tej okoliczności ugruntowały swoją ważną pozycję w logice współczesnej.

Rachunek zwany S4 (od 1932 r.) został stworzony w wersji syntaktycznej przez **O. Beckera** w roku 1930, jako modyfikacja najwcześniejszego z systemów Lewisa: S3. Jeżeli idzie o sposób rozumienia spójnika konieczności w S4, można przyjąć za **E. J. Lemmonem**, że jest to stwierdzenie nieformalnej dowiedlności zdania na gruncie matematyki. W roku 1933 **K. Goedel** przedstawił S4 w postaci systemu aksjomatycznego będącego rozszerzeniem KRZ. W połowie lat sześćdziesiątych **S. Kripke** opracował dla S4 semantykę i udowodnił stosowne twierdzenie o pełności. Natomiast rozmaicie formułowane twierdzenia o dedukcji dla różnych wersji rachunku S4 udowodnili **R. Barcan, J. Zeman** i **J. Perzanowski**.

§ 1. Język S4

Rachunek zdaniowy S4 konstruowany jest z myślą o analizie modalności aletycznych, czyli zwrotów:

konieczne, że ...
możliwe, że ...

Pełnią one w zdaniach języka naturalnego rolę jednoargumentowych spójników zdaniowych. Aby móc poczynić jakiekolwiek obserwacje dotyczące sposobu używania tych zwrotów i ich własności, należy rozpatrywać je w kontekście innych spójników zdaniowych. Rozważaniami naszymi obejmiemy więc także dobrze nam już znane i analizowane w trzech dotychczas rozpatrywanych rachunkach logicznych zwroty:

... i ...
.... lub ...
jeżeli ..., to ...
nieprawda, że ...

Symboliczne odpowiedniki sześciu wymienionych spójników zdaniowych będą stałymi logicznymi w alfabecie języka rachunku S4:

Alfabet języka S4. Alfabet składa się z trzech następujących grup symboli:

(1) S t a ł e l o g i c z n e: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\Box$, $\Diamond$ zwane odpowiednio funktorami alternatywy, koniunkcji, implikacji, negacji, konieczności i możliwości.
(2) Z m i e n n e z d a n i o w e: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ tworzące zbiór przeliczalny.
(3) N a w i a s y: (,).

Jakie wyrażenia języka naturalnego odpowiadają poszczególnym symbolom tego alfabetu? Otóż wszystkie symbole alfabetu S4, które są równocześnie symbolami alfabetu KRZ, interpretujemy tak samo jak

na gruncie tego ostatniego rachunku (por. str. 31), natomiast funktorowi konieczności ($\Box$) odpowiada spójnik: „konieczne, że ...", a funktorowi możliwości ($\Diamond$) – spójnik „możliwe, że ...".

Definicja wyrażenia języka S4 WYRAŻENIEM JĘZYKA S4 JEST KAŻDY SKOŃCZONY CIĄG SYMBOLI ALFABETU TEGO JĘZYKA.

Wszystkie podane w § 1 rozdziału II przykłady wyrażeń KRZ są również przykładami wyrażeń S4. Natomiast skończone ciągi symboli, w których pojawiają się funktory modalne, jak np. $\Box(\rightarrow \Diamond \Diamond \wedge \vee)))$, $((p\Box \rightarrow \Diamond$ czy też $\Box \Diamond \Box \Diamond p$, są wyrażeniami S4 nie będąc przy tym wyrażeniami KRZ.

Definicja wyrażenia sensownego języka S4 WYRAŻENIEM SENSOWNYM JĘZYKA S4 JEST TAKIE I TYLKO TAKIE WYRAŻENIE TEGO JĘZYKA, KTÓRE ZOSTAŁO ZBUDOWANE ZGODNIE Z NASTĘPUJĄCYMI REGUŁAMI:

(1) KAŻDA POJEDYNCZA ZMIENNA ZDANIOWA JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM,
(2) JEŻELI α, β SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI, TO $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$, $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Podtrzymujemy umowę z § 1 rozdziału 1, zgodnie z którą:

1° małymi literami alfabetu greckiego oznaczamy poszczególne wyrażenia sensowne, elementy zbioru Σ_{S4};
2° dużymi literami alfabetu greckiego oznaczamy podzbiory zbioru Σ_{S4};
3° opuszczamy zewnętrzne nawiasy okalające całe formuły.

Porównując języki rachunków KRZ i S4 dochodzimy do wniosku, że $\Sigma_{KRZ} \subset \Sigma_{S4}$. Wszystkie przykłady formuł KRZ są zatem przykładami formuł S4. Natomiast $\Box(p \rightarrow q)$ czy $(\neg\Box p \rightarrow \Diamond \neg p)$ są przykładami takich formuł S4, które nie są wyrażeniami KRZ. Gdy z kolei porównamy język rachunku S4 z rozszerzoną wersją języka rachunku Ł3, wyciągniemy wniosek, że są one identyczne: $\Sigma^{+}_{Ł3} = \Sigma_{S4}$.

Ustalony sposób interpretacji symboli alfabetu S4 w języku naturalnym sprawia, że możliwe jest traktowanie formuł S4 jako schematów zdań języka naturalnego. „Tłumaczenie" zdań języka naturalnego na język S4 mające na celu prawidłowe rozpoznanie ich logicznej struktury przebiega dokładnie według wskazówek zawartych w § 1 rozdziału II (str. 32) i w § 1 rozdziału IV (str. 112).

§ 2. *Wartościowania w S4*

Analizowane w rachunku S4 spójniki modalne: „konieczne, że ...", „możliwe, że ..." są nieekstensjonalne. Wartości logiczne zdań złożonych utworzonych przy ich pomocy zależą nie tylko od wartości argumentów spójników modalnych, lecz także od treści tych argumentów. Działania spójników intensjonalnych nie można opisać żadną pojedynczą funkcją przeprowadzającą zbiór wszystkich układów wartości argumentów danego spójnika w zbiór złożony z wartości logicznych. Jeżeli więc podejmuje się próbę prawdziwościowej charakterystyki spójnika intensjonalnego, trzeba zastosować jeden z dwóch sposobów: pierwszy polega na zwiększeniu liczby wartościowań, od których uzależnia się wartość formuły zbudowanej z użyciem spójnika nieekstensjonalnego, drugi – na rozszerzeniu zbioru formuł współwyznaczających wartość takiej formuły. Metodę pierwszą wykorzystaliśmy w semantycznym opisie INT, metodę drugą – w semantycznej wersji rachunku Ł3.

W S4 odwołamy się do sposobu pierwszego i podobnie jak w rachunku INT posłużymy się koncepcją wiązki wartościowań. Wartościowania należące do tej samej wiązki wiąże relacja **R** zwrotna i przechodnia (por. uwagi na str. 72).

DEFINICJA WIĄZKI WARTOŚCIOWAŃ W S4 WIĄZKĄ WARTOŚCIOWAŃ W S4 NAZYWAMY KAŻDY PODZBIÓR W ZBIORU WSZYSTKICH ODWZOROWAŃ ZBIORU FORMUŁ Σ_{S4} W ZBIÓR $\{0, 1\}$, W KTÓRYM OKREŚLONA JEST RELACJA ZWROTNA I PRZECHODNIA **R**, A PONADTO DLA DOWOLNEGO ODWZOROWANIA $v \in W$ I DLA DOWOLNYCH FORMUŁ $\alpha, \beta \in \Sigma_{S4}$ SPEŁNIONE SĄ NASTĘPUJĄCE WARUNKI:

(1) $v(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{1}$ I $v(\beta) = \mathbf{1}$;
(2) $v(\alpha \vee \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{1}$ LUB $v(\beta) = \mathbf{1}$;
(3) $v(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{0}$ LUB $v(\beta) = \mathbf{1}$;
(4) $v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$ WTW, GDY $v(\alpha) = \mathbf{0}$;
(5) $v(\Box\alpha) = \mathbf{1}$ WTW, GDY DLA **DOWOLNEGO** ODWZOROWANIA w TAKIEGO, ŻE $v\mathbf{R}w$: $w(\alpha) = \mathbf{1}$;
(6) $v(\Diamond\alpha) = \mathbf{1}$ WTW, GDY DLA **PEWNEGO** ODWZOROWANIA w TAKIEGO, ŻE $v\mathbf{R}w$: $w(\alpha) = \mathbf{1}$.

Jeśli relacja **R** określona w danej wiązce wiąże wartościowanie v z wartościowaniem w: $v\mathbf{R}w$, wówczas wartościowanie w nazywamy pomocniczym wobec v.

Z treści definicji wiązki wyprowadzamy następujące wnioski:

1° charakterystyka prawdziwościowa funktorów: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ na gruncie rachunku S4 jest dokładnie taka sama jak w KRZ (por. definicja wartościowania w KRZ, str. 33). Funktory te mają opis ekstensjonalny, nie wykorzystujący wcale wartościowań pomocniczych.

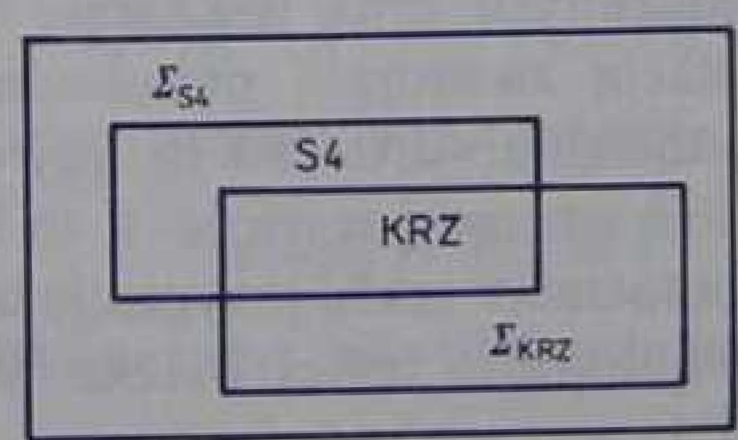
2° jednoznaczne określenie wiązki wartościowań W osiągniemy wskazując, w jaki sposób każde należące do tej wiązki wartościowanie ocenia poszczególne zmienne zdaniowe oraz jaka jest struktura wzajemnych powiązań relacją **R** poszczególnych elementów wiązki W. Aby dowieść jedyności tak określonej wiązki, należy posłużyć się indukcją z uwagi na złożoność formuły.

DEFINICJA TAUTOLOGII S4 JEŻELI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH Z KAŻDEJ WIĄZKI WARTOŚCIOWAŃ S4 JEST STAŁA I RÓWNA **1**, WÓWCZAS MÓWIMY, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ RACHUNKU S4.

Porównanie definicji tautologii na gruncie rachunków KRZ oraz S4 z jednej strony, a wniosek 1° wynikający z definicji wiązki wartościowań w S4 – z drugiej, bezpośrednio uzasadniają następujący

LEMAT 1 KAŻDA TAUTOLOGIA KRZ JEST RÓWNOCZEŚNIE TAUTOLOGIĄ RACHUNKU S4.

Na marginesie tego lematu odnotujmy, że zależność odwrotna nie zachodzi. Istnieją takie tautologie rachunku S4 (przykłady nastąpią), które nie są nawet wyrażeniami sensownymi KRZ, z uwagi na nieobecność w alfabecie języka tego rachunku symboli funktorów modalnych. Nasze dotychczasowe obserwacje ilustruje następujący diagram:



Porównując z kolei definicję wiązki wartościowań w rachunkach S4 oraz INT dochodzimy do wniosku, że konstrukcja wiązki na gruncie obu rachunków jest bardzo podobna z powodu identycznego określenia relacji **R** wiążącej wartościowania. To podobieństwo umożliwia interesujący „przekład" formuł języka INT na formuły języka rachunku S4. Jest nim odwzorowanie f: $\Sigma_{INT} \to \Sigma_{S4}$ spełniające następujące warunki:

gdy p jest dowolną zmienną zdaniową:

(1) $f(p) = \Box p$

gdy α, β są dowolnymi formułami INT:

(2) $f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$

(3) $f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$

(4) $f(\alpha \to \beta) = \Box(f(\alpha) \to f(\beta))$

(5) $f(\neg\alpha) = \Box\neg f(\alpha)$

Ta funkcja przekładająca pozwala wskazać w obrębie zbiorów tautologii obu rachunków formuły wzajem sobie odpowiadające:

LEMAT 2 FORMUŁA α JEST TAUTOLOGIĄ INT WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $f(\alpha)$ JEST TAUTOLOGIĄ S4.

Dowód. (I) Załóżmy, że α jest tautologią INT i przypuśćmy, że mimo to $f(\alpha)$ nie jest tautologią S4. Istnieje zatem W, wiązka wartościowań S4, oraz v, należące do niej wartościowanie takie, że: $v(f(\alpha)) = \mathbf{0}$. W wiązce W określona jest zwrotna i przechodnia relacja **R**. Konstruujemy teraz wiązkę wartościowań intuicjonistycznych $\overline{W}$ z relacją $\bar{\mathbf{R}}$ w ten sposób, że każdemu z wartościowań $v_k \in W$ przyporządkowujemy wartościowanie $\bar{v}_k \in \overline{W}$ spełniające następujące warunki:

(1) $\bar{v}_k(p) = v_k(\Box p)$ gdy p jest dowolną zmienną zdaniową

(2) $\bar{v}_m \bar{\mathbf{R}} \bar{v}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_m \mathbf{R}\, v_n$.

Jak wiemy, wiązka wartościowań intuicjonistycznych jest określona jednoznacznie, gdy poszczególne składające się na nią wartościowania zadamy na zbiorze zmiennych oraz wskażemy strukturę ich wzajemnych powiązań relacją zwrotną i przechodnią, która ponadto posiada własność przenoszenia wartości **1** (tj. gdy dowolne wartościowanie z wiązki przypisuje zmiennej wartość **1**, to każde wartościowanie względem niego pomocnicze także przypisuje tej zmiennej wartość **1**). Wykażemy, że zdefiniowana wyżej wiązka $\overline{W}$ spełnia warunek przenoszenia wartości **1**:

Załóżmy, w tym celu, że q jest dowolnie ustaloną zmienną, że $\bar{w} \in \overline{W}$ oraz że: $\bar{w}(q) = \mathbf{1}$. Załóżmy też dla dowodu niewprost, że istnieje $\bar{u}$, także należące do $\overline{W}$, pomocnicze względem $\bar{w}$, jednak $\bar{u}(q) = \mathbf{0}$. Z określenia wiązki $\overline{W}$ wnioskujemy, że w wiązce W wartościowań S4 istnieje wartościowanie w i pomocnicze względem niego wartościowanie u(w **R** u) takie, że $u(\Box q) = \mathbf{0}$. Zgodnie z punktem (5) definicji wiązki wartościowań S4 jest w wiązce W również pewne odwzorowanie t, pomocnicze względem u, takie, że: $t(q) = \mathbf{0}$. Ponieważ relacja **R** jest przechodnia, wartościowanie t jest pomocnicze także względem w; a zatem mamy: $w(\Box q) = \mathbf{0}$, co wobec sposobu określenia wiązki $\overline{W}$ oznacza, że $\bar{w}(q) = \mathbf{0}$. Sprzeczność z założeniem kończy argumentację.

Teraz, gdy mamy pewność, że $\overline{W}$ jest wiązką wartościowań intuicjonistycznych, wykażemy, posługując się indukcją z uwagi na złożoność formuły, że dla dowolnej formuły β ze zbioru Σ_{INT} i dowolnego odwzorowania $\bar{w} \in \overline{W}$:

(*) $$\bar{w}(\beta) = w(f(\beta))$$

(1) Załóżmy, że β jest dowolną zmienną zdaniową. Że w tym przypadku równość (*) zachodzi, wnioskujemy bezpośrednio z określenia wiązki $\overline{W}$ oraz punktu (1) definicji odwzorowania f.

(2) Załóżmy z kolei, że β ma postać koniunkcji $(\gamma \wedge \delta)$ oraz, że warunek (*) zachodzi dla obu czynników tej koniunkcji (założenie indukcyjne). Zachodzenie (*) dla koniunkcji uzasadniamy wówczas następującym rozumowaniem:

$$\bar{w}(\gamma \wedge \delta) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki w INT)

$$\bar{w}(\gamma) = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \bar{w}(\delta) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (założenie indukcyjne)

$$w(f(\gamma)) = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad w(f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki w S4)

$$w(f(\gamma)) \wedge f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja odwzorowania f)

$$w(f(\gamma \wedge \delta)) = \mathbf{1}.$$

(3) Załóżmy, że β ma postać alternatywy $(\gamma \vee \delta)$ — dowód jak w (2).

(4) Załóżmy, że β ma postać implikacji $(\gamma \rightarrow \delta)$ oraz, że warunek $(*)$ zachodzi dla γ i δ. Dalej argumentujemy następująco:

$$\bar{w}(\gamma \rightarrow \delta) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki w INT)

dla każdego $\bar{u}$ takiego, że $\bar{w}\,\bar{\mathbf{R}}\,\bar{u}$: $\bar{u}(\gamma) = \mathbf{0}$ lub $\bar{u}(\delta) = \mathbf{1}$

wtedy i tylko wtedy, gdy (założenie indukcyjne)

dla każdego u takiego, że $w\,\mathbf{R}\,u$: $u(f(\gamma)) = \mathbf{0}$ lub $u(f(\delta)) = \mathbf{1}$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

dla każdego u takiego, że $w\,\mathbf{R}\,u$: $u(f(\gamma) \rightarrow f(\delta)) = \mathbf{1}$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

$$w\big(\Box(f(\gamma) \rightarrow f(\delta))\big) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja odwzorowania f)

$$w(f(\gamma \rightarrow \delta)) = \mathbf{1}.$$

(5) Załóżmy, że β ma postać negacji $(\neg\gamma)$ – dowód jak w (4).

Ponieważ wykazaliśmy, że $(*)$ zachowuje ważność dla dowolnej formuły z Σ_{INT} i dowolnego wartościowania z wiązki $\overline{W}$, więc w szczególności $\bar{v}(\alpha) = v(f(\alpha)) = \mathbf{0}$. A zatem $\overline{W}$ jest taką wiązką wartościowań intuicjonistycznych, do której należy wartościowanie falsyfikujące α. Wniosek ten, sprzeczny z założeniem, kończy dowód części (I) lematu 2.

(II) Z kolei załóżmy, że formuła α ze zbioru Σ_{INT} nie jest tautologią intuicjonistyczną i przypuśćmy dla dowodu niewprost, że $f(\alpha)$ jest mimo to tautologią S4. Istnieje więc wiązka wartościowań intuicjonistycznych V i należące do niej wartościowanie v, takie, że $v(\alpha) = \mathbf{0}$. W wiązce V określona jest zwrotna i przechodnia relacja $\mathbf{R}$. Podejmujemy teraz próbę rekonstrukcji $\bar{V}$ wiązki wartościowań w S4, która obalałaby $f(\alpha)$. W tym celu określamy każde ze składających się na nią wartościowań na zbiorze zmiennych zdaniowych i definiujemy w niej strukturę wzajemnych powiązań między wartościowaniami przy pomocy relacji $\bar{\mathbf{R}}$ zwrotnej i przechodniej.

Niech dowolne wartościowanie $\bar{w}_k \in \bar{V}$ spełnia następujące warunki:

(1) $\bar{w}_k(p) = w_k(p)$ gdy p jest dowolną zmienną zdaniową

(2) $\bar{w}_m\,\bar{\mathbf{R}}\,\bar{w}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w_m\,\mathbf{R}\,w_n$

Podobnie jak w pierwszej części dowodu wykażemy teraz, że dla dowolnej formuły $\beta \in \Sigma_{INT}$ i dowolnego wartościowania $w \in V$ zachodzi:

$$(**) \qquad \bar{w}(f(\beta)) = w(\beta)$$

W dowodzie warunku $(**)$ posłużmy się indukcją z uwagi na złożoność formuły β:

(1) Załóżmy, że β jest dowolną zmienną zdaniową p:

$$\bar{w}(f(p)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja odwzorowania f)

$$\bar{w}(\Box p) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

dla każdego $\bar{u}$ takiego, że $\bar{w}\,\bar{\mathbf{R}}\,\bar{u}$: $\bar{u}(p) = \mathbf{1}$

wtedy i tylko wtedy, gdy (konstrukcja wiązki $\bar{V}$):

dla każdego u takiego, że $w\,\mathbf{R}\,u$: $u(p) = \mathbf{1}$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki INT i zwrotność $\mathbf{R}$)

$$w(p) = \mathbf{1}.$$

(2) Załóżmy z kolei, że β ma postać koniunkcji $(\gamma \wedge \delta)$ oraz, że warunek $(**)$ zachodzi dla obu czynników tej koniunkcji (założenie indukcyjne). Zachodzenie $(**)$ dla koniunkcji uzasadniamy następująco:

$$\bar{w}(f(\gamma \wedge \delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja odwzorowania f)

$$\bar{w}(f(\gamma) \wedge f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

$$\bar{w}(f(\gamma)) = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \bar{w}(f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (założenie indukcyjne)

$$w(\gamma) = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad w(\delta) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki INT)

$$w(\gamma \wedge \delta) = \mathbf{1}.$$

(3) Załóżmy, że β ma postać alternatywy $(\gamma \vee \delta)$ – dowód jak w (2).

(4) Załóżmy, że β ma postać implikacji $(\gamma \to \delta)$ i, że warunek (∗∗) zachodzi dla γ i δ. Dalej argumentujemy następująco:

$$\bar{w}(f(\gamma \to \delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja odwzorowania f)

$$\bar{w}\big(\Box(f(\gamma) \to f(\delta))\big) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

$$\text{dla każdego } \bar{u} \text{ takiego, że } \bar{w}\,\bar{\mathbf{R}}\,\bar{u}: \bar{u}(f(\gamma) \to f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki S4)

$$\text{dla każdego } \bar{u} \text{ takiego, że } \bar{w}\,\bar{\mathbf{R}}\,\bar{u}: \bar{u}(f(\gamma)) = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \bar{u}(f(\delta)) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (założenie indukcyjne)

$$\text{dla każdego } u \text{ takiego, że } w\,\mathbf{R}\,u: u(\gamma) = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad u(\delta) = \mathbf{1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy (definicja wiązki INT)

$$w(\gamma \to \delta) = \mathbf{1}.$$

(5) Załóżmy, że β ma postać negacji $(\neg\gamma)$ – dowód jak w (4).

Skoro warunek (∗∗) obowiązuje dla dowolnej formuły ze zbioru Σ_{INT} i dowolnego wartościowania należącego do wiązki V, więc w szczególności:

$$\bar{v}(f(\alpha)) = v(\alpha) = \mathbf{0}.$$

Wykazaliśmy tym samym, że formuła $f(\alpha)$ nie jest tautologią S4, ponieważ falsyfikuje ją wartościowanie $\bar{v}$ należące do skonstruowanej przez nas wiązki $\bar{V}$. Sprzeczność z założeniem kończy dowód lematu 2 ●

Jedyną metodą rozstrzygania problemu tautologiczności formuł rachunku S4 jest metoda niewprost. Sposób tabelkowy nie może mieć

w S4 zastosowania z tych samych względów, które przesądziły o jego nieprzydatności w rachunku INT. A zatem, poszukując odpowiedzi na pytanie – czy dane wyrażenie sensowne języka S4 jest tautologią tego rachunku? – podejmujemy próbę rekonstrukcji takiej wiązki wartościowań, do której należy wartościowanie falsyfikujące badaną formułę. Punktem wyjścia dla metody niewprost jest założenie nietautologiczności sprawdzanego wyrażenia sensownego. Rozumowanie, które prowadzimy, może albo zakończyć się niesprzecznie – potwierdzeniem hipotezy i wskazaniem wiązki obalającej, albo sprzecznie – przypisaniem pewnej formule przez jedno i to samo wartościowanie dwóch różnych wartości: **0** i **1**.

Jeśli każda z możliwych prób rekonstrukcji wiązki obalającej zakończy się sprzecznością, to hipotezę odrzucamy, a badaną formułę uznajemy za tautologię. Przebieg rozumowania zapisujemy w diagramach podobnych do stosowanych w dotychczas omówionych rachunkach, szczególnie w INT. Reguły konstrukcji tych diagramów wynikają bezpośrednio z definicji wiązki wartościowań S4 i są następujące:

(K 1)

w

1	0
$\alpha \wedge \beta$	
α	
β	

(K 0)

w

	1	0
		$\alpha \wedge \beta$
1.		α
2.		β

(A 1)

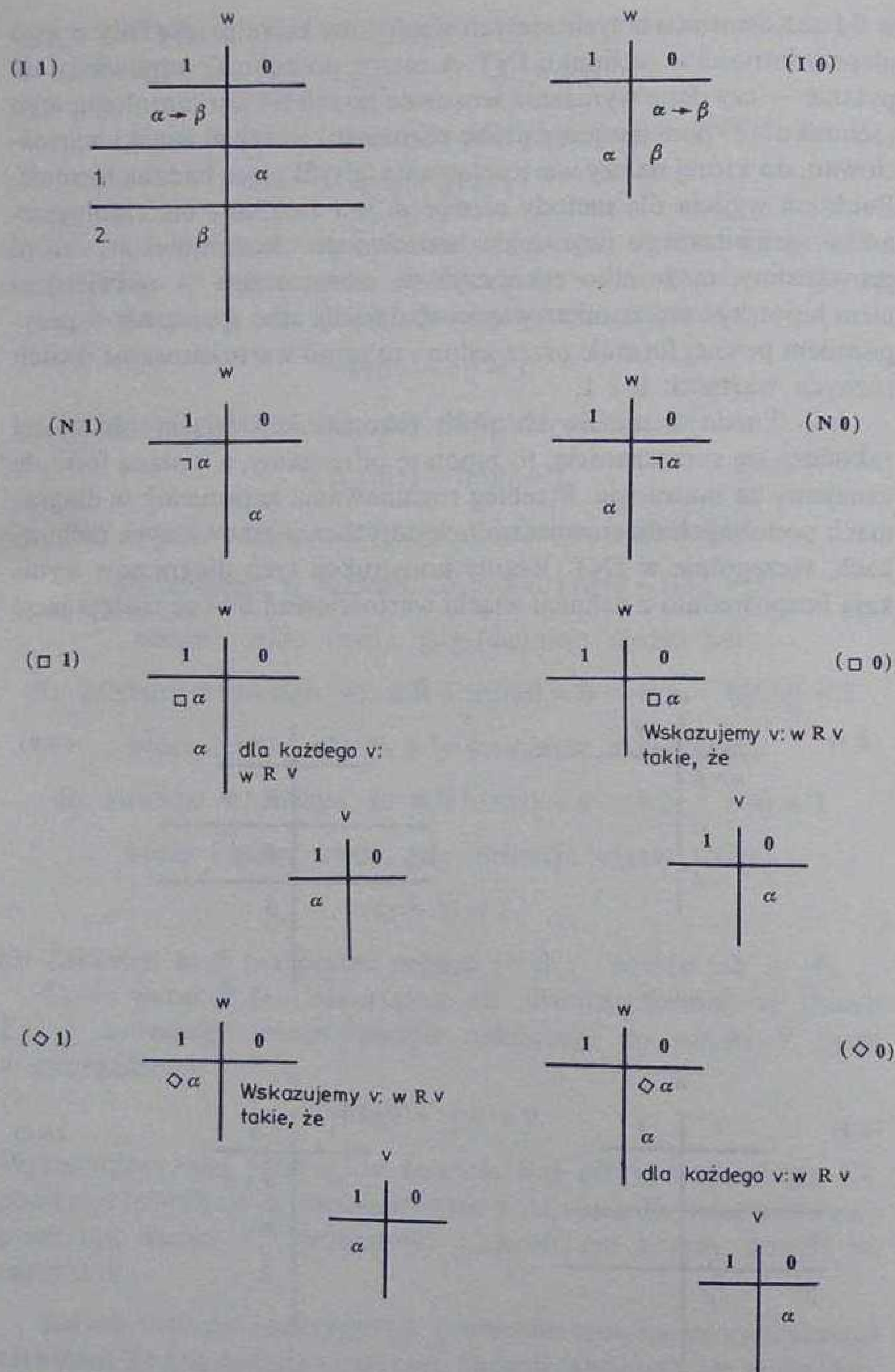
w

	1	0
	$\alpha \vee \beta$	
1.	α	
2.	β	

(A 0)

w

1	0
	$\alpha \vee \beta$
	α
	β

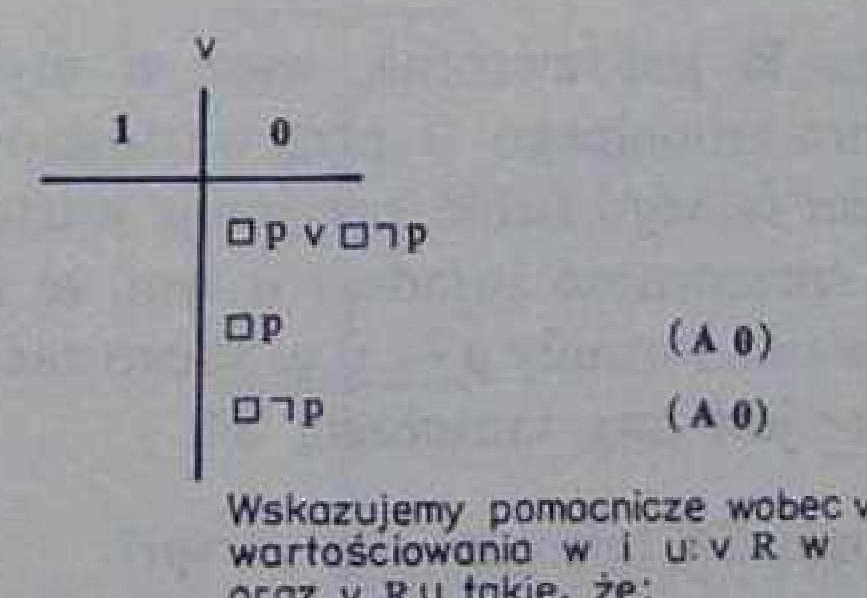


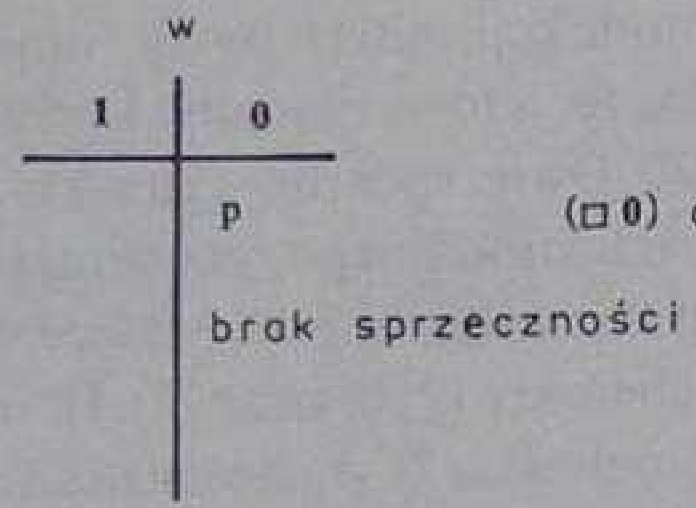
Reguły dotyczące koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji są dokładnie takie same jak te, które rządziły konstrukcją diagramów w KRZ (por. str. 38 - 39). Dwie spośród czterech pozostałych reguł, specyficznych dla rachunku modalnego, zawierają dyrektywę rozszerzenia wiązki o nowe wartościowanie, pomocnicze względem aktualnie rozpatrywanego. Są to schematy (□ **0**) oraz (◊ **1**), oparte odpowiednio na punktach (5) i (6) definicji wiązki wartościowań w S4. Reguły (□ **1**) i (◊ **0**) nie postulują włączania nowych wartościowań pomocniczych, lecz wskazują jedynie, w jaki sposób wartościowania pomocnicze już istniejące dziedziczą oceny argumentów funktorów modalnych. W diagramach opisujących poszczególne wartościowania S4 obowiązują ogólne zasady poszukiwania i wskazywania sprzeczności, opisane w § 2 rozdziału II (str. 42).

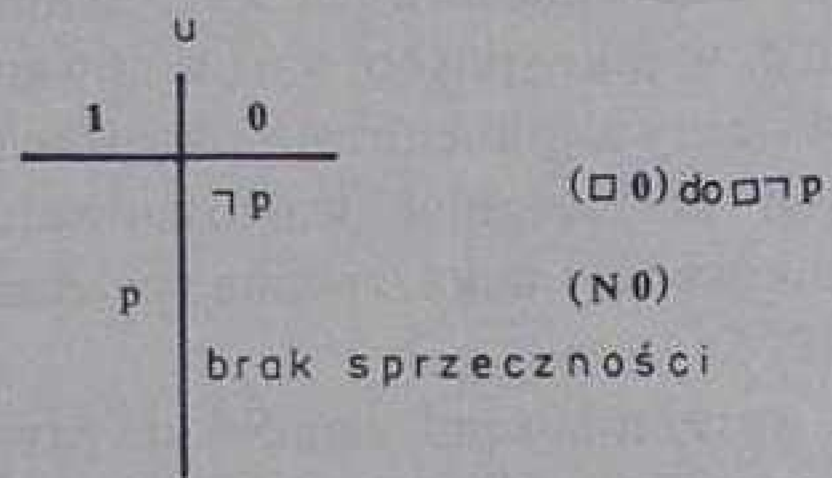
Jak pamiętamy, wyrażenia sensowne S4 nie zawierające funktorów modalnych są równocześnie elementami zbioru Σ_{KRZ}. Sprawdzanie takich formuł przebiega identycznie jak w KRZ. W przykładach, które zilustrują stosowanie opisanej metody w rachunku S4, ograniczymy się więc wyłącznie do sprawdzania formuł skonstruowanych przy użyciu funktorów modalnych: konieczności i możliwości.

Ponieważ $\Sigma_{S4} = \Sigma^{+}_{Ł3}$, wykorzystamy nadarzającą się okazję porównania zbiorów tautologii rachunku S4 i modalnej wersji Ł3. W przykładach posłużymy się tymi samymi formułami, które analizowaliśmy w § 2 rozdziału IV (por. str. 133). A zatem:

(1) Czy jest tautologią S4 formuła □**p** ∨ □¬**p**?
Załóżmy, że nie jest. Istnieje zatem wartościowanie v przypisujące badanej formule wartość **0**:

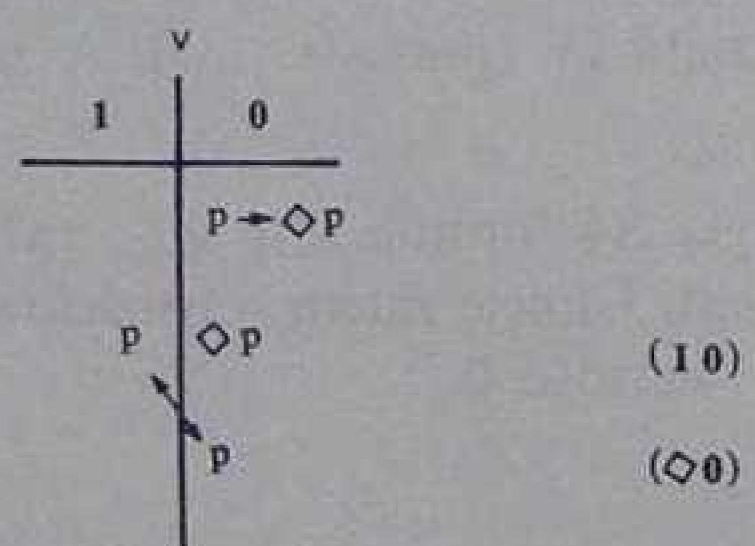






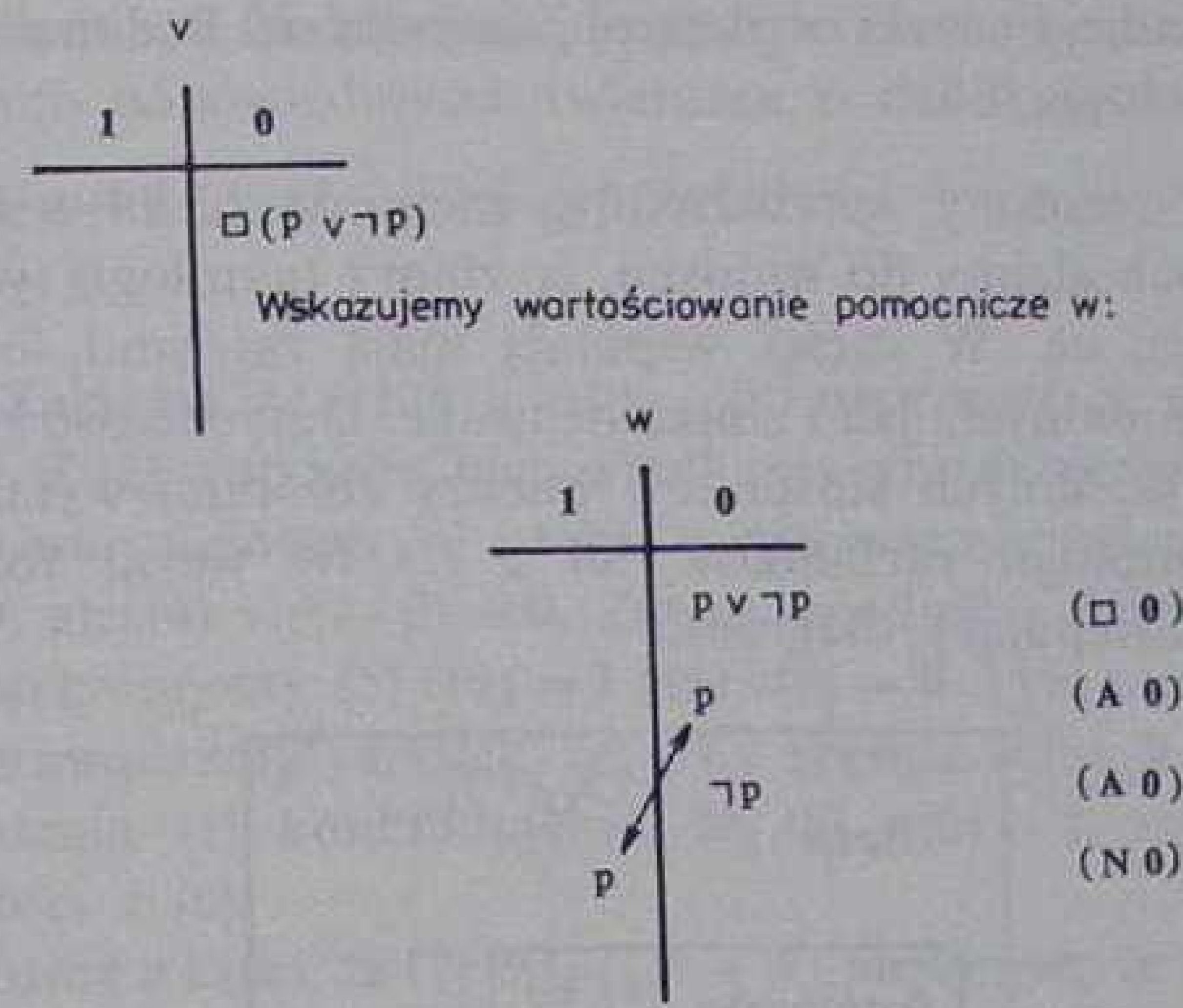
Brak sprzeczności w obu diagramach dla wartościowań pomocniczych względem v oznacza, że sprawdzana formuła: **□p ∨ □¬p** nie jest tautologią S4. Falsyfikuje ją wartościowanie v ze zrekonstruowanej wiązki {v, w, u}.

(2) Czy jest tautologią S4 formuła **p → ◊ p**?
Załóżmy, że nie:



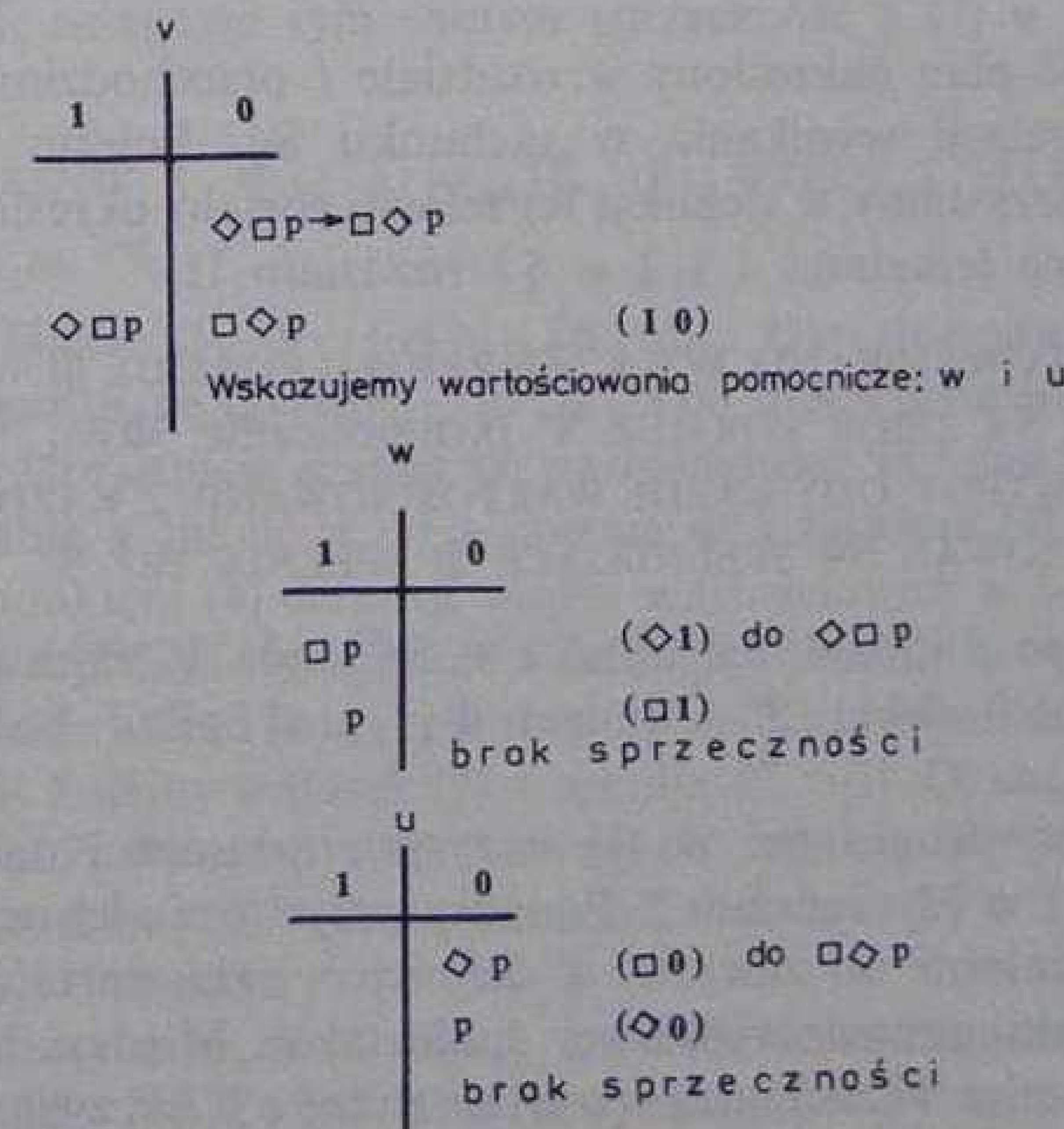
Ponieważ relacja **R** jest zwrotna, więc w myśl reguły (◊ **0**) argument funktora modalnego ◊ przy wartościowaniu v, pomocniczym względem samego siebie, przyjmuje wartość **0**. Zaznaczona w diagramie sprzeczność świadczy o tym, że nie powiodła się próba sfalsyfikowania formuły **p → ◊ p**. Skoro zaś wiązka obalająca nie istnieje – jest ona tautologią S4.

(3) Czy jest tautologią S4 formuła **□(p ∨ ¬p)**?
Załóżmy, że nie:



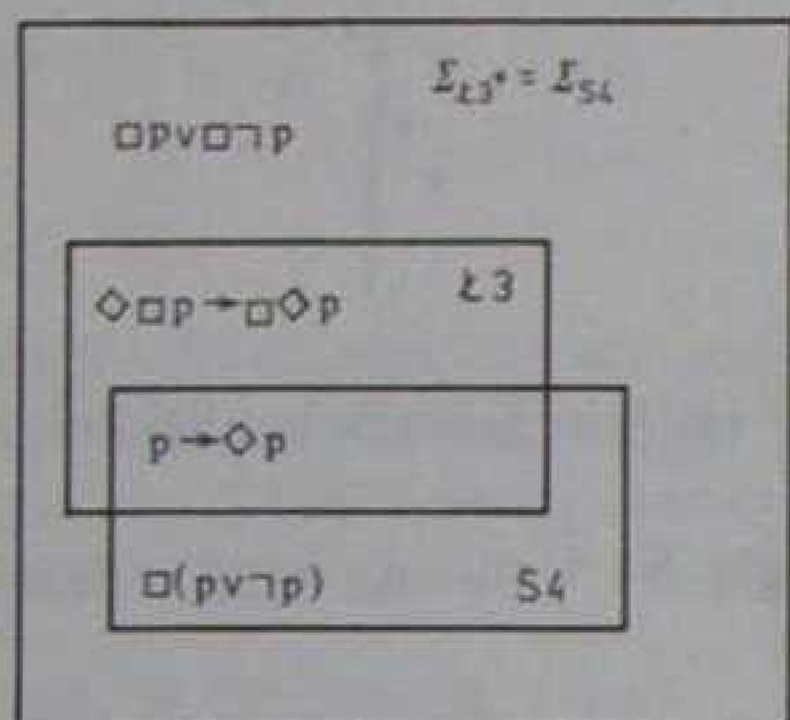
Formuła **□(p ∨ ¬p)** jest tautologią rachunku S4.

(4) Czy jest tautologią S4 formuła **◊ □p → □ ◊ p**?
Załóżmy, że nie:



Rekonstrukcja wiązki obalającej powiodła się. Badana formuła nie jest tautologią S4.

Porównując rezultaty sprawdzeń w rachunkach S4 i Ł3 (wersja modalna) dochodzimy do wniosku, że zbiory tautologii tych rachunków krzyżują się. W części wspólnej mają zarówno formuły bez funktorów modalnych, jak i zmodalizowane. Dotychczasowe ustalenia w kwestii wzajemnych stosunków między zbiorami wyrażeń sensownych i tautologii rachunków S4 i Ł3 (w wersji rozszerzonej) prezentuje następujący diagram:



Realizując plan nakreślony w rozdziale I przechodzimy teraz do omówienia relacji wynikania w rachunku S4. Pojęcie spełniania, z którego korzystamy w definicji tej relacji, zostało określone i scharakteryzowane lematami 1 i 2 w §2 rozdziału II.

Definicja wynikania w S4 Ze zbioru formuł Φ wynika na gruncie S4 zbiór formuł Ψ (symbolicznie: $\Phi \models_{S4} \Psi$) wtedy i tylko wtedy, gdy każde wartościowanie z każdej wiązki wartościowań S4 spełniające Φ spełnia też Ψ.

Fakt, że ze zbioru Φ nie wynika w S4 zbiór Ψ, zapisujemy przy użyciu symboli: $\Phi \not\models_{S4} \Psi$. Zamiast $\Phi \models_{S4} \{\alpha\}$ pisać będziemy po prostu $\Phi \models_{S4} \alpha$.

Relacja wynikania ma w S4 wszystkie własności ogólne ujęte w lematy 3-7 w §2 rozdziału I. Ponadto przysługują jej pewne cechy specyficzne, zależne od zawartej w definicji wiązki wartościowań S4 charakterystyki prawdziwościowej funktorów. Między innymi na gruncie rachunku S4 zachodzą wszystkie znane z KRZ związki między relacją wynikania a funktorami implikacji i negacji, noszące nazwę semantycznych odpowiedników twierdzeń o dedukcji:

Twierdzenie 1 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{S4} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{S4} \alpha \to \beta$.

Dowód. (I) Załóżmy, że (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{S4} \beta$ i niewprost, że mimo to (2) $\Phi \not\models_{S4} \alpha \to \beta$. Z (2) wobec definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje taka wiązka wartościowań W i takie w niej wartościowanie v, że (3) v spełnia Φ, ale (4) $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{0}$. Zatem, zgodnie z definicją wiązki (punkt (3)) otrzymujemy: (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$ i (6) $v(\beta) = \mathbf{0}$. Tym samym, wobec (3) i (5) wyprowadzamy wniosek, że: (7) v spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$. Stąd wobec założenia (1) konkludujemy, że (8) $v(\beta) = \mathbf{1}$, co pozostaje w sprzeczności z (6).

(II) Załóżmy z kolei, że (1) $\Phi \models_{S4} \alpha \to \beta$ i niewprost, że mimo to (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{S4} \beta$. Z (2) wobec definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje taka wiązka wartościowań W oraz takie należące do niej wartościowanie v, że (3) spełnia $\Phi \cup \{\alpha\}$, a jednocześnie (4) $v(\beta) = \mathbf{0}$. Z (3) wynika, że (5) v spełnia Φ oraz (6) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Z (4), (6) i punktu (3) definicji wiązki wartościowań w S4 wnosimy, że (7) $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{0}$. Natomiast z (1) i (5) wobec definicji wynikania wnioskujemy, że (8) $v(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}$, osiągając tym samym sprzeczność z (7) •

Twierdzenie 2 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{S4} \neg\alpha$.

Dowód. (I) Niech (1) $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$. Dla dowodu niewprost załóżmy ponadto, że (2) $\Phi \not\models_{S4} \neg\alpha$. Z (2) na mocy definicji wynikania wnioskujemy, że istnieje wiązka W wartościowań S4 i należące do niej wartościowanie v takie, że (3) v spełnia Φ a zarazem (4) $v(\neg\alpha) = \mathbf{0}$. Zgodnie z punktem (4) definicji wiązki wartościowań w S4 wnosimy, że (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Z (3) i (5), zgodnie z definicją spełniania, wynika, że (6) v spełnia $\Phi \cup \{\alpha\}$. Stąd jednak, wobec (1), definicja wynikania pozwala wyprowadzić kolejny wniosek (7) v spełnia $\{\beta, \neg\beta\}$. Oznacza to, że (8) $v(\beta) = \mathbf{1}$, a także (9) $v(\neg\beta) = \mathbf{1}$. Z uwagi na definicję wiązki (punkt (4)) i (9) mamy: (10) $v(\beta) = \mathbf{0}$. Sprzeczność między (8) a (10) kończy pierwszą część dowodu.

(II) Załóżmy teraz, że (1) $\Phi \models_{S4} \neg\alpha$, a dla dowodu niewprost, że (2) $\Phi \cup \{\alpha\} \not\models_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$. Z (2) i definicji wynikania w S4 wnioskujemy, że istnieje wiązka wartościowań W i należące do niej wartościowanie v takie, że (3) v spełnia zbiór $\Phi \cup \{\alpha\}$. Posługując się lematem 1 dowiedzionym w §2 rozdziału I, wyprowadzamy wniosek, że (4) v spełnia Φ oraz (5) $v(\alpha) = \mathbf{1}$. Na podstawie (1) i (4) stwierdzamy, odwołując się znów do definicji wynikania, że (6) $v(\neg\alpha) = \mathbf{1}$. Skoro tak, to z definicji wiązki wartościowań S4 mamy: (7) $v(\alpha) = \mathbf{0}$, co pozostaje w sprzeczności z (5) i kończy dowód twierdzenia •

TWIERDZENIE 3 $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \models_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \models_{S4} \alpha$.

Dowód twierdzenia 3 przebiega w pełni analogicznie do dowodu twierdzenia 2.

Kolej teraz na charakterystykę reguł wnioskowania w rachunku S4. Uwagi na temat reguł w ogóle i reguł elementarnych w szczególności znajdują się w §2 rozdziału I i były już kilkakrotnie przypominane.

DEFINICJA REGUŁY NORMALNEJ S4 REGUŁA JEST NORMALNA NA GRUNCIE S4 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ PARY $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$ NALEŻĄCEJ DO TEJ REGUŁY ZACHODZI WYNIKANIE: $\Phi \models_{S4} \alpha$.

By ustalić, czy konkretne reguły elementarne o przesłankach i wnioskach ze zbioru Σ_{S4} są regułami normalnymi w S4, stosujemy tę samą metodę sprawdzania, co w KRZ (por. str. 45-47). Reguły analizowane w przykładach z §2 rozdziału II w identyczny sposób badamy na gruncie S4 uzyskując analogiczne rozstrzygnięcia. Natomiast z porównania definicji wartościowania w KRZ z definicją wiązki wartościowań w rachunku S4 wynika następujący ogólny wniosek:

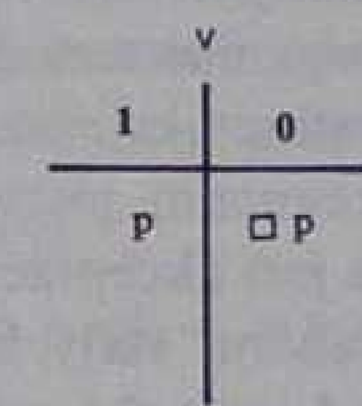
LEMAT 3 KAŻDA REGUŁA NORMALNA W KRZ JEST TEŻ REGUŁĄ NORMALNĄ W S4.

DEFINICJA REGUŁY NIEZAWODNEJ S4 REGUŁA JEST NA GRUNCIE S4 NIEZAWODNA WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA KAŻDEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$ ZAWSZE WTEDY, GDY Φ JEST ZBIOREM TAUTOLOGII S4, FORMUŁA α JEST RÓWNIEŻ TAUTOLOGIĄ TEGO RACHUNKU.

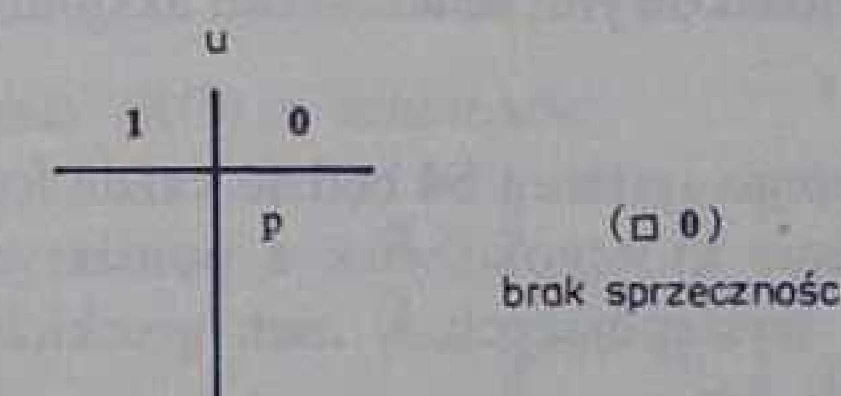
Przykładem reguły niezawodnej w S4 jest między innymi reguła podstawiania zdefiniowana w §2 rozdziału II. Niezawodna w tym rachunku okazuje się również elementarna reguła o schemacie:

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

zwana **regułą Goedla (RGd).** Otóż reguła ta nie jest normalna w S4. Należy do niej para $\langle p, \Box p\rangle$, dla której $p \not\models_{S4} \Box p$, o czym świadczy następująca wiązka wartościowań S4:



istnieje wówczas wartościowanie u pomocnicze względem v:



Aby przekonać się, że reguła Goedla nie będąc normalną jest jednak niezawodną na gruncie S4, przeprowadzimy następujące krótkie rozumowanie:

Niech α będzie tautologią S4, a mimo to $\Box\alpha$ nie jest tautologią. Stąd wnioskujemy, że istnieje taka wiązka wartościowań S4 i takie w niej wartościowanie w, że: $w(\Box\alpha) = \mathbf{0}$. W myśl definicji wiązki w S4 jest w W wartościowanie u pomocnicze względem w takie, że: $u(\alpha) = \mathbf{0}$. Tym samym formuła α okazuje się nie-tautologią — sprzeczność.

Zgodnie z twierdzeniem 1 z §2 rozdziału I, każda reguła normalna w pewnym rachunku jest w nim niezawodna. Rozważana wyżej reguła Goedla jest świadectwem nieodwracalności tego twierdzenia w rachunku S4.

§ 3. System aksjomatyczny S4

Rachunek S4 w wersji semantycznej akceptował ekstensjonalność spójników zdaniowych: „... i ...", „... lub ...", „jeżeli ..., to ...", „nieprawda, że ..." i nie naruszał intuicji wiązanych z tymi zwrotami w klasycznym rachunku zdań. Dzięki temu rachunek S4, nadbudowany niejako nad KRZ, w zbiorze swych tautologii zawiera wszystkie tautologie klasyczne (por. lemat 1 w §2 tego rozdziału).

Żeby zamierzone ujęcie syntaktyczne S4 pozostawało w analogicznym stosunku do syntaktycznej wersji KRZ, każda teza rachunku klasycznego musiałaby być również tezą S4. Rezultat taki najłatwiej osiągnąć zakładając, że wszystkie aksjomaty i reguły pierwotne KRZ są zarazem aksjomatami i regułami pierwotnymi S4. Podstawą dla przyjęcia takiego rozwiązania jest akceptacja identycznego rozumienia w obu rachunkach wspólnych im stałych logicznych.

Ale w alfabecie języka rachunku S4 występują jeszcze dwie dalsze stałe logiczne – funktory modalne: $\Box$ i $\Diamond$. Ich formalną charakterystykę wyrazimy dodatkowymi schematami aksjomatów i dodatkową regułą pierwotną.

Aksjomatem naszego systemu S4 będzie każda formuła powstająca przez uszczegółowienie któregokolwiek z poniższych schematów, tj. wpisanie w miejsce występujących w nich greckich liter dowolnych wyrażeń sensownych S4:

S c h e m a t y   a k s j o m a t ó w   S4

Ax. 1	$\alpha \to (\beta \to \beta)$	
Ax. 2	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	sylogizm hipotetyczny
Ax. 3	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	prawo komutacji
Ax. 4	$(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$	prawo skracania
Ax. 5	$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 6	$(\alpha \wedge \beta) \to \beta$	prawo pochłaniania dla $\wedge$
Ax. 7	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$	prawo mnożenia następników
Ax. 9	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 9	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	prawo pochłaniania dla $\vee$
Ax. 10	$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$	prawo dodawania poprzedników
Ax. 11	$(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$	mocne prawo kontrapozycji
Ax. 12″	$\Box\alpha \to \alpha$	
Ax. 13	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	prawo rozdzielności $\Box$ wzgl. $\to$
Ax. 14	$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$	
Ax. 15	$\Diamond\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$	
Ax. 16	$\neg\Box\neg\alpha \to \Diamond\alpha$.	

Aksjomatykę S4 tworzy nieskończenie wiele formuł, z których każda jest uszczegółowieniem jednego z podanych wyżej schematów aksjomatów. Tak więc aksjomatami opartymi na schemacie Ax. 12″ będą między innymi następujące wyrażenia sensowne S4:

$$\Box p \to p$$

$$\Box\neg(p \wedge q) \to \neg(p \wedge q)$$

$$\Box\Diamond(p \to \Box q) \to \Diamond(p \to \Box q)$$

Nasz system aksjomatyczny rachunku S4 przewiduje dwie reguły pierwotne:

(1) **regułę odrywania** (RO) o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

w którą wyposażone były wszystkie dotychczas rozważane systemy aksjomatyczne oraz

(2) **regułę Goedla** (RGd) o schemacie:

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

DEFINICJA TEZY S4 WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO S4 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha(\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST
ALBO (1) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW S4,

ALBO (2) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA LUB REGUŁY GOEDLA.

Sposób zapisu dowodów w systemie S4 nie różni się od przyjętego w poprzednio omówionych rachunkach. Przykładowe dowody, zarówno tez jak i ich schematów, sporządzone w § 3 rozdziału II są równocześnie dowodami w systemie aksjomatycznym S4.

Poniewaz w skład aksjomatyki S4 wchodza wszystkie schematy aksjomatów KRZ, a wśród reguł pierwotnych S4 znajduje się jedyna reguła pierwotna KRZ, oczywisty jest następujący lemat, ogólnie rozstrzygający problem stosunku zbiorów tez systemów S4 i KRZ:

LEMAT 4 KAŻDY SCHEMAT TEZ KRZ JEST TAKŻE SCHEMATEM TEZ S4.

Z lematu 4 wynika natychmiast jego szczegółowa wersja: Każda teza KRZ jest tezą S4. Odnotujmy zatem, że między innymi T 1 - T 12 udowodnione w § 3 rozdziału II są schematami tez S4, chociaż w tym momencie za poprawne w systemie aksjomatycznym S4 możemy uznać tylko dowody T 1 i T 2.

Zastanawiając się w § 3 rozdziału I nad różnymi możliwościami wzbogacania asortymentu środków dowodowych ustaliliśmy, że:

1° do każdego dowodu można wpisać dowolną wcześniej udowodnioną formułę (tezę), oraz

2° można włączać do dowodu nowe wiersze stosując w tym celu nie tylko pierwotne, lecz także tzw. w y p r o w a d z a l n e reguły systemu. Przypomnijmy stosowne definicje:

DEFINICJA RELACJI DOWIEDLNOŚCI W S4 FORMUŁA α JEST DOWIEDLNA W S4 ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{d-S4} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST

ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (założeniem),

ALBO (2) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW S4,

ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA LUB REGUŁY GOEDLA.

DEFINICJA REGUŁY WYPROWADZALNEJ W S4 REGUŁA JEST WYPROWADZALNA W SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM S4 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \vdash_{d-S4} \alpha$.

Te względy, które przesądziły o prawdziwości lematu 4, czynią teraz, w świetle przytoczonych definicji, oczywistym również następujący

LEMAT 5 SCHEMAT KAŻDEJ ELEMENTARNEJ REGUŁY WYPROWADZALNEJ W KRZ JEST TAKŻE SCHEMATEM REGUŁY WYPROWADZALNEJ W S4.

A zatem regułami wyprowadzalnymi w S4 są między innymi cztery reguły znane nam z KRZ:

(RKom) $\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$ Reguła komutacji

(RPI) $\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma\end{array}}{\alpha \to \gamma}$ Reguła przechodniości implikacji

(RP) $\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$ Reguła poprzedzania

(PRO) $\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to (\beta \to \gamma) \\ \alpha \to \beta\end{array}}{\alpha \to \gamma}$ Poprzedzona reguła odrywania

Z chwilą wzbogacenia zestawu środków dowodowych naszego systemu aksjomatycznego S4 o wyliczone wyżej reguły wyprowadzalne, również dowody schematów tez T 3 - T 12 (por. str. 54 - 57) uznajemy za poprawne na gruncie S4.

Specyficzną regułą wyprowadzalną w systemie S4 jest tzw. **poprzedzona reguła Goedla (PRGd)** o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \alpha \to \Box\alpha\end{array}}{\alpha \to \Box\beta}$$

Uzasadniając wyprowadzalność tej reguły wykazujemy, że:

$$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \Box\alpha\} \vdash_{d\text{-}S4} \alpha \to \Box\beta$$

1.	$\alpha \to \beta$	założenie
2.	$\alpha \to \Box\alpha$	założenie
3.	$\Box(\alpha \to \beta)$	RGd1
4.	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	Ax. 13
5.	$\Box\alpha \to \Box\beta$	RO 4, 3
6.	$(\alpha \to \Box\alpha) \to ((\Box\alpha \to \Box\beta) \to (\alpha \to \Box\beta))$	Ax. 2 $\beta/\Box\alpha$, $\gamma/\Box\beta$
7.	$(\Box\alpha \to \Box\beta) \to (\alpha \to \Box\beta)$	RO 6, 2
8.	$\alpha \to \Box\beta$	RO 7, 5

Wyposażeni w tezy odziedziczone po KRZ (por. lemat 4) i wspomniane reguły wyprowadzalne, możemy stosunkowo łatwo dowodzić w systemie S4 również schematów tez specyficznych dla tego rachunku. Oto przykłady:

(T22) $\alpha \to \Diamond\alpha$

1.	$\Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	Ax. 12″ $\alpha/\neg\alpha$
2.	$(\Box\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\Box\neg\alpha)$	T6 $\alpha/\Box\neg\alpha$, β/α
3.	$\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$	RO 2, 1
4.	$\neg\Box\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	Ax. 16
5.	$\alpha \to \Diamond\alpha$	RPI 3, 4

(T23) $\neg\Diamond\alpha \to \Box\neg\alpha$

1.	$\neg\Box\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	Ax. 16
2.	$(\neg\Box\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to (\neg\Diamond\alpha \to \Box\neg\alpha)$	T8 $\alpha/\Box\neg\alpha$, $\beta/\Diamond\alpha$
3.	$\neg\Diamond\alpha \to \Box\neg\alpha$	RO 2, 1

(T24) $\neg\Box\alpha \to \Diamond\neg\alpha$

1.	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	T4
2.	$\Box(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	RGd 1
3.	$\Box(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\Box\neg\neg\alpha \to \Box\alpha)$	Ax. 13 $\alpha/\neg\neg\alpha$, β/α
4.	$\Box\neg\neg\alpha \to \Box\alpha$	RO 3, 2
5.	$(\Box\neg\neg\alpha \to \Box\alpha) \to (\neg\Box\alpha \to \neg\Box\neg\neg\alpha)$	T7 $\alpha/\Box\neg\neg\alpha$, $\beta/\Box\alpha$
6.	$\neg\Box\alpha \to \neg\Box\neg\neg\alpha$	RO 5, 4
7.	$\neg\Box\neg\neg\alpha \to \Diamond\neg\alpha$	Ax. 16 $\alpha/\neg\alpha$
8.	$\neg\Box\alpha \to \Diamond\neg\alpha$	RPI 6, 7

Przenieśmy z kolei na grunt systemu aksjomatycznego S4 koncepcję relacji inferencji:

Definicja relacji inferencji w S4 Formuła α jest inferowalna w S4 ze zbioru formuł Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{S4} \alpha$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg wyrażeń sensownych $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, którego ostatnim wyrazem jest α ($\gamma_k = \alpha$) i w którym dowolny wyraz jest

albo (1) elementem zbioru Φ (założeniem),

albo (2) tezą S4 (w szczególności – aksjomatem opartym na którymś ze schematów aksjomatów S4),

albo (3) powstaje z poprzedzających go wyrazów ciągu przez zastosowanie reguły odrywania, reguły Goedla, bądź dowolnej reguły wyprowadzalnej w S4.

Zdefiniowana tu relacja inferencji posiada wszystkie własności wymienione w lematach 1-4 w §3 rozdziału I. Przypomnijmy je w odpowiedniej dla omawianego rachunku stylizacji:

Lemat 6 (i) $\Phi \vdash_{d\text{-}S4} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \vdash_{S4} \alpha$;
(ii) $\varnothing \vdash_{S4} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą S4;
(iii) $\Phi \vdash_{S4} \Phi$;
(iv) Jeśli $\Phi \vdash_{S4} \Psi$ oraz $\Psi \vdash_{S4} \Omega$, to $\Phi \vdash_{S4} \Omega$;
(v) Jeśli $\Phi \vdash_{S4} \alpha$ oraz $\Phi \subset \Psi$, to $\Psi \vdash_{S4} \alpha$;

W KRZ relacja inferencji miała jeszcze własności szczególne, opisane w tzw. twierdzeniach o dedukcji wprost i niewprost. Można byłoby się spodziewać, że w rachunku S4 nadbudowanym nad KRZ twierdzenia te zachowują swą ważność. Tymczasem okazuje się, że w postaci znanej z KRZ są one na gruncie S4 niedowiedlne. Jak wiemy, implikacja i negacja charakteryzowane są w S4 tak samo jak w KRZ. Przyczyny, dla której nie można twierdzeń o dedukcji przenieść na teren S4, należy więc upatrywać w sposobie zdefiniowania w tym rachunku relacji inferencji. Dokładniej mówiąc, powodem tym jest zaliczenie reguły Goedla do zbioru reguł pierwotnych tego rachunku. Potrafimy natomiast udowodnić pewne ograniczone wersje tych twierdzeń, przypominające sposobem stylizacji ograniczone twierdzenie o dedukcji wprost z rachunku Ł3 (por. twierdzenie 4 z §3 rozdziału IV).

Twierdzenie 4 (o dedukcji wprost – ograniczone)
Jeżeli $\alpha \to \Box\alpha$ jest tezą S4 i $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{S4} \beta$, to $\Phi \vdash_{S4} \alpha \to \beta$.

Dowód. Załóżmy, że $\alpha \to \Box\alpha$ jest tezą S4 oraz, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{S4} \beta$. Zgodnie z definicją relacji $\vdash_{S4}$ istnieje skończony ciąg formuł uzasadniający tę inferencję. W tym ciągu formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tworzące zbiór Ψ, a zawarte w Φ, pełnią rolę założeń. A zatem: $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{S4} \beta$. Wobec lematu 6(i) wnioskujemy, że $\Psi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-S4} \beta$. Istnieje więc skończony ciąg Π: $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ w którym $\gamma_k = \beta$, uzasadniający dowiedlność β ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$. Ciąg Π zbudowany jest wyłącznie przy użyciu pierwotnych środków dowodowych. Tworzymy następnie nowy ciąg formuł Ω:

$$(\Omega) \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha \to \Box\alpha, \alpha \to \gamma_1, \alpha \to \gamma_2, \ldots, \alpha \to \gamma_k$$

i wykazujemy posługując się indukcją ze względu na budowę ciągu Π, że Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Dowód należy prowadzić tak samo jak dowód twierdzenia o dedukcji wprost dla KRZ (por. str. 58-59) uzupełniając go wszakże następującym punktem:

(4) Formuła γ_m znalazła się w ciągu Π jako wynik zastosowania reguły Goedla do pewnej formuły γ_s, dla której $s < m$. Załóżmy dla indukcji, że obecność w ciągu Ω formuły $\alpha \to \gamma_s$ została już uzasadniona. Ponieważ w ciągu dowodowym znalazła się formuła $\alpha \to \Box\alpha$ (będąca, zgodnie z założeniem twierdzenia, tezą S4), możemy uzasadnić obecność formuły $\alpha \to \gamma_m$ w ciągu Ω powołaniem się na wyprowadzalną w S4 poprzedzoną regułę Goedla.

Wykazaliśmy tym samym, że $\Psi \vdash_{S4} \alpha \to \beta$. Dowodem zachodzenia tej inferencji jest skonstruowany wyżej ciąg Ω. Ponieważ $\Psi \subset \Phi$, zatem, zgodnie z lematem 6(v), również $\Phi \vdash_{S4} \alpha \to \beta$ •

Ograniczenia nałożonego w S4 na twierdzenie o dedukcji wprost nie da się pominąć. Świadczy o tym następujący

Kontrprzykład 1 Jest oczywiste, że $\{p\} \vdash_{S4} \Box p$. Inferencję tę uzasadnia dwuelementowy ciąg formuł:

1.	p	założenie
2.	$\Box p$	RGd 1

Natomiast formuła $p \to \Box p$, nie będąc tautologią (co Czytelnik

winien samodzielnie sprawdzić), nie jest także – wobec twierdzenia o pełności (por. dalej, § 4, tego rozdziału) – tezą tego rachunku.

Również twierdzenia o dedukcji niewprost obowiązują w S4 pod warunkiem, że formuła $\alpha \to \Box\alpha$ jest tezą. Dowody tych twierdzeń przebiegają dokładnie tak samo jak ich analogonów w KRZ, poprzestaniemy zatem wyłącznie na przytoczeniu ich wypowiedzi:

Twierdzenie 5 (słabe o dedukcji niewprost – ograniczone)
Jeżeli $\alpha \to \Box\alpha$ jest tezą S4 i $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$, to $\Phi \vdash_{S4} \neg\alpha$.

Twierdzenie 6 (mocne o dedukcji niewprost – ograniczone)
Jeżeli $\alpha \to \Box\alpha$ jest tezą S4 i $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$, to $\Phi \vdash_{S4} \alpha$.

W KRZ relacji inferencji przysługiwała jeszcze jedna istotna dla dowodu twierdzenia o pełności własność (ujęta w lemat 2 z § 3 rozdziału II). Mianowicie, jeśli pewna formuła γ jest inferowalna z dwóch formuł α, β (z każdej z nich z osobna), to można ją wyinferować także z alternatywy owych formuł ($\{\alpha \vee \beta\} \vdash_{KRZ} \gamma$). Relacja inferencji w S4 nie posiada tej własności. Rozważmy bowiem kolejny

Kontrprzykład 2 Na gruncie S4 potrafimy uzasadnić dwie następujące inferencje:

I. $\{p\} \vdash_{S4} \Box p \vee \Box\neg p$

1.	p	założenie
2.	$\Box p$	RGd 1
3.	$\Box p \to (\Box p \vee \Box\neg p)$	Ax. 8 $\alpha/\Box p$, $\beta/\Box\neg p$
4.	$\Box p \vee \Box\neg p$	RO 3, 2

II. $\{\neg p\} \vdash_{S4} \Box p \vee \Box\neg p$

1.	$\neg p$	założenie
2.	$\Box\neg p$	RGd 1
3.	$\Box\neg p \to (\Box p \vee \Box\neg p)$	Ax. 9 $\alpha/\Box p$, $\beta/\Box\neg p$
4.	$\Box p \vee \Box\neg p$	RO 3, 2

Formuła $p \vee \neg p$, będąc tezą KRZ (T 16), jest – wobec lematu 4 również tezą S4. Gdyby zatem z $p \vee \neg p$ inferowalna była formuła $\Box p \vee \Box\neg p$, należałoby ją także uznać za tezę S4. Wiemy jednak z przykładu (1), że $\Box p \vee \Box\neg p$ nie jest tautologią S4. Wnioskujemy stąd, zważywszy na twierdzenie o pełności dla S4 (por. dalej, §4 tego rozdziału), że nie jest ona tezą omawianego rachunku, a w konsekwencji, że: $p \vee \neg p \nVdash_{S4} \neg p \vee \Box \neg p$.

W związku z powyższą obserwacją wprowadzimy i scharakteryzujemy pewne słabsze pojęcie: **relację inferencji derywacyjnej**. Jak się okaże, będzie ona bardzo przydatna w dowodzie twierdzenia o pełności dla S4. Definicję relacji inferencji derywacyjnej poprzedzimy odpowiednio zmodyfikowanymi definicjami relacji dowiedlności i reguły wyprowadzalnej.

Definicja relacji dowiedlności derywacyjnej w S4 Formuła α jest derywacyjnie dowiedlna w S4 ze zbioru formuł Φ (symbolicznie: $\Phi \Vdash_{d-S4} \alpha$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, którego ostatnim wyrazem jest $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ i w którym dowolny wyraz jest

albo (1) elementem zbioru Φ (założeniem),

albo (2) aksjomatem opartym na jednym ze schematów aksjomatów S4,

albo (3) powstaje z poprzedzających go wyrazów tego ciągu przez zastosowanie reguły odrywania.

Definicja ta różni się od definicji relacji dowiedlności w S4 tylko sformułowaniem punktu (3). Zgodnie z dyrektywą w nim zawartą, przy konstruowaniu ciągu uzasadniającego dowiedlność derywacyjną pewnej formuły wolno korzystać wyłącznie z reguły odrywania. Wyklucza się tym samym możliwość stosowania drugiej reguły pierwotnej systemu – tj. reguły Goedla.

Definicja reguły derywacyjnie wyprowadzalnej w S4 Reguła jest derywacyjnie wyprowadzalna w systemie aksjomatycznym S4 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej należącej do niej pary $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \Vdash_{d-S4} \alpha$.

Obie przytoczone tu definicje pozwalają wnioskować, że:

Lemat 7 Schemat każdej elementarnej reguły wyprowadzalnej w KRZ jest także schematem elementarnej reguły derywacyjnie wyprowadzalnej w S4.

Regułami derywacyjnie wyprowadzalnymi w S4 są zatem między innymi **reguła komutacji, reguła poprzedzania, reguła przechodniości implikacji i poprzedzona reguła odrywania**. Natomiast wyprowadzalnej w S4 poprzedzonej reguły Goedla nie można zaliczyć do zbioru reguł derywacyjnie wyprowadzalnych, gdyż w uzasadnieniu jej wyprowadzalności korzysta się w sposób istotny z reguły Goedla wykluczonej spośród środków uzasadniania derywacyjnej dowiedlności.

Definicja relacji inferencji derywacyjnej w S4 Formuła α jest derywacyjnie inferowalna w S4 ze zbioru formuł Φ (symbolicznie: $\Phi \Vdash_{S4} \alpha$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg wyrażeń sensownych $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, którego ostatnim wyrazem jest $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ i w którym dowolny wyraz jest

albo (1) elementem zbioru Φ (założeniem),

albo (2) tezą S4 (w szczególności – aksjomatem opartym na którymś ze schematów aksjomatów S4),

albo (3) powstaje z poprzedzających go wyrazów ciągu przez zastosowanie reguły odrywania, bądź dowolnej reguły derywacyjnie wyprowadzalnej w S4.

Relacja inferencji derywacyjnej, w porównaniu ze zwykłą relacją inferencji w S4, znacznie ogranicza regułowe środki dowodowe, dopuszczając wyłącznie korzystanie z reguły odrywania i reguł wyprowadzalnych derywacyjnie.

Jak każda relacja inferencji, również relacja inferencji derywacyjnej ma wszystkie własności, o których była mowa w §3 rozdziału I, a które niniejszym przypominamy:

Lemat 8 (i) $\Phi \Vdash_{d-S4} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \Vdash_{S4} \alpha$;
(ii) $\varnothing \Vdash_{S4} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą S4;
(iii) $\Phi \Vdash_{S4} \Phi$;
(iv) Jeśli $\Phi \Vdash_{S4} \Psi$ oraz $\Psi \Vdash_{S4} \Omega$, to $\Phi \Vdash_{S4} \Omega$;
(v) Jeśli $\Phi \Vdash_{S4} \alpha$ oraz $\Phi \subset \Psi$, to $\Psi \Vdash_{S4} \alpha$.

Dla relacji inferencji derywacyjnej prawdziwe są wszystkie trzy twierdzenia o dedukcji w wersji znanej Czytelnikowi z KRZ. Ich dowody, takie same jak w KRZ, pomijamy, odsyłając Czytelnika pragnącego je ponownie prześledzić na str. 58-60.

Twierdzenie 7 (o dedukcji wprost)
Jeżeli $\Phi \cup \{\alpha\} \Vdash_{S4} \beta$, to $\Phi \Vdash_{S4} \alpha \rightarrow \beta$.

TWIERDZENIE 8 (O DEDUKCJI NIEWPROST — SŁABE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \Vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$, TO $\Phi \Vdash_{S4} \neg\alpha$.

TWIERDZENIE 9 (O DEDUKCJI NIEWPROST — MOCNE)
JEŻELI $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \Vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$, TO $\Phi \Vdash_{S4} \alpha$.

Co więcej, dla relacji inferencji derywacyjnej prawdziwy okazuje się

LEMAT 9 JEŚLI $\Phi \cup \{\alpha\} \Vdash_{S4} \gamma$ ORAZ $\Phi \cup \{\beta\} \Vdash_{S4} \gamma$, TO TAKŻE $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \Vdash_{S4} \gamma$.

Dowód tego lematu należy przeprowadzić dokładnie tak samo jak w KRZ (por. lemat 2 z § 3 rozdziału II).

§ 4. *Twierdzenie o pełności dla S4*

Przekonamy się teraz, że semantyczny (§ 2) i syntaktyczny (§ 3) opis rachunku S4 wyróżniają dokładnie ten sam zbiór formuł:

TWIERDZENIE 10 (O PEŁNOŚCI DLA S4) DLA DOWOLNEGO WYRAŻENIA SENSOWNEGO α JĘZYKA S4; α JEST TEZĄ S4 WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TAUTOLOGIĄ S4.

Dowód. (I) Uzasadnimy najpierw fakt, że każda teza S4 jest tautologią tego rachunku. Zgodnie z uwagami zawartymi w § 4 rozdziału I wystarczy wykazać, że:

1° każdy schemat aksjomatów S4 jest schematem tautologii S4 — (tę część dowodu pozostawiamy Czytelnikowi) oraz, że

2° obie reguły pierwotne aksjomatycznego systemu S4 są niezawodne. W § 2 rozdziału II wykazaliśmy, że reguła odrywania jest regułą normalną w KRZ. A zatem, wobec lematu 3, jest to również reguła normalna w S4. Jej niezawodność w tym rachunku wynika z twierdzenia 1 (§ 2 rozdziału I). Natomiast dowód niezawodności reguły Goedla przedstawiliśmy w § 2 rozdziału V.

Uznając w tym momencie część I dowodu twierdzenia o pełności za zakończoną, przypomnijmy udowodnione w § 4 rozdziału I twierdzenie Assera; wypowiemy je teraz w wersji stosownej dla relacji inferencji derywacyjnej w rachunku S4.

TWIERDZENIE 11 (O RELATYWNYCH NADSYSTEMACH ZUPEŁNYCH DLA S4)
JEŻELI FORMUŁA α NIE JEST DERYWACYJNIE INFEROWALNA Z Ω, TO ISTNIEJE TAKI ZBIÓR FORMUŁ S4 Π^{α}_{Ω}, ŻE:
(1) $\alpha \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(2) JEŻELI $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta$, TO $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$;
(3) JEŻELI $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \Vdash_{S4} \alpha$;
(4) $\Omega \subset \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Dowód tej szczegółowej wersji twierdzenia o relatywnych nadsystemach zupełnych pomijamy, odsyłając Czytelnika szukającego wskazówek dowodowych do § 4 rozdziału I.

Zbiór Π^{α}_{Ω}, którego istnienie postuluje się w twierdzeniu 11, na gruncie rachunku S4, posiada szereg innych, nie wspomnianych w tym twierdzeniu, specyficznych własności:

LEMAT 10 (1) $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(2) $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ ORAZ $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(3) $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(4) $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ WTW, GDY $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ LUB $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(5) JEŚLI $\Box\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$
(6) JEŚLI $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, TO $\Diamond\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

Dowód. (1-i) Załóżmy, że $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i niewprost, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Z definicji relacji inferencji derywacyjnej: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta\}$. Schematem tez S4 jest na mocy lematu 4 prawo przepełnienia (T 9). Zachodzi więc w myśl lematu 8(ii), (v): $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$. Skoro jednak zachodzi inferencja $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \{\beta, \neg\beta, \beta \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)\}$, więc także, na mocy reguły odrywania: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \alpha$. Ostatni wniosek pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 11(1).

(1-ii) Załóżmy, że $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i niewprost: $\neg\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wobec twierdzenia 11(3) wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \Vdash_{S4} \alpha$, a także: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\neg\beta\} \Vdash_{S4} \alpha$. Lemat 9 pozwala dalej wnioskować, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \neg\beta\} \Vdash_{S4} \alpha$. Formuła $\beta \vee \neg\beta$ jako schemat tez KRZ (T 16) jest również (por. lemat 4) schematem tez S4. Zgodnie z lematem 8(ii) (v): $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \vee \neg\beta$, co na mocy twierdzenia 11(2) oznacza $\beta \vee \neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. A zatem: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \neg\beta\} = \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wykazaliśmy więc, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \alpha$, skąd, znowu stosując twierdzenie 11(2) wnioskujemy, że $\alpha \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i dochodzimy do sprzeczności z twierdzeniem 11(1).

(2-i) Załóżmy, że $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Zgodnie z definicją relacji inferencji derywacyjnej: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \wedge \gamma$. Odwołując się do Ax. 5, Ax. 6 i reguły odrywania możemy wnioskować, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta$ oraz $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \gamma$, co w myśl twierdzenia 11(2) oznacza, że zarówno $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, jak i $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(2-ii) Załóżmy teraz, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Oznacza to, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \{\beta, \gamma\}$. Stosując regułę poprzedzania, która wobec lematu 7 jest regułą derywacyjnie wyprowadzalną w S4, wnioskujemy, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \rightarrow \gamma$. Zgodnie z lematem 8(ii), (v) oraz lematem 4 również T1 $(\beta \rightarrow \beta)$ oraz Ax. 7 $\big((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \big((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \wedge \gamma))\big)\big)$ są derywacyjnie inferowalne ze zbioru Π^{α}_{Ω}. A zatem zachodzi inferencja: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \{\beta \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \beta, \big((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \big((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow (\beta \wedge \gamma))\big)\big)\}$. Stosując regułę odrywania wyprowadzamy stąd wniosek: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \wedge \gamma$, co na mocy twierdzenia 11(2) oznacza, że $\beta \wedge \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(3-i) Załóżmy, że $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i przyjmijmy niewprost, że zarówno $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ jak i $\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Na mocy twierdzenia 11(3) wynika stąd, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta\} \Vdash_{S4} \alpha$ oraz $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\gamma\} \Vdash_{S4} \alpha$. Stąd i z lematu 9 wynika, że: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \gamma\} \Vdash_{S4} \alpha$. Z uwagi na przyjęte założenie: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \cup \{\beta \vee \gamma\} = \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, a zatem $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \alpha$. Wobec twierdzenia 11(2) stwierdzamy, że: $\alpha \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, a to jest sprzeczne z punktem (1) tego twierdzenia.

(3-ii) Należy rozważyć dwa przypadki:

(A) Niech $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Zatem $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta$. Stosując Ax. 8 i regułę odrywania, wykazujemy, że: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \vee \gamma$, co w myśl twierdzenia 11 (2) oznacza, że $\beta \vee \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(B) Załóżmy, że $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Argumentacja analogiczna jak w (A) z wykorzystaniem Ax. 9.

(4-i) Załóżmy, że $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ oraz niewprost, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i $\gamma \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Z założeń tych wynika, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \{\beta, \beta \rightarrow \gamma\}$. A więc również $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \gamma$, co wobec twierdzenia 11(2) oznacza że $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. To ostatnie stwierdzenie pozostaje w sprzeczności z drugą częścią założenia niewprost.

(4-ii) Rozważyć należy dwa przypadki:

(A) Gdy $\beta \notin \Pi^{\alpha}_{\Omega}$, to wobec punktu (1) dowodzonego właśnie lematu: $\neg\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Oznacza to, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \neg\beta$. Zastosowanie reguły komutacji do prawa przepełnienia (T9) (jest ono tezą S4 wobec lematu 4), pozwala uznać, że: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Stosując regułę odrywania

wykazujemy, że: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \rightarrow \gamma$, co z uwagi na twierdzenie 11(2) oznacza, że $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(B) Niech $\gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Zatem: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \gamma$. Znane z KRZ prawo symplifikacji (T2) $(\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ będąc wobec lematu 4 schematem tez S4, jest – zgodnie z lematem 8 – inferowalne z Π^{α}_{Ω}. Stosując regułę odrywania otrzymujemy: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta \rightarrow \gamma$, a to, zgodnie z twierdzeniem 11(2), oznacza, że: $\beta \rightarrow \gamma \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(5) Załóżmy, że $\Box\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wynika stąd, że $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \Box\beta$. Schemat Ax. 12″ i reguła odrywania pozwalają dalej wnioskować, że zachodzi inferencja derywacyjna: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \beta$. A zatem, w myśl twierdzenia 11(2): $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$.

(6) Załóżmy, że $\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$. Wyprowadzamy stąd wniosek, że formuła β jest derywacyjnie inferowalna ze zbioru Π^{α}_{Ω}. Ponieważ schematem tez S4 jest (T22) $(\beta \rightarrow \Diamond\beta)$, stosując regułę odrywania wnioskujemy, że: $\Pi^{\alpha}_{\Omega} \Vdash_{S4} \Diamond\beta$. Korzystając z twierdzenia 11(2) konkludujemy, że $\Diamond\beta \in \Pi^{\alpha}_{\Omega}$ i kończymy dowód lematu 10.

Dla dowolnego zbioru Φ formuł rachunku S4 zdefiniujemy teraz zbiór $K(\Phi)$ składający się wyłącznie z tych formuł β, które poprzedzone funktorem konieczności $(\Box\beta)$ należą do zbioru Φ:

(df. $K(\Phi)$) $\qquad K(\Phi) =^{df} \{\beta : \Box\beta \in \Phi\}$

Powróćmy po tym przygotowaniu do II części dowodu twierdzenia o pełności. Wykazujemy w niej, że każda tautologia S4 jest tezą naszego systemu aksjomatycznego tego rachunku.

(II) Załóżmy, że α jest tautologią S4, a mimo to α nie jest tezą aksjomatycznego systemu S4. A zatem: $\varnothing \not\Vdash_{S4} \alpha$, co wynika z założenia niewprost i lematu 8(ii). Zgodnie z twierdzeniem 11 istnieje więc stosowny nadzbiór $\Pi^{\alpha}_{\varnothing}$ zbioru $\varnothing$ (dalej oznaczany Π^{α}) o własnościach wymienionych w punktach (1)-(4) tego twierdzenia i w punktach (1)-(6) lematu 10.

Weźmy teraz pod uwagę zbiór $K(\Pi^{\alpha})$. Z lematu 10(5) i df. $K(\Phi)$ wnioskujemy, że $K(\Pi^{\alpha}) \subset \Pi^{\alpha}$. Z twierdzenia 11(1) i (2) wynika, że $\Pi^{\alpha} \not\Vdash_{S4} \alpha$. W oparciu o lemat 8(v) konkludujemy, że również $K(\Pi^{\alpha}) \not\Vdash_{S4} \alpha$.

Utwórzmy z kolei rodzinę zbiorów $\mathbf{\Pi}$, do której zaliczymy wyłącznie takie zbiory formuł, które zostały utworzone zgodnie z następującymi dwoma warunkami:

(df. Π) 1. $\Pi^{\alpha} \in \Pi$

2. jeśli $\Phi \in \Pi$ oraz $K(\Phi) \not\Vdash_{S4} \beta$, to $\Pi^{\beta}_{K(\Phi)} \in \Pi$

Każdy element z rodziny Π spełnia wszystkie warunki zarówno twierdzenia 11, jak i lematu 10.

Z każdym zbiorem Φ należącym do rodziny Π wiążemy odwzorowanie $v_{\Phi}: \Sigma_{S4} \to \{0, 1\}$ zdefiniowane, jak następuje:

(df. v_{Φ})

$$v_{\Phi}(\beta) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad \beta \in \Phi \\ 0 & \quad \beta \notin \Phi \end{cases}$$

Wszystkie te odwzorowania tworzą rodzinę V_{Π}. W tej rodzinie odwzorowań określamy relację pomocniczości $\mathbf{R}$:

(df. $\mathbf{R}$) $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Psi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $K(\Phi) \subset \Psi$

Wykażemy w tym miejscu, że relacja $\mathbf{R}$ jest w zbiorze V_{Π} zwrotna i przechodnia:

Z w r o t n o ś ć. Należy wykazać, że dla dowolnego wartościowania v_{Φ} z rodziny V_{Π}: $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Phi}$. Załóżmy, że $\beta \in K(\Phi)$. Z określenia K wynika, że $\Box\beta \in \Phi$. Oczywiste jest, że $\Phi \Vdash_{S4} \Box\beta$. Jeżeli wziąć pod uwagę Ax. 12″, to korzystając z reguły odrywania możemy wnioskować, że $\Phi \Vdash_{S4} \beta$. A zatem, wobec twierdzenia Assera (2): $\beta \in \Phi$. Pokazaliśmy tym samym, że prawdziwa jest inkluzja $K(\Phi) \subset \Phi$ świadcząca o zwrotności relacji $\mathbf{R}$.

P r z e c h o d n i o ś ć. Należy wykazać, że: jeśli $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Psi}$ oraz $v_{\Psi}\, \mathbf{R}\, v_{\Omega}$, to $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Omega}$. Załóżmy więc, że prawdziwe są oba poprzedniki. Oznacza to w myśl określenia $\mathbf{R}$, że zachodzą inkluzje: $K(\Phi) \subset \Psi$ oraz $K(\Psi) \subset \Omega$. Załóżmy też, że $\beta \in K(\Phi)$. Stąd i z określenia K wnioskujemy, że $\Box\beta \in \Phi$. Korzystając z twierdzenia 11(2) i z Ax. 14 ($\Box\beta \to \Box\Box\beta$) wyprowadzamy dalej wniosek, że $\Box\Box\beta \in \Phi$. A zatem z określenia K mamy $\Box\beta \in K(\Phi)$, a w konsekwencji $\Box\beta \in \Psi$. Ponownie korzystając z określenia K ustalamy, że $\beta \in K(\Psi)$ i ostatecznie, że $\beta \in \Omega$. Udowodniliśmy tym samym, że zachodzi inkluzja $K(\Phi) \subset \Omega$, co oznacza zgodnie z definicją $\mathbf{R}$, że $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Omega}$.

W końcu wykażemy, że rodzina odwzorowań V_{Π} z relacją $\mathbf{R}$ jest wiązką wartościowań S4. Powinniśmy w tym celu sprawdzić, że każde odwzorowanie z V_{Π} spełnia wszystkie warunki wymienione w definicji wiązki wartościowań S4. Dowód ten, gdy chodzi o warunki (1)-(4) jest łatwy i Czytelnikowi nie przysporzy żadnych trudności. Dla przykładu

wykażemy więc tylko, że dowolne odwzorowanie z V_{Π} spełnia warunek (4) wspomnianej definicji i zajmiemy się trudniejszymi w dowodzie warunkami (5) i (6).

W a r u n e k (4). Załóżmy, że $v_{\Phi}(\neg\beta) = 1$. Stąd i z określenia odwzorowania v_{Φ} wnioskujemy, że $\neg\beta \in \Phi$. Z lematu 10(1), wobec faktu, że zbiór Φ należy do rodziny Π, wnosimy, że $\beta \notin \Phi$, a skoro tak, to ponownie korzystając z określenia v_{Φ} ustalamy, że $v_{\Phi}(\beta) = 0$. Ponieważ kolejne człony tego rozumowania można powiązać spójnikiem „wtedy i tylko wtedy, gdy”, zatem dowolny element zbioru Π istotnie spełnia warunek (4).

W a r u n e k (5). (A) Załóżmy, że $v_{\Phi}(\Box\beta) = 1$. Znaczy to, że do rodziny Π należy zbiór Φ taki, że $\Box\beta \in \Phi$. Rozważmy dowolne wartościowanie $v_{\Psi} \in V_{\Pi}$, takie, że $v_{\Phi}\, \mathbf{R}\, v_{\Psi}$. Z określenia relacji $\mathbf{R}$ wynika, że $K(\Phi) \subset \Psi$, gdzie Ψ jest również zbiorem z rodziny Π. Korzystając z założenia i df. $K(\Phi)$ wnioskujemy, że $\beta \in K(\Phi)$, a więc także $\beta \in \Psi$. A zatem zgodnie z określeniem wartościowania $v_{\Psi}(\beta) = 1$ dla dowolnego odwzorowania v_{Ψ} pomocniczego względem v_{Φ}.

(B) Załóżmy z kolei, że dla dowolnego odwzorowania v_{Ψ} z rodziny Π pomocniczego względem v_{Φ} zachodzi: $v_{\Psi}(\beta) = 1$. Musi wówczas zachodzić warunek: $K(\Phi) \Vdash_{S4} \beta$, bowiem gdyby tak nie było, z mocy punktu (2) określenia rodziny Π należałby do niej zbiór $\Pi^{\beta}_{K(\Phi)}$, który (por. twierdzenie 11(1) i (4)) posiadałby następujące własności: $\beta \notin \Pi^{\beta}_{K(\Phi)}$ oraz $K(\Phi) \subset \Pi^{\beta}_{K(\Phi)}$, a więc istniałoby (z uwagi na określenie odwzorowania v_{Φ} i relacji pomocniczości $\mathbf{R}$) odwzorowanie $v_{\Pi^{\beta}_{K(\Phi)}}$ pomocnicze względem v_{Φ}, które formule β przypisuje wartość 0. To jednak byłoby sprzeczne z założeniem, że wszystkie wartościowania pomocnicze przypisują formule β wartość 1. Musi więc być tak, że:

$$K(\Phi) \Vdash_{S4} \beta.$$

Istnieje zatem skończony ciąg formuł $\delta_1, \ldots, \delta_m$ uzasadniający tę derywacyjną inferencję. Występuje w nim skończenie wiele założeń pochodzących ze zbioru $K(\Phi)$: $\delta_{z_1}, \ldots, \delta_{z_k}$. Ciąg formuł $\delta_1, \ldots, \delta_m$ uzasadnia zatem również inferencję derywacyjną: $\{\delta_{z_1}, \ldots, \delta_{z_k}\} \Vdash_{S4} \beta$. Stąd i z twierdzenia 7 możemy wywnioskować, że: $\Vdash_{S4} \delta_{z_1} \to (\ldots(\delta_{z_k} \to \beta)\ldots)$, co oznacza z uwagi na lemat 8(ii), że formuła $\delta_{z_1} \to (\ldots(\delta_{z_k} \to \beta)\ldots)$ jest tezą S4. Także formuła $\Box(\delta_{z_1} \to (\ldots(\delta_{z_k} \to \beta)\ldots))$ uzyskana z poprzedniej na mocy reguły Goedla jest tezą S4. Korzystając z tej informacji możemy wykazać (powołując się k-krotnie na Ax. 13 i regułę odrywania), że zachodzi inferencja derywacyjna:

$$\{\Box\delta_{z_1},...,\Box\delta_{z_k}\} \Vdash_{S4} \Box\beta$$

Ponieważ $\{\delta_{z_1},...,\delta_{z_k}\} \subset K(\Phi)$, więc zgodnie z określeniem $K(\Phi)$ mamy $\{\Box\delta_{z_1},...,\Box\delta_{z_k}\} \subset \Phi$. Z dotychczasowych ustaleń lemat 8 (v) pozwala wnioskować, że $\Phi \Vdash_{S4} \Box\beta$, a twierdzenie 11 (2) stanowi uzasadnienie faktu, że $\Box\beta \in \Phi$. Stąd wnosimy, że: $v(\Box\beta) = \mathbf{1}$, kończąc tym samym dowód warunku (5).

W a r u n e k (6). (A) Zakładamy, że $v_\Phi(\Diamond\beta) = \mathbf{1}$. Zatem $\Diamond\beta \in \Phi$. Korzystając z Ax. 15 i reguły odrywania wnioskujemy, że ze zbioru Φ jest inferowalna derywacyjnie formuła $\neg\Box\neg\beta$, co wobec twierdzenia 11 (2) oznacza, że $\neg\Box\neg\beta \in \Phi$. Stąd i określenia odwzorowania v_Φ wyprowadzamy wniosek, że $v_\Phi(\neg\Box\neg\beta) = \mathbf{1}$. A zatem, zgodnie z dowiedzionym wyżej warunkiem (4), mamy: $v_\Phi(\Box\neg\beta) = \mathbf{0}$. Udowodniony już warunek (5) pozwala wnosić, że istnieje odwzorowanie v_Ψ pomocnicze względem v_Φ, które formule $\neg\beta$ daje wartość $\mathbf{0}$. Zgodnie z warunkiem (4) mamy więc $v_\Psi(\beta) = \mathbf{1}$.

(B) Jeśli przyjmiemy, że istnieje pewne odwzorowanie v_Ψ pomocnicze względem v_Φ, takie, że $v_\Psi(\beta) = \mathbf{1}$, wówczas na podstawie ustalonych już własności (warunki (4) oraz (5)) wnosimy, że $v_\Psi(\neg\beta) = \mathbf{0}$, skąd $v_\Phi(\Box\neg\beta) = \mathbf{0}$ i w rezultacie $v_\Phi(\neg\Box\neg\beta) = \mathbf{1}$. Z określenia v_Φ wnioskujemy, że $\neg\Box\neg\beta \in \Phi$. Korzystając z Ax. 16 i z reguły odrywania uzasadniamy inferencję derywacyjną $\Phi \Vdash_{S4} \Diamond\beta$, która wobec twierdzenia 11 (2) pozwala wnioskować, że $\Diamond\beta \in \Phi$, a skoro tak, to $v_\Phi(\Diamond\beta) = \mathbf{1}$.

Rodzina $\mathbf{V}_\Pi$ z relacją $\mathbf{R}$ jest więc wiązką wartościowań S4. Należy do niej wartościowanie v_{Π^α}, a ponieważ $\alpha \notin \Pi^\alpha$, więc zgodnie z definicją tych odwzorowań: $v_{\Pi^\alpha}(\alpha) = \mathbf{0}$. Tym – sprzecznym z założoną tautologicznością formuły α – wnioskiem kończymy dowód twierdzenia o pełności dla S4 •

Rozdział VI

Klasyczny węższy rachunek predykatów

Wszystkie cztery dotychczas omówione rachunki logiczne są rachunkami **zdaniowymi**, mają bowiem na celu wyjaśnienie roli **spójników zdaniowych** w procesie wnioskowania. W językach tych rachunków występują tylko dwie istotne grupy symboli: **zmienne zdaniowe** odpowiadające zdaniom w sensie logiki i **stałe logiczne** odpowiadające pewnym, wyróżnionym spójnikom zdaniowym. Przy pomocy środków, którymi dysponują alfabety omówionych dotąd rachunków, potrafimy oddać jedynie najogólniejszą strukturę wypowiedzi języka naturalnego: możemy mianowicie ukazać tylko schemat połączeń zdań składowych w zdanie złożone. Całkowicie poza zasięgiem możliwości tych języków leży ujawnienie wewnętrznej budowy zdania prostego. Nieuchwytne są więc w tych językach rozmaite rozumowania, których formalna poprawność uzależniona jest od wewnętrznej konstrukcji zdań prostych, jak choćby poniższe, przekazywane przez wielowiekową tradycję logiczną:

Każdy człowiek jest śmiertelny;
Sokrates jest człowiekiem;

A zatem:

Sokrates jest śmiertelny.

By móc badać poprawność rozumowań tego typu, należy wniknąć w strukturę wypowiedzi znacznie głębiej, niż to czyniliśmy dotychczas. Odpowiadający takiemu podejściu język rachunku logicznego należy wyposażyć w symbole pozwalające odnotować wystąpienia kluczowych (z uwagi na przyjęty sposób rozumienia konstrukcji zdania prostego) słów.

Pierwszym znanym rachunkiem logicznym, który w pewien sposób korzystał z takiej, oddającej strukturę zdania prostego, analizy naszych wypowiedzi była **sylogistyka Arystotelesa**. Na kolejny rachunek tego typu – zwany **rachunkiem kwantyfikatorów** – nauka czekała z górą dwa tysiąclecia. Mianem kwantyfikatorów (termin wprowadzony przez **Ch. S. Peirce'a** w roku 1885) określa się stałe logiczne odpowiadające zwrotom kwantyfikującym, czyli mówiącym o ilości, takim jak „każdy" czy „pewien" oraz ich synonimom.

Stosownie zmodyfikowany język symboliczny, uwzględniający jako dodatkowe stałe kwantyfikatory, pozwala na pogłębioną analizę języka naturalnego, niezależną *de facto* od sposobu pojmowania wartości logicznych. Skutkiem tego powstawać mogą różne rachunki kwantyfikatorów. Ograniczymy się tutaj do omówienia jednego z nich, tzw. **klasycznego węższego rachunku predykatów (KWRP)**, nadbudowanego nad KRZ. Ten najstarszy z rachunków kwantyfikatorowych jest szczegółowo opracowany w wielu monografiach. Jego podwaliny położyli w drugiej połowie XIX wieku **G. Frege**, **Ch. S. Peirce**, **E. Schroeder**. W pełni sformalizowany wykład tego rachunku zawiera dzieło **B. Russella** i **A. N. Whiteheada** *Principia mathematica* (1910). Znaczny wkład w badania nad KWRP wnieśli również późniejsi badacze **D. Hilbert**, **W. Ackerman**, **P. Bernays**, **A. Church**, **A. Tarski**. Twierdzenie o pełności dla klasycznego węższego rachunku predykatów udowodnił po raz pierwszy w roku 1930 **K. Goedel**. Przytoczona dalej wersja dowodu tego twierdzenia pochodzi od **J. Reichbacha**.

§ 1. Język KWRP

Uproszczony obraz języka, który przyjmowaliśmy dotychczas, ignorując wewnętrzną budowę zdań prostych pozostawiał poza zasięgiem naszych analiz szereg ważnych i często w praktyce spotykanych rozumowań, każąc zastępować w języku symbolicznym zdanie proste pojedynczą zmienną zdaniową. Klasyczny węższy rachunek predykatów korzysta z wnikliwszej analizy zdań języka naturalnego, zachowując przy tym wszystkie poczynione w ramach klasycznego rachunku zdań ustalenia dotyczące roli spójników ekstensjonalnych. Wśród stałych logicznych KWRP znajdują się bowiem wszystkie stałe logiczne KRZ, a nadto stałe specyficzne dla KWRP, odpowiadające

wyrażeniom ważnym z uwagi na konstrukcję pewnego typu zdań prostych. Nim wskażemy te wyrażenia, rozważymy na kilku przykładach strukturę wewnętrzną zdania prostego:

(1) Krzysztof Penderecki jest kompozytorem.

(2) Uniwersytet Jagielloński jest starszy od Uniwersytetu Śląskiego.

(3) Tarnów leży między Rzeszowem a Krakowem.

W przytoczonych zdaniach stwierdzamy bądź, że pewnemu obiektowi przysługuje jakaś cecha, bądź, że pewne obiekty pozostają w określonych wzajemnych związkach czy relacjach. Obiekty, o których mowa w zdaniach (1) - (3), wskazane są w nich przy pomocy **nazw indywiduowych**: „Krzysztof Penderecki", „Uniwersytet Jagielloński", „Uniwersytet Śląski", „Tarnów", „Rzeszów", „Kraków". Natomiast cechy przysługujące tym obiektom i stosunki między nimi – przy pomocy **predykatów**: „... jest kompozytorem", „... jest starszy od ...", „... leży między ... a ...". Łatwo spostrzec, że aby z poszczególnych wymienionych wyżej predykatów utworzyć zdania proste, należy użyć różnej, lecz dla każdego z nich stałej liczby nazw. Liczbę tę nazywać będziemy **argumentowością predykatu**. I tak, wykorzystane w zdaniach (1) - (3) predykaty są odpowiednio jedno-, dwu- i trójargumentowe.

Podsumowując: zdania (1) - (3), a także wszystkie im podobne zdania jednostkowe (zdania, w których mowa o konkretnych indywiduach), skonstruowane są z n-argumentowego predykatu oraz z nazw indywiduowych.

Predykaty stosuje się nie tylko do budowy zdań w sensie logiki. Często współtworzą one wyrażenia, którym wartość logiczna nie przysługuje i które w związku z tym nie są zdaniami w sensie logiki, chociaż swą składnią bardzo takie zdania przypominają. Weźmy pod uwagę wypowiedź:

(4) On jest kompozytorem.

Ponieważ zaimek „on" nie wskazuje żadnego konkretnego indywiduum, mamy do czynienia z wypowiedzią niedookreśloną, pozbawioną wartości logicznej, a zatem nie będącą zdaniem w sensie logiki. Wypowiedź (4) i jej podobne nazywać będziemy **funkcjami zdaniowymi**. Zauważmy, że występujący w (4) zaimek osobowy „on" pełni jakby rolę zmiennej indywiduowej, zapewniając z jednej strony poprawność składniową wypowiedzi, z drugiej pozwalając na jej najrozmaitsze dookreślenia dokonujące się przez podstawienie w miejsce owej zmiennej konkretnej nazwy indywiduowej. Takie podstawienie przekształca nie posiadającą wartości logicznej funkcję zdaniową w zdanie w sensie logiki. Zwykle dokonujemy tego podstawienia automatycznie, na podstawie kontekstu sytuacyjnego, bądź wypowiedzi towarzyszących.

W funkcjach zdaniowych rolę zmiennych indywiduowych pełnić mogą oprócz rozmaitych zaimków także liczebniki i tzw. **nazwy ogólne**, czyli predykaty w postaci rzeczownikowej. Czasem samo ujawnienie struktury logicznej funkcji zdaniowej jest zadaniem niełatwym. Do kwestii tej wrócimy niebawem ilustrując ją kilkoma przykładami (por. str. 194 - 195).

Wskazaliśmy na razie jeden sposób przekształcania funkcji zdaniowej w zdanie – przez podstawienie za zmienne nazw indywiduowych. Drugi sposób, o wiele ciekawszy z punktu widzenia logiki, polega na określeniu przy pomocy słów kwantyfikujących liczby indywiduów, którym przysługuje pewna własność lub które pozostają w ustalonych wzajemnych zależnościach. Przyjrzyjmy się wypowiedziom:

(5) Każdy jest kompozytorem.

(6) Istnieje ktoś, kto jest kompozytorem.

Po pierwsze zauważamy, że są to zdania w sensie logiki, ponieważ mają określoną wartość logiczną: (5) jest zdaniem fałszywym, (6) – prawdziwym.

Po drugie – w zdaniach tych nie występują żadne nazwy indywiduowe.

Po trzecie zaś, oba te zdania powstały z funkcji zdaniowej (4) przez **kwantyfikację** występującej w niej zmiennej indywiduowej.

Właśnie te, użyte w zdanich (5) i (6), zwroty kwantyfkujące „każdy" i „istnieje ktoś, kto" (a także ich synonimiczne wersje: „wszyscy", „dowolne" oraz „niektórzy", „jakieś") będą przedmiotem naszej szczególnej uwagi. Analiza roli pełnionej w języku przez te wyrażenia kwantyfikujące jest głównym celem rozważań KWRP. Przejdźmy teraz do opisu języka symbolicznego tego nowego rachunku logicznego:

Alfabet języka KWRP. Alfabet ten składa się z następujących grup symboli:

(1) S t a ł e   l o g i c z n e:

a) $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ zwane odpowiednio funktorami koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji.

b) $\bigwedge$, $\bigvee$ zwane odpowiednio kwantyfikatorem dużym (ogólnym, generalnym) i kwantyfikatorem małym (szczegółowym, egzystencjalnym).

(2) Z m i e n n e:

a) predykatywne P, Q, R, ..., P_1, P_2, ... tworzące zbiór przeliczalny. Z każdym symbolem predykatywnym związana jest liczba naturalna zwana jego argumentowością. Dla każdej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele n-argumentowych symboli predykatywnych.

b) indywiduowe x, y, z, ..., x_1, x_2, ... tworzące również zbiór przeliczalny.

(3) N a w i a s y: (,).

DEFINICJA WYRAŻENIA JĘZYKA KWRP   WYRAŻENIEM JĘZYKA KWRP JEST KAŻDY SKOŃCZONY CIĄG SYMBOLI ALFABETU TEGO JĘZYKA.

DEFINICJA WYRAŻENIA SENSOWNEGO JĘZYKA KWRP   WYRAŻENIEM SENSOWNYM JĘZYKA KWRP JEST TAKIE I TYLKO TAKIE WYRAŻENIE TEGO JĘZYKA, KTÓRE ZOSTAŁO ZBUDOWANE ZGODNIE Z NASTĘPUJĄCYMI REGUŁAMI:

(1) KAŻDE WYRAŻENIE JĘZYKA KWRP ZBUDOWANE Z n-ARGUMENTOWEGO SYMBOLU PREDYKATYWNEGO I NASTĘPUJĄCEGO PO NIM, UJĘTEGO W NAWIASY, n-ELEMENTOWEGO CIĄGU NIEKONIECZNIE RÓŻNYCH MIĘDZY SOBĄ ZMIENNYCH INDYWIDUOWYCH JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM;

(2) JEŻELI α, β SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI, TO $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\neg\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI;

(3) JEŻELI α JEST WYRAŻENIEM SENSOWNYM, ZAŚ a JEST DOWOLNĄ ZMIENNĄ INDYWIDUOWĄ, TO $\bigwedge a\alpha$, $\bigvee a\alpha$ TAKŻE SĄ WYRAŻENIAMI SENSOWNYMI.

Wyrażeniami sensownymi (inaczej **formułami**) języka KWRP są w myśl powyższej definicji następujące ciągi symboli: $P_7(x, y, x)$, $(\bigvee x Q(x, y) \vee \bigwedge z R(y, y))$. Natomiast wyrażenie: $(P(x) \rightarrow P(y, z))$ jest pozbawione sensu, gdyż symbol predykatywny P jest albo jednoargumentowy i wtedy bezsensowny jest następnik $P(y, z)$, albo dwuargumentowy, a wtedy bezsensowny jest poprzednik $P(x)$.

Wyrażenia sensowne zbudowane zgodnie z punktem (1) definicji wyrażenia sensownego KWRP nazywać będziemy **formułami atomo-**

wymi. Dla uproszczenia zapisu opuszczać będziemy nawiasy okalające całą formułę. Zbiór wszystkich wyrażeń sensownych języka KWRP oznaczać będziemy symbolem Σ_{KWRP}, a poszczególne wyrażenia sensowne i ich zbiory – odpowiednio małymi i dużymi literami greckimi. Małe, początkowe litery alfabetu łacińskiego: a, b, c, ..., a_1, a_2, ... przebiegać będą zbiór zmiennych indywiduowych.

Jak należy rozumieć wprowadzone symbole? Które wyrażenia języka naturalnego są ich odpowiednikami? Otóż poszczególne funktory $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ interpretujemy tak samo jak w KRZ, jako spójniki zdaniowe „i", „lub", „jeżeli – to", „nieprawda, że". Kwantyfikatorom odpowiadają zwroty kwantyfikujące: kwantyfikatorowi dużemu ($\bigwedge$) – „każdy", „wszyscy", „dowolny", „jakikolwiek"; kwantyfikatorowi małemu ($\bigvee$) – „istnieje", „pewne", „niektórzy" itp. Symbolom predykatywnym n-argumentowym przypisujemy n-argumentowe predykaty. Zmiennym indywiduowym przyporządkowujemy te wyrażenia języka naturalnego, które pełnią w funkcjach zdaniowych rolę zmiennych. Nawiasom, jak zazwyczaj, odpowiadają znaki interpunkcyjne.

Przyjęty sposób rozumienia symboli alfabetu języka KWRP sprawia, że niektóre wypowiedzi z języka naturalnego można „przetłumaczyć" na formuły języka rachunku predykatów. Takie tłumaczenie jest *de facto* ujawnieniem logicznej struktury zdań języka naturalnego. Nie zawsze jest to, jak wspominaliśmy, zadanie całkiem proste. Weźmy, na przykład, pod uwagę wypowiedź:

(7) Kompozytor jest muzykiem.

Rozpoznajemy w niej funkcję zdaniową utworzoną z jednoargumentowego predykatu „... jest muzykiem". W roli jego argumentu wystąpił kolejny jednoargumentowy predykat „...jest kompozytorem" w swej rzeczownikowej postaci, która ukrywa zarazem wspólną dla obu predykatów domyślną zmienną indywiduową. Wypowiedź (7) trzeba więc przeformułować tak, aby oba predykaty użyte były w nie zniekształconej formie, natomiast zmienna indywiduowa wystąpiła *explicite*. Otrzymamy wówczas wypowiedź mniej zgrabną stylistycznie, lecz o wyeksponowanej logicznej strukturze:

(8) Jeśli dany obiekt jest kompozytorem, to obiekt ów jest muzykiem.

Teraz, gdy przez P oznaczymy predykat „... jest kompozytorem" a przez Q – predykat „... jest muzykiem", schemat wypowiedzi (8) w języku KWRP zapiszemy w sposób następujący:

$$P(x) \rightarrow Q(x).$$

Weźmy teraz pod uwagę zdanie, które powstaje z funkcji zdaniowej (7) przez kwantyfikację występującej w niej zmiennej:

(9) Każdy kompozytor jest muzykiem.

Przekształcając je analogicznie jak wypowiedź (7), możemy je przedstawić w postaci:

(10) Dla dowolnego obiektu: jeśli obiekt ten jest kompozytorem, to obiekt ów jest muzykiem.

Strukturę logiczną zdania (10) oddajemy w języku KWRP formułą

$$\bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x)).$$

Rozważmy jeszcze jedno zdanie powstałe przez skwantyfikowanie funkcji zdaniowej (7):

(11) Pewien kompozytor jest muzykiem.

Głosimy w nim istnienie takiego indywiduum, które jest zarazem kompozytorem i muzykiem. A zatem treść zdania (11) możemy oddać przy użyciu zdania:

(12) Istnieje taki obiekt, że obiekt ten jest kompozytorem i obiekt ten jest muzykiem.

Schematem zdania (12) w języku KWRP będzie formuła

$$\bigvee x(P(x) \wedge Q(x)).$$

Nie wolno sugerować się zewnętrznym, powierzchownym podobieństwem zdań (9) i (11) i mniemać, że równie dobrze schematem zdania (9) mogłaby być formuła: $\bigwedge x(P(x) \wedge Q(x))$, a schematem (11) formuła: $\bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Pierwszej z nich odpowiada bowiem zdanie:

(13) Wszelki obiekt jest zarazem kompozytorem i muzykiem.

Zaś drugiej:

(14) Istnieje taki obiekt, że jeżeli obiekt ten jest kompozytorem, to jest ów obiekt muzykiem.

Porównując parami zdania: (9) i (13) oraz (11) i (14) stwierdzamy, że nie są one równoznaczne (mówiące „tyle samo"). Pamiętajmy o tym, ilekroć poszukiwać będziemy schematu symbolicznego adekwatnego względem struktury logicznej wypowiedzi, w której występują zwroty kwantyfikujące.

Zauważmy jeszcze, że w języku KWRP nie potrafimy oddać schematu konstrukcji żadnego zdania jednostkowego, w szczególności zdań (1)-(3). Przyczyną tego stanu rzeczy jest brak w alfabecie tego rachunku symboli odpowiadających nazwom indywiduowym języka naturalnego. Można by było oczywiście temu zaradzić konstytuując nieskończenie liczny zbiór stałych indywiduowych, których odpowiednikami w języku naturalnym byłyby nazwy indywiduowe poszczególnych obiektów, ale z punktu widzenia celu, jaki nam przyświeca, zabieg taki jest bez znaczenia. Przypomnijmy raz jeszcze, że celem tym jest analiza roli zwrotów kwantyfikujących, a zwroty takie nie mają istotnego zastosowania w zdaniach jednostkowych.

W dalszych rozważaniach przydatna okaże się umiejętność określenia statusu zmiennych w formule KWRP. Umówmy się tymczasem, że:

- zmienną występującą w formule nazywać będziemy tylko taką zmienną, która jest argumentem jakiegokolwiek symbolu predykatywnego współtworzącego daną formułę;
- zmienną objętą kwantyfikatorem nazywać będziemy tę zmienną, która znajduje się bezpośrednio po prawej stronie kwantyfikatora;
- zasięgiem kwantyfikatora nazywać będziemy tę formułę, do której odnosi się dany kwantyfikator, tj. występującą po kwantyfikatorze formułę atomową lub formułę zawartą w nawiasie otwartym bezpośrednio po zmiennej objętej kwantyfikatorem.

Jak należy rozumieć te terminy, prześledzimy na przykładzie formuły:

$$(*) \qquad \bigwedge x(\bigvee y\, P(y, y) \to Q(y, z)).$$

Występują w niej dwie zmienne indywiduowe y, z. Duży kwantyfikator obejmuje zmienną x, a zasięg jego stanowi formuła:

$$\bigvee y\, P(y, y) \to Q(y, z).$$

Mały kwantyfikator, obejmujący zmienną y, ma w swym zasięgu tylko formułę atomową:

$$P(y, y).$$

Jedna i ta sama zmienna może mieć w formule kilka wystąpień; i tak zmienna y w formule (∗) ma aż trzy wystąpienia, natomiast zmienna z – tylko jedno.

Wystąpienie zmiennej leżące w zasięgu kwantyfikatora obejmującego tę zmienną nazywać będziemy **wystąpieniem związanym**, natomiast leżące poza jego zasięgiem – **wystąpieniem wolnym**. W formule $\bigwedge x(\bigvee y\, P(y, y) \to Q(y, z))$ pierwsze i drugie wystąpienie zmiennej y jest związane, podczas gdy wystąpienie trzecie, podobnie jak jedyne wystąpienie zmiennej z – jest wolne.

Mówimy, **że zmienna indywiduowa a nie jest wolna w formule** α wtedy i tylko wtedy, gdy bądź a wcale nie występuje w wyrażeniu sensownym α, bądź wszystkie wystąpienia tej zmiennej są w α związane. W przeciwnym wypadku, gdy zmienna a ma w formule α choć jedno wystąpienie wolne, mówimy, **że zmienna a jest wolna w formule** α.

Rozważmy teraz formułę:

$$(**) \qquad \bigwedge x(\bigvee z\, R(x, y, z) \to \bigwedge y\, R(y, z, x)).$$

Zmiennymi wolnymi są w niej y oraz z, jako że pierwsze wystąpienie zmiennej y i drugie wystąpienie zmiennej z są wolne. Natomiast zmienna x, której oba wystąpienia są **związane**, nie jest zmienną wolną tej formuły, podobnie jak nieskończenie wiele innych zmiennych, które wcale w tej formule nie wystąpiły.

Symbolem $\alpha(a/b)$ oznaczać będziemy formułę, która powstaje z formuły α przez podstawienie w niej zmiennej indywiduowej b za zmienną indywiduową a. Aby podstawienie takie wykonać poprawnie, należy przestrzegać następujących zasad:

(1) nową zmienną podstawia się jednocześnie we wszystkich miejscach wolnych wystąpień zmiennej eliminowanej;

(2) liczba wszystkich wolnych wystąpień zmiennych indywiduowych w formule nie może ulec zmianie w wyniku wykonania podstawienia.

Zasady prawidłowego podstawiania uzupełniamy sześcioma oczywistymi regułami rządzącymi podstawianiem w formułach złożonych:

(1) $(\alpha \wedge \beta)(a/b) = \alpha(a/b) \wedge \beta(a/b)$
(2) $(\alpha \vee \beta)(a/b) = \alpha(a/b) \vee \beta(a/b)$
(3) $(\alpha \to \beta)(a/b) = \alpha(a/b) \to \beta(a/b)$
(4) $(\neg\alpha)(a/b) = \neg\alpha(a/b)$
(5) $(\bigwedge c\alpha)(a/b) = \bigwedge c\alpha(a/b)$ gdy $c \neq b$
(6) $(\bigvee c\alpha)(a/b) = \bigvee c\alpha(a/b)$ gdy $c \neq b$

Gdy podstawienie narusza którąkolwiek z zasad prawidłowego podstawiania, jego wynikiem jest formuła wyjściowa, czyli $\alpha(a/b) = \alpha$.

Na zakończenie dokonajmy kilku przykładowych podstawień w formule (**):

$$\alpha = \bigwedge x\left(\bigvee z\, R(x, y, z) \rightarrow \bigwedge y\, R(y, z, x)\right)$$

1° $\alpha(s/x) = \alpha$ – ponieważ zmienna s nie jest wolna w α;
2° $\alpha(x/s) = \alpha$ – ponieważ zmienna x nie jest wolna w α;
3° $\alpha(y/x) = \alpha$ – ponieważ zmienia się liczba wolnych wystąpień zmiennych w formule;
4° $\alpha(y/z) = \alpha$ – ponieważ zmienia się liczba wolnych wystąpień zmiennych w formule;
5° $\alpha(y/s) = \bigwedge x\left(\bigvee z\, R(x, s, z) \rightarrow \bigwedge y\, R(y, z, x)\right)$
6° $\alpha(z/x) = \alpha$ – ponieważ zmienia się liczba wolnych wystąpień zmiennych w formule;
7° $\alpha(z/y) = \alpha$ – ponieważ zmienia się liczba wolnych wystąpień zmiennych w formule;
8° $\alpha(z/s) = \bigwedge x\left(\bigvee z\, R(x, y, z) \rightarrow \bigwedge y\, R(y, s, x)\right)$.

§ 2. *Wartościowania w KWRP*

Jak już wspominaliśmy, stałymi KWRP są między innymi wszystkie funktory analizowane w KRZ. Przypomnijmy, że tak jak w KRZ, funktory te odpowiadają ekstensjonalnym spójnikom zdaniowym, a ich charakterystyka prawdziwościowa podana w KRZ jest trafna. Definicja wartościowania w KWRP jest więc tylko rozszerzeniem odpowiedniej definicji z KRZ o warunki wyjaśniające sposób określania wartości formuły, w której wystąpiły kwantyfikatory.

DEFINICJA WARTOŚCIOWANIA W KWRP WARTOŚCIOWANIEM W KWRP NAZYWAMY KAŻDĄ FUNKCJĘ v ZE ZBIORU Σ_{KWRP} W ZBIÓR WARTOŚCI LOGICZNYCH (symbolicznie: $v: \Sigma_{KWRP} \rightarrow \{0, 1\}$) TAKĄ, ŻE DLA DOWOLNYCH FORMUŁ α, $\beta \in \Sigma_{KWRP}$:

JEŻELI $v(\alpha)$	$v(\beta)$,	TO $v(\alpha \wedge \beta)$	$v(\alpha \vee \beta)$	$v(\alpha \rightarrow \beta)$	$v(\neg\alpha)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

A PONADTO, GDY a JEST DOWOLNĄ ZMIENNĄ INDYWIDUOWĄ:
$v(\bigwedge a\alpha) = \mathbf{1}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA **DOWOLNEJ** ZMIENNEJ INDYWIDUOWEJ b: $v(\alpha(a/b)) = \mathbf{1}$
$v(\bigvee a\alpha) = \mathbf{1}$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA **PEWNEJ** ZMIENNEJ INDYWIDUOWEJ b: $v(\alpha(a/b)) = \mathbf{1}$.

Tak określone wartościowanie charakteryzuje więc duży kwantyfikator jako nieskończoną koniunkcję, a mały – jako nieskończoną alternatywę formuł powstających z α przez podstawianie za zmienną a dowolnych zmiennych indywiduowych.

Z definicji wartościowania w KWRP wynikają jako bezpośrednie wnioski następujące stwierdzenia:
1° każde wartościowanie jest w sposób jednoznaczny określone wartościami, jakie przyjmuje na formułach atomowych;
2° wartość formuł kwantyfikatorowych jest współwyznaczana przez wartości nieskończenie wielu wyrażeń określonego kształtu: tak np. wartość formuły $\bigwedge x\, P(x)$ zależy od wartości wszystkich wyrażeń kształtu P(a), czyli P(x), P(y), P(z), ...

Definicja wartościowania umożliwia nam wskazanie wśród ogółu formuł KWRP tych bardzo charakterystycznych wyrażeń sensownych, które uznajemy za schematy zawsze prawdziwych zdań języka naturalnego – mianowicie tautologii. Sformułujemy definicję tego pojęcia dla omawianego rachunku.

DEFINICJA TAUTOLOGII KWRP JEŚLI WARTOŚĆ DANEJ FORMUŁY α JEST STAŁA PRZY WSZYSTKICH WARTOŚCIOWANIACH KWRP I RÓWNA **1**, MÓWIMY WÓWCZAS, ŻE α JEST TAUTOLOGIĄ KWRP.

Konstrukcja wartościowań w KWRP usprawiedliwia jeszcze jeden prosty, lecz bardzo istotny wniosek wiążący pojęcie tautologii na gruncie KRZ i KWRP. Nim wniosek ten sformułujemy w lemacie 1, zauważmy, że żadne wyrażenie sensowne KRZ nie jest wyrażeniem KWRP z uwagi na istotne różnice w alfabetach tych rachunków. Zatem **żadna tautologia KRZ nie jest tautologią KWRP**. Jednocześnie zauważmy, że każdy schemat metajęzykowy (zapisywany przy użyciu małych liter greckich) formuł KRZ jest równocześnie bezkwantyfikatorowym schematem formuł KWRP. Co więcej, identyczna charakterystyka prawdziwościowa funktorów na gruncie obu porównywanych rachunków sprawia że oczywisty jest następujący

Lemat 1 Każdy schemat tautologii KRZ jest zarazem schematem tautologii KWRP.

Na marginesie tego lematu odnotujmy, że zależność odwrotna nie zachodzi: istnieją wszak takie schematy tautologii KWRP (zawierające kwantyfikatory), które nie tylko nie są schematami tautologii KRZ, ale nie są nawet schematami formuł tego rachunku.

Przejdźmy teraz do zagadnień natury praktycznej i spytajmy, w jaki sposób ustalać będziemy tautologiczność formuł KWRP. W KRZ, który stanowi dla nas stały punkt odniesienia, stosowaliśmy w tym celu dwie metody: tabelkową i niewprost. Metoda tabelkowa sprowadzała się do określenia wartości logicznych badanej formuły przy wszystkich możliwych układach wartości jej zmiennych zdaniowych. Układów tych było zawsze skończenie wiele (2^n – dla n różnych zmiennych zdaniowych w formule) i tabelka miała w każdym konkretnym przypadku skończone rozmiary.

Zauważmy od razu, że aby posługując się tą metodą ustalić wartość formuły kwantyfikatorowej $\bigwedge x\, P(x)$, należałoby wziąć pod uwagę wartość nieskończenie wielu formuł: P(x), P(y), P(z),... itd. otrzymanych przez podstawianie kolejno wszystkich zmiennych indywiduowych za zmienną x, wolną w wyrażeniu podkwantyfikatorowym. Tabelka, w której mielibyśmy uwzględnić wartości nieskończonej liczby wyrażeń, miałaby z konieczności nieskończenie wiele kolumn i wierszy, a tym samym byłaby niewykonalna. Stosowanie metody tabelkowej okazuje się więc w KWRP niemożliwe.

Pozostaje nam wobec powyższego tylko metoda niewprost, będąca próbą wskazania wartościowania obalającego rozważaną formułę. Jeżeli każda taka próba prowadzi do sprzeczności wyrażającej się w jednoczesnym przypisaniu temu samemu wyrażeniu różnych wartości logicznych, badaną formułę uznajemy za tautologię. W przeciwnym wypadku sprawdzane wyrażenie tautologią nie jest. Gdy któreś z prowadzonych rozumowań kończy się niesprzecznie, można łatwo odczytać z diagramu (przypominającego swym zewnętrznym kształtem i sposobem konstrukcji diagramy znane z KRZ), jakie wartościowanie obala rozpatrywaną formułę. Czasem jednak żadnej sytuacji w diagramie nie można uznać za końcową i zgodnie z regułami należy wpisywać doń coraz to nowe formuły, a poszukiwanie wartościowania obalającego ciągnie się w nieskończoność. Znaczy to, że nasz sposób

badania nie jest uniwersalną procedurą rozstrzygającą. Co więcej (wynika to z ogólniejszych dociekań), żadnej metody rozstrzygania pytania o tautologiczność formuł KWRP nie ma. Niemniej, gdy mamy do czynienia z konkretną formułą, której nie jesteśmy w stanie zweryfikować ani sfalsyfikować skończonym diagramem, możemy zrekonstruować wartościowanie obalające na innej drodze, przeprowadzając rozumowanie odrębne, o indywidualnym, dopasowanym do danej formuły przebiegu. Ponieważ jednak wspomniana rekonstrukcja wartościowania obalającego jest z pewnością każdorazowo wykonalna, stąd możemy uznać formuły o diagramie nieskończonym za nie będące tautologiami. Sytuację taką zilustrujemy przykładem (5).

Tymczasem jednak, mając w pamięci definicję wartościowania KWRP, wyliczmy reguły konstrukcji diagramów, którymi będziemy się posługiwać rozstrzygając sprawę tautologiczności formuł. Oczywiście są wśród nich wszystkie reguły dotyczące funktorów, znane nam z KRZ: **(K 1)**, **(K 0)**, **(A 1)**, **(A 0)**, **(I 1)**, **(I 0)**, **(N 1)**, **(N 0)**. Natomiast rozkładem formuł kwantyfikatorowych rządzą następujące cztery dyrektywy:

($\bigwedge$1)

1	0
$\bigwedge a\, \alpha$	
$\alpha(a/b_1)$	
⋮	
$\alpha(a/b_n)$	

($\bigvee$0)

1	0
	$\bigvee a\, \alpha$
	$\alpha(a/b_1)$
	⋮
	$\alpha(a/b_n)$

gdzie $b_1, ..., b_n$ są wszystkimi zmiennymi mającymi wolne wystąpienia w obrębie rozpatrywanego przypadku.

($\bigwedge$0)

1	0
	$\bigwedge a\, \alpha$
	$\alpha(a/b)$

($\bigvee$1)

1	0
$\bigvee a\, \alpha$	
$\alpha(a/b)$	

gdzie b jest zmienną, która w żadnej z wcześniej rozważanych w obrębie danego przypadku formuł nie miała wolnego wystąpienia.

Aby skomentować te reguły i zawarte w nich dyrektywy przybliżyć intuicjom Czytelnika, przypomnijmy, że duży kwantyfikator interpretujemy jako nieskończoną koniunkcję, a mały – jako nieskończoną alternatywę. Zgodnie z tą interpretacją, gdy przypisujemy wyrażeniu $\bigwedge a\alpha$ wartość **1**, oznacza to, że wartość ta przysługuje nieskończonej koniunkcji formuł: $\alpha(a/b_1) \wedge \alpha(a/b_2) \wedge \ldots$ Zatem wszystkie człony tej koniunkcji powinniśmy wpisać w lewą kolumnę diagramu. To jednak jest niewykonalne praktycznie – stąd ograniczamy się do umieszczania tam tylko tych formuł, które stwarzają szansę zakończenia rozumowania sprzecznością. Są nimi wyniki podstawiania w α tych zmiennych, które w rozważanym segmencie diagramu mają już wolne wystąpienia. W niektórych wypadkach wystarczy uwzględnić tylko jedną taką formułę, w innych – więcej; chodzi o to, by nie pominąć żadnej ewentualnej okazji zakończenia rozumowania sprzecznością. Uwagi powyższe, aczkolwiek odnoszące się do reguły ($\bigwedge$ **1**), można odnieść także do reguły ($\bigvee$ **0**). Jeśli bowiem wyrażenie $\bigvee a\alpha$ traktować jako nieskończoną alternatywę o wartości **0**, wówczas każdy jej składnik będzie również miał wartość **0** i jako taki powinien być wpisany w prawą kolumnę diagramu. Ze względów praktycznych wybieramy jednak tylko te spośród formuł-składników, które mogą współtworzyć sprzeczność w prowadzonym rozumowaniu.

Biorąc z kolei pod uwagę schemat ($\bigwedge$ **0**), stwierdzamy, że skoro odpowiednikiem $\bigwedge a\alpha$ jest nieskończona koniunkcja, to może sfalsyfikować ją tylko takie wartościowanie, które przypisuje co najmniej jednemu z czynników wartość **0**. Powinniśmy zatem, analogicznie jak wtedy, gdy stosujemy schemat (**K 0**), rozpatrzyć wszystkie możliwe przypadki, zakładając kolejno, że wartość **0** ma formuła $\alpha(a/b_1)$, następnie, że ją ma $\alpha(a/b_2)$ itd. Z uwagi jednak na nieskończoną liczbę tych możliwości przeanalizowanie wszystkich wariantów jest niewykonalne. Zamiast tego rozważamy, niejako tytułem testu, jeden tylko, za to możliwie najniekorzystniejszy z punktu widzenia poszukiwań sprzeczności, przypadek. Konstruujemy go podstawiając w formule α w miejsce uwolnionej zmiennej a taką zmienną indywiduową, która w rozważanym segmencie diagramu nigdzie dotąd nie miała wolnego wystąpienia. Ten sam sposób argumentacji zastosować można przy wyjaśnianiu dyrektywy zawartej w regule ($\bigvee$ **1**).

Przejdźmy do rozważenia kilku przykładów sprawdzania tautologiczności formuł KWRP:

(1) Czy jest tautologią KWRP formuła $\bigwedge x \neg P(x) \to \neg \bigvee x\, P(x)$? Załóżmy, że nie jest. Istnieje więc wartościowanie, które tej formule przypisuje wartość **0**; wpisujemy zatem rozważaną formułę w prawą kolumnę diagramu:

1	0	
	$\bigwedge x \neg P(x) \to \neg \bigvee x\, P(x)$	
$\bigwedge x \neg P(x)$	$\neg \bigvee x\, P(x)$	(I 0)
$\bigvee x\, P(x)$		(N 0)
$P(y)$		($\vee$ 1), a ponieważ żadna zmienna w dotąd wypisanych formułach nie miało wolnego wystąpienia, możemy podstawić w $P(x)$ dowolną zmienną. Wybieramy y. Regułę ($\wedge$ 1) stosujemy do formuły z drugiego wiersza diagramu. Jedyną zmienną wolną jest y, a więc:
$\neg P(y)$		
	$P(y)$	(N 1)

Ujawniona w diagramie sprzeczność świadczy o tym, że badana formuła jest tautologią.

(2) Czy jest tautologią KWRP formuła $\mathbf{P(x) \to \bigwedge x\, P(x)}$? Załóżmy, że nie:

1	0		
	$P(x) \to \bigwedge x\, P(x)$		
$P(x)$	$\bigwedge x\, P(x)$	(I 0)	Zgodnie z klauzulą dopuszczającą podstawienie tylko takiej zmiennej, która w diagramie dotychczas nie występowała wolna, wykluczamy wykorzystanie do podstawienia samej zmiennej x. Wybierzmy zatem y:
	$P(y)$	($\wedge$ 1)	

Jak widać, osiągnęliśmy już formuły atomowe, nierozkładalne przy pomocy reguł konstrukcji diagramu. Rozumowanie nie doprowadziło do sprzeczności, a zatem badana formuła nie jest tautologią. Falsyfikuje ją każde wartościowanie, które przypisuje wyrażeniu P(x) wartość **1**, a P(y) wartość **0**.

(3) Czy jest tautologią KWRP formuła:

$$\bigwedge x(P(x) \to Q(x)) \to (\bigvee x\, P(x) \to \bigwedge x\, Q(x))?$$

	1	0	
		$\wedge x(P(x) \to Q(x)) \to (\vee x\, P(x) \to \wedge x\, Q(x))$	
	$\wedge x(P(x) \to Q(x))$	$\vee x\, P(x) \to \wedge x\, Q(x)$	(I 0)
	$\vee x\, P(x)$	$\wedge x Q(x)$	(I 0)
	$P(y)$		$(\vee 1)$
		$Q(z)$	$(\wedge 0)$
	$P(y) \to Q(y)$		$(\wedge 1)$
	$P(z) \to Q(z)$		$(\wedge 1)$
1.		$P(y)$	(I 1)
2.	$Q(y)$		(I 1)
2.1.		$P(z)$	(I 1)

Brak sprzeczności. Formuła nie jest tautologią. Każde wartościowanie przypisujące wartość **1** formułom P(y) i Q(y), a formule P(z) wartość **0** falsyfikuje badaną formułę.

(4) Czy jest tautologią KWRP formuła:

$$(\bigvee x\, P(x) \to \bigvee x\, Q(x)) \to \bigvee x(P(x) \to Q(x))?$$

	1	0	
		$(\vee x\, P\ x) \to \vee x\, Q(x)) \to \vee\ x(P(x) \to Q(x))$	
	$\vee x P(x) \to \vee x Q(x)$	$\vee x(P(x) \to Q(x)$	(I 0)
1.		$\vee x P(x)$	(I 1)
		$P(x)$	$(\vee 0)$
		$P(x) \to Q(x)$	$(\vee 0)$
	$P(x)$	$Q(x)$	(I 0)
2.	$\vee x Q(x)$		(I 1)
	$Q(x)$		$(\vee 1)$ Możemy użyć do podstawienia zmiennej x, ponieważ w obrębie rozpatrywanego przypadku nie miała ona żadnych wolnych wystąpień.
		$P(x) \to Q(x)$	$(\vee 0)$
	$P(x)$	$Q(x)$	(I 0)

Sprzeczność wystąpiła w każdym z rozpatrywanych przypadków, a zatem badana formuła jest tautologią KWRP.

(5) Czy jest tautologią KWRP formuła $\bigvee x \bigwedge y\, R(x, y)$?
Załóżmy, że nie:

1	0	
	$\vee x \wedge y R(x, y)$	
	$\wedge y R(x_1, y)$	$(\vee 0)$
	$R(x_1, x_2)$	$(\wedge 0)$
	$\wedge y R(x_2, y)$	$(\vee 0)$
	$R(x_2, x_3)$	$(\wedge 0)$
	$\wedge y R(x_3, y)$	$(\vee 0)$
	$R(x_3, x_4)$	$(\wedge 0)$
:	:	:

Przerwijmy dalszą budowę diagramu. Na podstawie przytoczonego wyżej jego początkowego fragmentu można wnioskować, że nigdy nie osiągniemy stanu, który można by uznać za końcowy: ilekroć bowiem zastosujemy regułę ($\bigwedge$ **0**) tylekroć obowiązani jesteśmy wprowadzić kolejną, nową zmienną x_m. Pojawienie się nowej zmiennej wymaga z kolei powrotu do formuły początkowej i zastosowanie raz jeszcze reguły ($\bigvee$ **0**). Otrzymane w ten sposób nowe wyrażenie rozpoczyna się od dużego kwantyfikatora i wymaga ponownego użycia reguły ($\bigwedge$ **0**); wtedy pojawia się w diagramie kolejna wolna zmienna x_{m+1}, a wraz z nią konieczność powtórzenia opisanego cyklu rozkładu formuły.

Na tej podstawie, mimo że nasza procedura nie pozwoliła nam uzyskać odpowiedzi na pytanie o tautologiczność badanej formuły, możemy przeprowadzić pewne rozumowanie pomocnicze, które przekona nas o nietautologiczności tej formuły.

Ustalmy w zbiorze zmiennych indywiduowych dowolny porządek liniowy (kolejność), a następnie zadajmy na formułach atomowych zbudowanych przy użyciu predykatu R wartościowanie v:

$$v(R(a_n, a_m)) = \begin{cases} \mathbf{0} & \\ \mathbf{1} & \end{cases} \text{gdy} \quad \begin{matrix} m = n + 1 \\ m \neq n + 1 \end{matrix}$$

Wartość wszystkich pozostałych formuł atomowych przy wartościowaniu v jest obojętna; możemy, dla ustalenia uwagi, przyjąć, że wszystkim tym formułom wartościowanie v przypisuje wartość **0**.

Rozważając dowolną zmienną indywiduową a_k stwierdzamy, że:

$$v(\bigwedge y\, R(a_k, y)) = \mathbf{0} \quad \text{gdyż mamy} \quad v(R(a_k, a_{k+1})) = \mathbf{0}$$

Wobec dowolności zmiennej a_k możemy dalej uznać, że także:

$$v(\bigvee x \bigwedge y\, R(x, y)) = \mathbf{0}$$

a więc przy skonstruowanym przez nas wartościowaniu v rozważana formuła jest obalona. Zatem $\bigvee x \bigwedge y\, R(x, y)$ nie jest tautologią.

Gdy procedura rozkładu wyradza się w proces nieskończony, świadczy to – podobnie jak brak sprzeczności w diagramie skończonym – o nietautologiczności badanej formuły.

Przejdźmy z kolei do omówienia relacji wynikania w KWRP, odwołującej się – podobnie jak jej odpowiedniki w innych rachunkach logicznych – do pojęcia spełniania, znanego nam z §2 rozdziału I i tam scharakteryzowanego.

Definicja wynikania w KWRP Ze zbioru formuł Φ wynika na gruncie KWRP zbiór formuł Ψ (symbolicznie: $\Phi \models_{KWRP} \Psi$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszelkie wartościowanie KWRP spełniające Φ spełnia też zbiór Ψ.

Relacja wynikania w KWRP posiada wszystkie ogólne własności omówione w lematach 3 - 7 w §2 rozdziału I. Przysługują jej również te własności, które cechowały analogiczną relację zdefiniowaną na gruncie KRZ. Chodzi mianowicie o zależności między wynikaniem a implikacją i negacją ujęte w twierdzenia 1 - 3, §2 rozdziału II. W związku z tym, że charakterystyka prawdziwościowa funktorów implikacji i negacji w obu porównywanych rachunkach jest identyczna, twierdzenia te, odpowiednio wystylizowane, okazują się prawdziwe również na terenie KWRP.

Twierdzenie 1 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KWRP} \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{KWRP} \alpha \to \beta$.

Twierdzenie 2 $\Phi \cup \{\alpha\} \models_{KWRP} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{KWRP} \neg\alpha$.

Twierdzenie 3 $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \models_{KWRP} \{\beta, \neg\beta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi \models_{KWRP} \alpha$.

Dowody tych twierdzeń (semantycznych odpowiedników twierdzeń o dedukcji), w pełni analogiczne do przedstawionych w §2 rozdziału II – pomijamy.

Przypomnijmy z kolei, że regułą nazywamy dowolny zbiór par postaci $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$, gdzie Φ stanowi zbiór przesłanek, a formuła α wniosek reguły (por. uwagi o regułach w §2 rozdziału I). Jak w poprzednio omawianych rachunkach, tak i tu wyróżniamy wśród ogółu reguł reguły normalne i niezawodne.

Definicja reguły normalnej KWRP Reguła jest normalna na gruncie KWRP wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej pary $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$ należącej do tej reguły zachodzi wynikanie: $\Phi \models_{KWRP} \alpha$.

Definicja reguły niezawodnej KWRP Reguła jest niezawodna na gruncie KWRP wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej należącej do niej pary $\langle\Phi, \{\alpha\}\rangle$ zawsze wtedy, gdy Φ jest zbiorem tautologii KWRP, formuła α jest również tautologią tego rachunku.

W komentarzu poprzedzającym lemat 1 stwierdziliśmy, że żadne wyrażenie sensowne języka KRZ nie jest wyrażeniem sensownym języka KWRP. Z tego powodu oba rachunki nie mają żadnych wspólnych reguł. Ustaliliśmy natomiast, że wszystkie schematy formuł KRZ są równocześnie bezkwantyfikatorowymi schematami formuł KWRP. Zatem na schematy reguł KRZ możemy patrzeć jak na schematy bezkwantyfikatorowych reguł KWRP. Uwaga ta odnosi się oczywiście tylko do tych reguł, które schemat posiadają (tj. elementarnych).

Z uwagi na identyczną w KRZ i KWRP charakterystykę prawdziwościową wspólnych im funktorów, jest oczywiste, że schemat elementarnej reguły normalnej z KRZ, rozważany na gruncie KWRP, będzie także reprezentował regułę normalną tego rachunku. Sformułujemy tę obserwację w kolejnym lemacie:

Lemat 2 Każda reguła KWRP oparta na schemacie elementarnej reguły normalnej KRZ jest regułą normalną KWRP.

Lemat ten, pokrewny lematowi 1, jest bezpośrednim wnioskiem z definicji wartościowania KWRP oraz definicji reguł: elementarnej i normalnej.

Przypomnijmy, że w §2 rozdziału II (str. 46) ustaliliśmy, że reguła odrywania o schemacie $\langle\{\alpha \to \beta, \alpha\}, \{\beta\}\rangle$ jest regułą normalną KRZ. Na mocy lematu 2 możemy w szczególności wywnioskować, że reguła odrywania jest regułą normalną KWRP.

W dalszych rozważaniach dużą rolę odegra pewna nieelementarna reguła KWRP zwana **regułą generalizacji (RG)**. Tworzą tę regułę wszystkie pary kształtu $\langle\{\alpha\}, \{\bigwedge a\alpha\}\rangle$ gdzie a jest dowolną zmienną indywiduową. Właśnie z uwagi na dowolność owej zmiennej „przepis" tworzenia poszczególnych par należących do reguły nie stanowi pary podstawowej. Reguła generalizacji nie jest regułą normalną. Zauważmy, że wśród par mających wskazany wyżej schemat budowy jest także następująca: $\langle\{P(x)\}, \{\bigwedge x\, P(x)\}\rangle$, dla której nie zachodzi postulowane w definicji reguły normalnej wynikanie: $P(x) \not\models_{KWRP} \bigwedge x\, P(x)$. Aby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć wartościowanie v, które formule P(x) przypisuje wartość **1**, formule P(y) – wartość **0**, zaś pozostałym formułom atomowym dowolną wartość. Zgodnie z definicją wartościowania KWRP mamy: $v(\bigwedge x\, P(x)) = \mathbf{0}$, a zatem istotnie:

$$P(x) \not\models_{KWRP} \bigwedge x\, P(x).$$

Wykażemy natomiast, że reguła generalizacji jest niezawodna na gruncie KWRP; że jej wniosek „dziedziczy" tautologiczność przesłanki.

LEMAT 3 REGUŁA GENERALIZACJI (RG):
$\{\langle\{\alpha\}, \{\bigwedge a\alpha\}\rangle : \alpha \in \Sigma_{KWRP}$, a jest zmienną indywiduową$\}$
JEST REGUŁĄ NIEZAWODNĄ KWRP.

Dowód. Załóżmy niewprost, że reguła generalizacji nie jest niezwodna. Oznacza to, że pewna formuła α jest tautologią KWRP, natomiast formuła $\bigwedge b\alpha$ (gdzie b jest pewną zmienną indywiduową) tautologią nie jest. Istnieje zatem wartościowanie v, przy którym: $v(\bigwedge b\alpha) = \mathbf{0}$. Zgodnie z definicją wartościowania istnieje zmienna indywiduowa c taka, że $v(\alpha(b/c)) = \mathbf{0}$. Określmy teraz nowe wartościowanie v' zadając je na formułach atomowych następującą równością:

$$v'(\beta) = v(\beta(b/c)) \text{ dla dowolnej formuły atomowej } \beta.$$

Wykażemy dalej, rozumując przez indukcję ze względu na stopień złożoności wyrażenia sensownego, że dla dowolnej formuły γ zachodzi analogiczny warunek, czyli:

$$(*) \qquad v'(\gamma) = v(\gamma(b/c)) \text{ dla dowolnej formuły } \gamma.$$

W kroku indukcyjnym należy kolejno rozważyć sytuację, gdy γ jest formułą złożoną zbudowaną przy użyciu poszczególnych stałych logicznych: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\bigwedge$, $\bigvee$.

1. Załóżmy, że γ ma postać $\delta_1 \wedge \delta_2$, oraz że dowodzona identyczność zachodzi dla δ_1 i dla δ_2 (założenie indukcyjne).

1.1. Gdy $v'(\delta_1 \wedge \delta_2) = \mathbf{1}$, wówczas wobec definicji wartościowania $v'(\delta_1) = \mathbf{1}$ i $v'(\delta_2) = \mathbf{1}$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym $v(\delta_1(b/c)) = \mathbf{1}$ oraz $v(\delta_2(b/c)) = \mathbf{1}$. Ponownie skorzystamy z definicji wartościowania: $v(\delta_1(b/c) \wedge \delta_2(b/c)) = \mathbf{1}$. Ta ostatnia równość, wobec punktu (1) reguł rządzących prawidłowym podstawianiem, oznacza, że również formuła $(\delta_1 \wedge \delta_2)(b/c)$ przy wartościowaniu v przyjmuje wartość **1**. A zatem w rozważanym przypadku dowodzona równość zachodzi.

1.2. Gdy $v'(\delta_1 \wedge \delta_2) = \mathbf{0}$, wówczas wobec definicji wartościowania $v'(\delta_1) = \mathbf{0}$ lub $v'(\delta_2) = \mathbf{0}$. Z założenia indukcyjnego $v(\delta_1(b/c)) = \mathbf{0}$ lub $v(\delta_2(b/c)) = \mathbf{0}$. Niezależnie od tego, która z tych ewentualności zachodzi, stosując definicję wartościowania ustalamy, że:

$$v(\delta_1(b/c)) \wedge \delta_2(b/c)) = \mathbf{0},$$

co wobec punktu (1) reguł rządzących prawidłowym podstawianiem oznacza, że również formuła $(\delta_1 \wedge \delta_2)(b/c)$ przy wartościowaniu v przyjmuje wartość **0**. Tak więc i w tym przypadku dowodzona równość jest prawdziwa.

Podobne rozumowanie należy przeprowadzić, gdy γ jest wyrażeniem alternatywnym, implikacyjnym, negacyjnym czy kwantyfikatorowym. Uzupełnienie tej części dowodu pozostawiamy Czytelnikowi, jako proste, chociaż dosyć długie ćwiczenie. Wniosek, który z niego wynika, pozostaje w sprzeczności z założeniem: okazuje się, że dla dowolnej formuły, więc i dla α, zachodzi identyczność (*). Zatem:

$$v'(\alpha) = v(\alpha(b/c)) = \mathbf{0}.$$

Istnieje więc wartościowanie (jest nim v') falsyfikujące formułę α, która wobec tego nie jest tautologią. Sprzeczność. •

§ 3. System aksjomatyczny KWRP

Przystępując do konstrukcji systemu aksjomatycznego dla KWRP pamiętamy o tym, że funktory tego rachunku postanowiliśmy rozumieć tak, jak w KRZ. W tym stanie rzeczy aksjomatyka KWRP jest (podobnie jak w S4) tylko rozszerzeniem aksjomatyki przyjętej w § 3 rozdziału II dla KRZ. Dołączymy do aksjomatyki KRZ cztery schematy i jedną regułę pierwotną zawierającą syntaktyczną charakterystykę kwantyfikatorów.

Aksjomatem naszego systemu KWRP będzie każda formuła powstająca przez uszczegółowienie któregokolwiek z poniższych schematów, tj. wpisanie w miejsce występujących w nim greckich liter dowolnych wyrażeń sensownych KWRP oraz dowolnych zmiennych indywiduowych w miejsce metazmiennych a, b:

S c h e m a t y a k s j o m a t ó w KWRP

Ax. 1 $\alpha \to (\beta \to \beta)$
Ax. 2 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 4 $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax. 7 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
Ax. 8 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 9 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 10 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
Ax. 11 $(\neg \alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \alpha)$
Ax. 12''' $\bigwedge a\alpha \to \alpha(a/b)$
Ax. 13' $\alpha \to \bigvee a\alpha$
Ax. 14' $\bigwedge a(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bigwedge a\beta)$ o ile a n i e j e s t w o l n e w α
Ax. 15' $\bigwedge a(\alpha \to \beta) \to (\bigvee a\alpha \to \beta)$ o ile a n i e j e s t w o l n e w β.

Ponieważ zbiór wszystkich wyrażeń sensownych KWRP (Σ_{KWRP}) jest nieskończony, na każdym z piętnastu przytoczonych schematów oprzeć można nieskończenie wiele aksjomatów opisywanego systemu. I tak, aksjomatami opartymi na schemacie Ax. 1 są między innymi następujące formuły:

$$\bigvee x P(x) \to (Q(x) \to Q(x))$$
$$\bigwedge x \bigvee y R(x,y) \to (\bigwedge x \bigvee y R(y,x) \to \bigwedge x \bigvee y R(y,x))$$
$$\neg \bigvee x (P(x) \vee Q(x)) \to (S(x,y,z) \to S(x,y,z)).$$

Szczególną uwagę powinien Czytelnik zwrócić na schemty o ograniczonej ważności: Ax. 14' i Ax. 15'. Spośród trzech formuł opartych na schemacie Ax. 14':

$$\bigwedge x(P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \bigwedge x Q(x))$$
$$\bigwedge x(\bigvee x \bigvee y R(x,y) \to P(x)) \to (\bigvee x \bigvee y R(x,y) \to \bigwedge x P(x))$$
$$\bigwedge x(P(x) \to Q(x)) \to (P(x) \to \bigwedge x Q(x))$$

tylko pierwsza i druga są aksjomatami KWRP, natomiast trzecia aksjomatem już nie jest. Nie spełnia ona bowiem dodatkowego warunku, zgodnie z którym w wyrażeniu podstawionym w miejsce metazmiennej α zmienna indywiduowa podstawiona za metazmienną a nie może być wolna. Należy zatem starannie sprawdzać, czy formuły podpadające pod schematy Ax. 14' lub Ax. 15' rzeczywiście są aksjomatami naszego systemu.

W systemie aksjomatycznym KWRP przyjmujemy dwie reguły pierwotne:

odziedziczoną z KRZ **regułę odrywania**:

$$\text{(RO)} \qquad \frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

oraz specyficzną dla KWRP **regułę generalizacji**:

$$\text{(RG)} \qquad \frac{\alpha}{\bigwedge a\alpha.}$$

DEFINICJA TEZY KWRP WYRAŻENIE SENSOWNE α NAZYWAMY TEZĄ SYSTEMU AKSJOMATYCZNEGO KWRP WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ (dowód), KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST
ALBO (1) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KWRP,

ALBO (2) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA LUB REGUŁY GENERALIZACJI.

Dowodzenie tez przebiega w KWRP analogicznie jak w rachunkach dotychczas omówionych i znajduje podobny wyraz graficzny. Wiemy jednak, że praktyczniej jest dowodzić s c h e m a t ó w t e z i temu problemowi poświęcimy teraz chwilę uwagi.

Przede wszystkim ujmijmy w lemat oczywistą konsekwencję faktu, że każdy schemat aksjomatów KRZ jest też schematem aksjomatów KWRP, a jedyna reguła pierwotna systemu aksjomatycznego KRZ jest równocześnie regułą pierwotną systemu aksjomatycznego KWRP:

LEMAT 4 KAŻDY SCHEMAT TEZ KRZ JEST SCHEMATEM TEZ KWRP.

Tak więc podane w § 3 rozdziału II schematy dowodów schematów tez (T 1) $\alpha \to \alpha$ oraz (T 2) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, zachowują swą ważność również na gruncie KWRP.

Podobnie jak w każdym z wcześniej przedstawionych rachunków logicznych, proces dowodzenia schematów tez w KWRP można skrócić i uczynić bardziej przejrzystym, gdy dopuści się możliwość stosowania dodatkowych środków dowodowych w postaci gotowych tez i reguł wyprowadzalnych (por. uwagi na ten temat w § 3 rozdziału I). Przenieśmy więc na teren KWRP dwa przydatne pojęcia: relacji dowiedlności i reguły wyprowadzalnej.

DEFINICJA RELACJI DOWIEDLNOŚCI W KWRP FORMUŁA α JEST DOWIEDLNA W KWRP ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{d-KWRP} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG FORMUŁ $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST:
ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),
ALBO (2) AKSJOMATEM OPARTYM NA JEDNYM ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KWRP,
ALBO (3) POWSTAŁ Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW TEGO CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA LUB REGUŁY GENERALIZACJI.

DEFINICJA REGUŁY WYPROWADZALNEJ W KWRP REGUŁA JEST WYPROWADZALNA W SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM KWRP WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY DLA DOWOLNEJ NALEŻĄCEJ DO NIEJ PARY $\langle \Phi, \{\alpha\} \rangle : \Phi \vdash_{d-KWRP} \alpha$.

Uzasadnienie wyprowadzalności w KWRP pewnej reguły zadanej schematem sprowadza się do wykazania, że ze schematów jej przesłanek dowiedlny jest w KWRP jej wniosek. Ze względu na taki a nie inny dobór schematów aksjomatów i reguł pierwotnych naszego aksjomatycznego systemu KWRP oczywisty jest

LEMAT 5 KAŻDY SCHEMAT WYPROWADZALNEJ REGUŁY ELEMENTARNEJ W KRZ JEST TEŻ SCHEMATEM REGUŁY WYPROWADZALNEJ KWRP.

Tak więc przykładami reguł wyprowadzalnych KWRP są między innymi **reguła komutacji** (RKom), **reguła przechodniości implikacji** (RPI), **reguła poprzedzania** (RP) i **poprzedzona reguła odrywania** (PRO). Ich schematy i uzasadnienia wyprowadzalności znajdzie Czytelnik w § 3 rozdziału II (str. 53 - 54).

W analogiczny sposób możemy uzasadnić wyprowadzalność tych reguł KWRP, które swą budową przypominają regułę generalizacji. Z § 2 tego rozdziału zwracaliśmy uwagę na fakt, że reguła generalizacji o schemacie:

$$\frac{\alpha}{\bigwedge a \alpha}$$

nie jest regułą elementarną. Można jednak patrzeć na nią jak na sumę mnogościową nieskończenie wielu reguł elementarnych o schematach:

$$\frac{\alpha}{\bigwedge x \alpha}, \quad \frac{\alpha}{\bigwedge y \alpha}, \ldots, \quad \frac{\alpha}{\bigwedge x_1 \alpha}, \quad \frac{\alpha}{\bigwedge x_2 \alpha}, \ldots$$

Tak więc schemat reguły generalizacji jest właściwie schematem schematów reguł elementarnych. Podobna własność przysługuje tzw. **poprzedzonej regule generalizacji** (PRG) o schemacie:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \to \beta \\ a \quad \text{nie jest wolna w } \alpha\end{array}}{\alpha \to \bigwedge a \beta}$$

Wykażemy, że jest ona regułą wyprowadzalną w KWRP budując schemat (z uwagi na zmienną generalizowaną) schematów (z uwagi na wyrażenia sensowne α, β) uzasadnień dowiedlności jej wniosku ze zbioru jej przesłanek:

1.	$\alpha \to \beta$	założenie Zastrzeżenie: a nie jest wolna w α!
2.	$\bigwedge a(\alpha \to \beta)$	RG 1
3.	$\bigwedge a(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bigwedge a\beta)$	Ax. 14′ – z uwagi na uczynione w kroku 1 zastrzeżenie
4.	$\alpha \to \bigwedge a\beta$	RO 3, 2

Wyposażeni w dodatkowe środki dowodowe, jednym tylko przykładem zilustrujemy proces dowodzenia schematów tez w aksjomatycznym systemie KWRP. Wykażemy mianowicie:

(T25) $\quad \bigwedge a \neg\alpha \to \neg\bigvee a\alpha$ prawo de Morgana

1.	$\bigwedge a \neg\alpha \to \neg\alpha$	Ax. 12‴ $\alpha/\neg\alpha$, b/a
2.	$(\bigwedge a \neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha)$	T 6 $\alpha/\bigwedge a \neg\alpha$, β/α
3.	$\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha$	RO 2, 1
4.	$\bigwedge a(\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha)$	RG 3
5.	$\bigwedge a(\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha) \to (\bigvee a\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha)$	Ax. 15′ $\beta/\neg\bigwedge a \neg\alpha$ Uwaga! Zmienna a nie jest wolna w $\neg\bigwedge a \neg\alpha$, więc przytoczony tu schemat istotnie jest schematem aksjomatu.
6.	$\bigvee a\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha$	RO 5, 6
7.	$(\bigvee a\alpha \to \neg\bigwedge a \neg\alpha) \to (\bigwedge a \neg\alpha \to \neg\bigvee a\alpha)$	T 6 $\alpha/\bigvee a\alpha$, $\beta/\bigwedge a \neg\alpha$
8.	$\bigwedge a \neg\alpha \to \neg\bigvee a\alpha$	RO 7, 6.

Wzbogacając definicję relacji dowiedlności nowymi środkami dowodowymi, przekształcamy ją w definicję relacji inferencji na gruncie KWRP.

Definicja relacji inferencji w KWRP FORMUŁA α JEST INFEROWALNA W KWRP ZE ZBIORU FORMUŁ Φ (symbolicznie: $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha$) WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY ISTNIEJE SKOŃCZONY CIĄG WYRAŻEŃ SENSOWNYCH $\gamma_1, ..., \gamma_k$, KTÓREGO OSTATNIM WYRAZEM JEST $\alpha (\gamma_k = \alpha)$ I W KTÓRYM DOWOLNY WYRAZ JEST:

ALBO (1) ELEMENTEM ZBIORU Φ (ZAŁOŻENIEM),

ALBO (2) TEZĄ KWRP (W SZCZEGÓLNOŚCI – AKSJOMATEM OPARTYM NA KTÓRYMŚ ZE SCHEMATÓW AKSJOMATÓW KWRP),

ALBO (3) POWSTAJE Z POPRZEDZAJĄCYCH GO WYRAZÓW CIĄGU PRZEZ ZASTOSOWANIE REGUŁY ODRYWANIA, REGUŁY GENERALIZACJI ALBO DOWOLNEJ REGUŁY WYPROWADZALNEJ W KWRP.

Relacji inferencji w KWRP przysługują wszystkie ogólne własności omówione w lematach 8 - 11 § 3 rozdziału I. Wymieńmy je w kolejnym lemacie:

Lemat 6 (i) $\Phi \vdash_{d-KWRP} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha$;
(ii) $\varnothing \vdash_{KWRP} \alpha$ WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TEZĄ KWRP;
(iii) $\Phi \vdash_{KWRP} \Phi$;
(iv) JEŚLI $\Phi \vdash_{KWRP} \Psi$ ORAZ $\Psi \vdash_{KWRP} \Omega$, TO $\Phi \vdash_{KWRP} \Omega$;
(v) JEŚLI $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha$ ORAZ $\Phi \subset \Psi$, TO $\Psi \vdash_{KWRP} \alpha$.

Pamiętamy, jak ważną i praktycznie przydatną własnością relacji inferencji w KRZ była zależność wyrażona w twierdzeniu o dedukcji wprost. Semantyczny odpowiednik tego twierdzenia nie doznał na gruncie KWRP żadnych ograniczeń. Można byłoby się więc spodziewać, że również syntaktyczna wersja tego twierdzenia zachowa ważność w omawianym rachunku. Okazuje się jednak, że w wypowiedzi twierdzenia o dedukcji wprost należy poczynić pewne zastrzeżenia, aby stało się ono dowiedlne środkami KWRP. Zastrzeżenia te dotyczą możliwości korzystania z reguły generalizacji w toku dedukcji uzasadniającej dowiedlność β ze zbioru założeń $\Phi \cup \{\alpha\}$.

Twierdzenie 4 JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-KWRP} \beta$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W α, TO $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha \to \beta$.

Dowód. Załóżmy, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{d-KWRP} \beta$ oraz, że wszystkie zmienne generalizowane w toku dedukcji uzasadniającej zachodzenie tej relacji nie są wolne w α. Zgodnie z definicją relacji dowiedlności w KWRP istnieje skończony ciąg formuł uzasadniający dowiedlność β ze zbioru $\Phi \cup \{\alpha\}$. Niech w tym ciągu formuły $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ze zbioru Φ, tworzące zbiór Ψ, pełnią rolę założeń. A zatem formuła β jest dowiedlna ze zbioru $\Psi \cup \{\alpha\}$. Oznacza to istnienie skończonego ciągu

Π: $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, w którym $\gamma_k = \beta$, a który uzasadnia tę dowiedlność. Ciąg Π zbudowany jest wyłącznie przy użyciu pierwotnych środków dowodowych. Tworzymy teraz nowy, pochodny względem Π, ciąg formuł Ω:

$$(\Omega) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha \to \gamma_1, \alpha \to \gamma_2, \dots, \alpha \to \gamma_k.$$

(ostatni wyraz to formuła $\alpha \to \beta$) i wykazujemy stosując indukcję z uwagi na budowę ciągu Π, że Ω uzasadnia inferowalność formuły $\alpha \to \beta$ ze zbioru założeń Ψ. Dowód ten prowadzimy tak samo jak dowód twierdzenia 4 w §3 rozdziału II uzupełniając go wszakże następującym punktem.

(4) Jeśli formuła γ_m znalazła się w ciągu Π jako wynik stosowania reguły generalizacji z uwagi na pewną zmienną a do pewnej formuły γ_t ($t < m$), wówczas $\gamma_m = \bigwedge a\gamma_t$. Dla indukcji zakładamy, że formuła $\alpha \to \gamma_t$ ma już w ciągu Ω uzasadnienie. Ponieważ założyliśmy, że generalizowane w ciągu Π zmienne, a więc w szczególności i zmienna a nie są wolne w α, zatem możemy skorzystać z poprzedzonej reguły generalizacji dla uzasadnienia przejścia od formuły $\alpha \to \gamma_t$ do formuły $\alpha \to \gamma_m$. Tym samym każde wyrażenie znalazło się w ciągu Ω z uzasadnieniem dopuszczanym przez definicję inferencji. Ciąg Ω jest zatem dowodem inferowalności $\alpha \to \beta$ ze zbioru formuł Ψ. A ponieważ $\Psi \subset \Phi$, więc wobec lematu 6(v) wnioskujemy, że $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha \to \beta$ ●

Zauważmy, że w wypowiedzi twierdzenia 4 znalazła się jeszcze jedna drobna zmiana w porównaniu z pierwowzorem, jakim jest twierdzenie 4 z §3 rozdziału II. Otóż zamiast zakładać, że β jest i n f e r o w a l n e z $\Phi \cup \{\alpha\}$, przyjęliśmy, że jest ono z tego zbioru d o w i e d l n e. Ta korekta nie ma wobec lematu 6(i) żadnego istotnego znaczenia. Dzięki niej możliwe jest natomiast jasne sformułowanie warunku dotyczącego sposobu występowania niektórych zmiennych w formule α. Gdybyśmy w wypowiedzi twierdzenia założyli, że $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KWRP} \beta$, wówczas zamiast mówić o zmiennych generalizowanych w toku dowodu, musielibyśmy nieprecyzyjnie zastrzegać, że chodzi o zmienne wiązane kwantyfikatorami w wyniku użycia reguł wyprowadzalnych pochodnych względem reguły generalizacji.

Twierdzenia o dedukcji niewprost podlegają temu samemu ograniczeniu, co twierdzenie o dedukcji wprost. Poza tym ich dowody przebiegają analogicznie jak dowody twierdzeń 5 i 6 z §3 rozdziału II; dowody te pominiemy.

TWIERDZENIE 5 JEŻELI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \{\beta, \neg\beta\}$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W α, TO $\Phi \vdash_{KWRP} \neg\alpha$.

TWIERDZENIE 6 JEŻELI $\Phi \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \{\beta, \neg\beta\}$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W α, TO $\Phi \vdash_{KWRP} \alpha$.

Ponieważ, mimo ograniczeń, jakim podlegają, twierdzenia o dedukcji mają pewne znaczenie dla praktyki dowodowej na terenie KWRP przytoczymy jeszcze, podobnie jak to uczyniliśmy w KRZ, wynikające z nich użyteczne wnioski:

TWIERDZENIE O DEDUKCJI WPROST (TDW) DLA KWRP JEŻELI $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \beta$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W ŻADNEJ ZE STANOWIĄCYCH ZAŁOŻENIA FORMUŁ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, TO $\varnothing \vdash_{KWRP} \alpha_1 \to (\dots(\alpha_k \to \beta)\dots)$.

SŁABE TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIEWPROST (STDN) DLA KWRP JEŻELI $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \{\gamma, \neg\gamma\}$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W ŻADNEJ ZE STANOWIĄCYCH ZAŁOŻENIA FORMUŁ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$, TO $\varnothing \vdash_{KWRP} \alpha_1 \to (\dots(\alpha_k \to \neg\beta)\dots)$.

MOCNE TWIERDZENIE O DEDUKCJI NIEWPROST (MTDN) DLA KWRP JEŻELI $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \neg\beta\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \{\gamma, \neg\gamma\}$ ORAZ ZMIENNE PODLEGAJĄCE GENERALIZACJI W TOKU DEDUKCJI UZASADNIAJĄCEJ ZACHODZENIE TEJ RELACJI NIE SĄ WOLNE W ŻADNEJ ZE STANOWIĄCYCH ZAŁOŻENIA FORMUŁ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$, TO $\varnothing \vdash_{KWRP} \alpha_1 \to (\dots(\alpha_k \to \beta)\dots)$.

A oto przykłady stosowania twierdzeń o dedukcji w KWRP:

(1) Wykażemy, że (T 26) $\bigwedge \mathbf{a}(\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}) \to (\bigwedge \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha} \to \bigwedge \mathbf{a}\boldsymbol{\beta})$ jest schematem tez KWRP. W tym celu najpierw dowiedziemy, że zachodzi relacja dowiedlności: $\{\bigwedge a(\alpha \to \beta), \bigwedge a\alpha\} \vdash_{d\text{-}KWRP} \bigwedge a\beta$

1. $\bigwedge a(\alpha \to \beta)$ założenie

2.	$\bigwedge a\alpha$	założenie
3.	$\bigwedge a(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$	Ax. 12''' $\alpha/\alpha \to \beta$, b/a
4.	$\alpha \to \beta$	RO 3, 1
5.	$\bigwedge a\alpha \to \alpha$	Ax. 12''' b/a
6.	α	RO 5, 2
7.	β	RO 4, 6
8.	$\bigwedge a\beta$	RG 7

Wykazaliśmy, że istotnie wskazana relacja dowiedlności zachodzi. Należy jeszcze sprawdzić, czy spełniony jest także warunek dodatkowy, od którego w równej mierze zależy możliwość użycia TDW. Chodzi o to, jaki jest status zmiennych generalizowanych w toku dedukcji w jego założeniach. W naszej dedukcji stosowaliśmy regułę generalizacji tylko raz względem zmiennej a. Pytamy więc, czy zmienna ta nie miała wolnych wystąpień w którymkolwiek z założeń (wiersze 1 i 2). Kształt tych wyrażeń (oba zaczynają się od dużego kwantyfikatora dotyczącego właśnie zmiennej a) przekonuje nas, że w żadnym z nich zmienna a nie ma wolnych wystąpień. Można więc stosować TDW, skutkiem czego będzie uznanie za schemat tez KWRP: $\bigwedge a(\alpha \to \beta) \to (\bigwedge a\alpha \to \bigwedge a\beta)$.

(2) Wykażemy, że (T 27) $\bigwedge \mathbf{a}(\boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\beta}) \to (\boldsymbol{\alpha} \vee \bigwedge \mathbf{a}\boldsymbol{\beta})$, gdy zmienna a nie jest wolna w α, jest schemtem tez KWRP. W tym celu dowiedziemy, że ze zbioru $\{\bigwedge a(\alpha \vee \beta), \neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta)\}$ dowiedlna jest para formuł sprzecznych.

1.	$\bigwedge a(\alpha \vee \beta)$	założenie
2.	$\neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta)$	założenie
3.	$\bigwedge a(\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \beta)$	Ax. 12''' $\alpha/\alpha \vee \beta$, b/a
4.	$\alpha \vee \beta$	RO 3, 1
5.	$\alpha \to (\alpha \vee \bigwedge a\beta)$	Ax. 8 $\beta/\bigwedge a\beta$
6.	$\bigwedge a\beta \to (\alpha \vee \bigwedge a\beta)$	Ax. 9 $\beta/\bigwedge a\beta$
7.	$(\alpha \to (\alpha \vee \bigwedge a\beta)) \to (\neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta) \to \neg\alpha)$	T 7 $\beta/\alpha \vee \bigwedge a\beta$
8.	$\neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta) \to \neg\alpha$	RO 7, 5
9.	$\neg\alpha$	RO 8, 2
10.	$(\bigwedge a\beta \to (\alpha \vee \bigwedge a\beta)) \to (\neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta) \to \neg\bigwedge a\beta)$	T 7 $\alpha/\bigwedge a\beta$, $\beta/\alpha \vee \bigwedge a\beta$
11.	$\neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta) \to \neg\bigwedge a\beta$	RO 10, 6

12.	$\neg\bigwedge a\beta$	RO 11, 2
13.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	T 2 $\alpha/\neg\alpha$, $\beta/\neg\beta$
14.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	RO 13, 9
15.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$	Ax. 11 $\alpha/\beta, \beta/\alpha$
16.	$\alpha \to \beta$	RO 15, 14
17.	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \to \beta))$	Ax. 10 γ/β
18.	$(\beta \to \beta) \to ((\alpha \vee \beta) \to \beta)$	RO 17, 16
19.	$\beta \to \beta$	T 1 α/β
20.	$(\alpha \vee \beta) \to \beta$	RO 18, 19
21.	β	RO 21, 4
22.	$\bigwedge a\beta$	RG 21

W wierszach 12 i 22 wystąpiła para formuł sprzecznych. Przejście od konkretnej do dowolnej pary formuł sprzecznych, wobec obowiązywania prawa przepełnienia (T 9), nie nastręcza żadnych trudności. Można więc przyjąć, że wykazaliśmy właśnie, że $\{\bigwedge a(\alpha \vee \beta), \neg(\alpha \vee \bigwedge a\beta)\} \vdash_{d\text{-KWRP}} \{\gamma, \neg\gamma\}$. Przygotowując się do stosowania MTDN sprawdźmy jeszcze status jedynej generalizowanej w dedukcji zmiennej a w założeniach (w. 1 i 2). Otóż zmienna ta z uwagi na kształt założeń i uczynione co do formuły α zastrzeżenie (że a nie jest w niej wolna), nie może mieć w żadnym z założeń wolnego wystąpienia. Stąd, na mocy MTDN wnioskujemy, że gdy z m i e n n a a n i e m a w o l n y c h w y s t ą p i e ń w α, $\bigwedge a(\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \bigwedge a\beta)$ jest schematem tez KWRP.

(3) Wykażemy, że gdy zachodzi $(\alpha(b/a))(a/b) = \alpha$ formuła (T 28) $\bigwedge \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{b}/\mathbf{a}) \to \bigwedge \mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}$ zwana **prawem przemianowywania zmiennych związanych** jest schematem tez KWRP. W tym celu dowiedziemy, że: $\{\bigwedge a\alpha(b/a)\} \vdash_{d\text{-KWRP}} \bigwedge b\alpha$.

1.	$\bigwedge a\alpha(b/a)$	założenie
2.	$\bigwedge a\alpha(b/a) \to (\alpha(b/a))(a/b)$	Ax. 12''' $\alpha/\alpha(b/a)$
3.	$(\alpha(b/a))(a/b)$ [$= \alpha$]	RO 2, 1 (por. założenie)
4.	$\bigwedge b\alpha$	RG 3

Jak widać, usunięta przez podstawianie zmienna indywiduowa b nie może w założeniu występować jako zmienna wolna. Stąd, jako że jest to jedyna zmienna generalizowana w toku dowodu, możemy skorzystać z TWD – na jego mocy (T 28) jest schematem tez KWRP.

Kolejny przykład niech stanowi dla Czytelnika ostrzeżenie przed nieuważnym stosowaniem twierdzeń o dedukcji, w szczególności zaniedbywaniem sprawdzania, czy warunek dotyczący statusu zmiennych generalizowanych w założeniach jest spełniony.

(4) Łatwo wykazać, że: $\{\alpha\} \vdash_{d\text{-KWRP}} \bigwedge a\alpha$. Świadczy o tym następujący dwuelementowy ciąg:

1. α — założenie
2. $\bigwedge a\alpha$ — RG 1

Na tej podstawie jednak nie możemy uznać $\alpha \to \bigwedge a\alpha$ za schemat tez KWRP, gdyż nie ma żadnej gwarancji, że zmienna a w założeniu nie występuje jako zmienna wolna. Co więcej, wiadomo, że pewna wedle tego schematu zbudowana formuła (por. przykład 2 z § 2 tego rozdziału) nie jest tautologią KWRP.

Na zakończenie rozważań o inferencji w KWRP odnotujmy, że i tutaj obowiązuje lemat

LEMAT 7 JEŚLI $\Phi \cup \{\alpha\} \vdash_{KWRP} \gamma$ ORAZ $\Phi \cup \{\beta\} \vdash_{KWRP} \gamma$, TO $\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash_{KWRP} \gamma$.

Dowód lematu 7 z uwagi na ograniczenia, jakim podlegają w KWRP twierdzenia o dedukcji, nie może być przeprowadzony tak, jak było to zrobione w KRZ. Nie napotykamy natomiast żadnych przeszkód, gdy zechcemy poprowadzić go tak samo jak w Ł3.

§ 4. *Twierdzenie o pełności dla KWRP*

TWIERDZENIE 7' (O PEŁNOŚCI DLA KWRP) DLA DOWOLNEGO WYRAŻENIA SENSOWNEGO α JĘZYKA KWRP: α JEST TEZĄ KWRP WTEDY I TYLKO WTEDY, GDY α JEST TAUTOLOGIĄ KWRP.

Dowód. Aby wykazać, że

(I) Każda teza KWRP jest równocześnie tautologią tego rachunku, wystarczy sprawdzić, że:

1° każdy schemat Ax. 1 - Ax. 15' jest schematem tautologii oraz, że
2° obie reguły pierwotne systemu aksjomatycznego KWRP są niezawodne.

Jeżeli chodzi o 1°, to Czytelnik, który przeprowadził już dowód twierdzenia o pełności dla KRZ, może w tym miejscu, powołując się na lemat 1, wykorzystać dotychczasowe ustalenia dotyczące schematów Ax. 1 - Ax. 11 i poddać sprawdzeniu jedynie cztery schematy kwantyfikatorowe: Ax. 12''' - Ax. 15'.

Co się tyczy 2°, to zauważmy, że konieczne sprawdzenia zostały już przeprowadzone: z lematu 3 wiemy, że reguła generalizacji jest niezawodna, niezawodność zaś reguły odrywania wynika z lematu 2, przykładu 1 ze strony 46 i twierdzenia 1 z § 2 rozdziału I.

Uzasadniamy z kolei fakt, że

(II) Każda tautologia KWRP jest zarazem tezą systemu aksjomatycznego KWRP.

W każdym z czterech dotychczas przedstawionych rachunków logicznych, dowodząc twierdzenia o pełności, posługiwaliśmy się metodą henkinowską w wersji korzystającej z twierdzenia o relatywnych nadsystemach zupełnych. Tym razem zastosujemy inną wersję – pochodzącą od J. Reichbacha.

Podstawowa idea dla obu wersji jest ta sama: skonstruować takie wartościowanie, które falsyfikuje daną nie-tezę. Różnica sprowadza się do tego, że w ujęciu zaproponowanym przez Assera konstruujemy zbiór formuł przy takim wartościowaniu weryfikowanych, natomiast w ujęciu Reichbacha budujemy zbiór formuł falsyfikowanych przez to wartościowanie.

Zanim całe rozumowanie tworzące dowód drugiej części twierdzenia o pełności dla KWRP przedstawimy Czytelnikowi w szczegółach, przypomnimy tu kilka schematów tez KRZ, które (por. lemat 4) są równocześnie schematami tez KWRP. Będziemy z nich korzystać w toku dowodu:

(A)	$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$	prawo idempotencji dla $\vee$
(B)	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	prawo przemienności dla $\vee$
(C)	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$	prawo łączności dla $\vee$
(C')	$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \to (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$	prawo łączności dla $\vee$
(D)	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$	prawo rozdzielności $\vee$ względem $\wedge$

(D') $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma))$	prawo wyłączania $\vee$ przed $\wedge$
(E) $\alpha \vee \neg\alpha$	prawo wyłączonego środka
(F) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	prawo niesprzeczności
(G) $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$	
(H) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$	sylogizm hipotetyczny
(I) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$	
(J) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$	paradoks implikacji
(K) $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow \alpha$	prawo rezolucji

Pomocne będą nam także następujące schematy kwantyfikatorowe:

(L) $\bigwedge a\alpha(b/a) \rightarrow \bigwedge b\alpha$ (T 28)

(M) gdy zmienna a nie jest wolna w formule α

$\bigwedge a(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \bigwedge b\alpha)$ (T 27)

(N) $\bigwedge a\neg\alpha \rightarrow \neg\bigvee a\alpha$ (T 25)

Wykorzystywać będziemy także wyprowadzalne w KRZ (a więc i w KWRP – por. lemat 5) reguły: dołączania alternatywy (DA), opuszczania alternatywy (OA), dołączania koniunkcji (DK) i opuszczania koniunkcji (OK) o schematach:

(DA) $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$ $\qquad$ $\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\beta}{\alpha}$ (OA)

(DK) $\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$ $\qquad$ $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ (OK)

Uzasadnienie ich wyprowadzalności w KRZ nie nastręczy uważnemu Czytelnikowi żadnych trudności.

Po tych wstępnych uwagach załóżmy dla dowodu, że pewna tautologia KWRP: α, nie jest tezą tego rachunku. Wszystkie wyrażenia sensowne języka KWRP uszeregujmy w dowolny ciąg

$$\Sigma^{\rightarrow} = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

który spełnia trzy następujące postulaty:

1° Wyrazem początkowym ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ niech będzie formuła $\alpha(\gamma_0 = \alpha)$.

2° Jeżeli $\gamma_k = \bigwedge a\beta$, wówczas niech $\gamma_{k+1} = \beta(a/b)$, gdzie zmienna b jest taką zmienną indywiduową, która w żadnym z dotychczas wymienionych wyrazów ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$(tj. $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$) nie miała wolnych wystąpień.

3° Jeżeli $\gamma_k = \neg\bigvee a\beta$, wtedy niech $\gamma_{k+1} = \neg\beta(a/b)$, gdzie zmienna b jest taką zmienną indywiduową, która w żadnym z dotychczas wymienionych wyrazów ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ (tj. $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$) nie miała wolnych wystąpień.

Odnotujmy, że wskazanie takiej zmiennej, o jakiej mowa w punktach 2° i 3°, jest zawsze możliwe, ponieważ w skończonej liczbie formuł, z których każda ma skończoną długość, wystąpić może tylko skończenie wiele zmiennych indywiduowych, podczas gdy zbiór ich jest nieskończony. Zawsze więc w takim nieskończonym zbiorze uda się wskazać zmienną, która spełniać będzie postawiony przez nas warunek.

Z gotowego już ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ wybierzemy teraz podciąg:

$$\Phi = \delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$$

stosując przy doborze jego kolejnych wyrazów następujące zasady:

1° Pierwszym wyrazem ciągu Φ jest $\gamma_0(\delta_0 = \gamma_0 = \alpha)$.

2° Wyraz γ_k z ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ włączamy do podciągu Φ jako jego m + 1 wyraz ($\delta_{m+1} = \gamma_k$) wtedy i tylko wtedy, gdy wraz z dotychczas włączonymi do Φ wyrażeniami $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ tworzy on alternatywę $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_m \vee \gamma_k$, która nie jest tezą aksjomatycznego systemu KWRP.

Jeżeli natomiast taka alternatywa jest tezą KWRP, wyrazu γ_k nie włączamy do ciągu Φ, lecz sprawdzamy, czy następny, γ_{k+1}-szy wyraz spełnia postawiony warunek 2°.

Utworzony w opisany wyżej sposób ciąg Φ posiada dwie istotne dla dalszych naszych rozważań własności:

LEMAT 8 (1) ŻADNA ALTERNATYWA UTWORZONA ZE SKOŃCZONEJ LICZBY WYRAZÓW CIĄGU Φ NIE JEST TEZĄ KWRP.

(2) JEŻELI $\beta \notin \Phi$, TO DLA PEWNEJ LICZBY NATURALNEJ m ALTERNATYWA $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_m \vee \beta$ JEST TEZĄ KWRP.

Dowód. (1) Przypuśćmy, że pewna alternatywa $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$ utworzona ze skończonej liczby formuł należących do Φ jest tezą KWRP. Wśród składników tej alternatywy istnieje taki, który w ciągu Φ ma wskaźnik wyższy od pozostałych. Niech wskaźnikiem tym będzie k (tzn. jeden z członów alternatywy, powiedzmy β_j, jest wyrazem δ_k). Weźmy pod uwagę alternatywę $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$. Oczywiste jest, że $\{\beta_1, ..., \beta_n\} \subset \{\delta_0, ..., \delta_k\}$. Skoro alternatywa $\beta_1 \vee ... \vee \beta_n$ jest tezą KWRP, to jest nią także alternatywa $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$ a to z uwagi na regułę dołączania alternatywy (DA) i schematy tez (A), (B), (C), (C'). To ostatnie stwierdzenie pozostaje w sprzeczności z 2° zasadą konstrukcji podciągu Φ.

(2) Załóżmy, że $\beta \notin \Phi$. Formuła β ma naturalnie swoje miejsce w ciągu $\Sigma^{\to}$, gdyż ciąg ten zawiera wszystkie wyrażenia sensowne KWRP. Niech więc $\beta = \gamma_k$. Konstruując ciąg Φ, gdy już zaliczyliśmy do niego pewną liczbę wyrazów (co najmniej δ_0, które z założenia nie jest tezą), powiedzmy $\delta_0, ..., \delta_m$, bierzemy pod uwagę formułę γ_k i sprawdzamy, czy nadaje się ona na kolejny wyraz ciągu Φ. Skoro jednak założyliśmy, że $\beta \notin \Phi$, to zgodnie z 2° zasadą konstrukcji ciągu Φ, musiało się okazać, że alternatywa $\delta_0 \vee ... \vee \delta_m \vee \beta$ jest tezą KWRP.

W kolejnym lemacie sformułujemy warunki, które musi spełniać formuła złożona, o ile jest elementem ciągu Φ:

LEMAT 9 (1) $\neg\beta \in \Phi$ WTW, GDY $\beta \notin \Phi$
(2) $\beta \wedge \gamma \in \Phi$ WTW, GDY $\beta \in \Phi$ LUB $\gamma \in \Phi$
(3) $\beta \vee \gamma \in \Phi$ WTW, GDY $\beta \in \Phi$ ORAZ $\gamma \in \Phi$
(4) $\beta \to \gamma \in \Phi$ WTW, GDY $\beta \notin \Phi$ ORAZ $\gamma \in \Phi$
(5) $\bigwedge a \beta \in \Phi$ WTW, GDY DLA PEWNEJ ZMIENNEJ INDYWIDUOWEJ b: $\beta(a/b) \in \Phi$
(6) $\bigvee a \beta \in \Phi$ WTW, GDY DLA KAŻDEJ ZMIENNEJ INDYWIDUOWEJ b: $\beta(a/b) \in \Phi$

Dowód. (1-i) Załóżmy, że $\neg\beta \in \Phi$ i niewprost, że $\beta \in \Phi$. Zgodnie z lematem 8(1) formuła $\beta \vee \neg\beta$ jako alternatywa skończonej liczby wyrazów ciągu Φ nie jest tezą KWRP, co jest sprzeczne z (E).

(1-ii) Załóżmy, że $\beta \notin \Phi$ i niewprost: $\neg\beta \notin \Phi$. Wobec lematu 8(2) istnieją takie dwie liczby naturalne: k oraz m, że alternatywy $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta$ oraz $\delta_0 \vee ... \vee \delta_m \vee \neg\beta$ obie są tezami KWRP. Przyjmijmy, że $k > m$ (dla $k < m$ rozumowanie biegnie analogicznie, natomiast przypadek $k = m$ jest, z uwagi na schemat (K) i lemat 8(1), wykluczony). Stosując (w miarę potrzeby) regułę dołączania alternatywy (DA) i schematy (B), (C), (C') wykażemy, że alternatywa $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \neg\beta$ też jest tezą KWRP. Na mocy reguły dołączania koniunkcji (DK) tezą KWRP jest także:

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta) \wedge (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \neg\beta)$$

Posługując się schematem tez (D') wykazać możemy dalej, że i

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k) \vee (\beta \wedge \neg\beta)$$

jest tezą. Tezą wszakże jest też (F) $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$, zaś reguła opuszczania alternatywy (OA) pozwala stąd wnioskować, że powinno być tezą także $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$, co wobec faktu, że wszystkie składniki tej alternatywy należą do Φ, jest sprzeczne z lematem 8(1).

(2-i) Załóżmy, że $\beta \wedge \gamma \in \Phi$, a nadto, że ani β, ani γ do Φ nie należą. Zważywszy na lemat 8(2), stwierdzamy, że istnieją takie dwie liczby naturalne: k oraz m, że $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta$ oraz $\delta_0 \vee ... \vee \delta_m \vee \gamma$ są tezami KWRP. Przyjmijmy, że $k \geqslant m$ (dla $k < m$ rozumowanie jest analogiczne). Reguła dołączania alternatywy (DA) i schematy (B), (C), (C') umożliwiają nam wykazanie, że również $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma$ jest tezą KWRP. Na mocy reguły dołączania koniunkcji (DK) tezą KWRP jest także:

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta) \wedge (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma).$$

Posługując się schematem tez (D') wnioskować możemy, że także

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

jest tezą, co wobec faktu, że wszystkie składniki tej alternatywy należą do Φ, jest sprzeczne z lematem 8(1).

(2-ii) Załóżmy teraz, że $\beta \in \Phi$ (gdy $\gamma \in \Phi$ – rozumowanie analogiczne). Ponadto, dla dowodu niewprost, niech $\beta \wedge \gamma \notin \Phi$. Z uwagi na lemat 8(2) istnieje taka liczba k, dla której alternatywa $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \wedge \gamma)$ jest tezą KWRP. Posługując się schematem (D) wyprowadzamy stąd wniosek, że tezą KWRP jest także

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta) \wedge (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma).$$

Korzystając z reguły opuszczania koniunkcji (OK) wykazujemy, że formuła $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta$ też jest tezą omawianego rachunku. Ponieważ jednak wszystkie człony tej alternatywy należą do Φ, popadamy w sprzeczność z lematem 8(1).

(3 - i) Załóżmy, że $\beta \vee \gamma \in \Phi$ i przyjmijmy niewprost, że równocześnie $\beta \notin \Phi$ (gdy $\gamma \notin \Phi$ — rozumowanie analogiczne). Zważywszy na lemat 8(2) istnieje taka liczba k, że $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta$ jest tezą KWRP. Stosując regułę dołączania alternatywy (DA) wnioskujemy, że również $(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta) \vee \gamma$ jest tezą KWRP, natomiast posługując się schematem (C') wyprowadzamy dalszy wniosek, że tezą tego rachunku jest także $\delta_0 \vee ... \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \vee \gamma)$. Popadamy wówczas w sprzeczność z lematem 8(1), ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do Φ.

(3 - ii) Załóżmy, że $\beta \in \Phi$ oraz, że $\gamma \in \Phi$, a nadto, dla dowodu niewprost, że $\beta \vee \gamma \notin \Phi$. Zgodnie z lematem 8(2) istnieje taka liczba k, że $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \vee \gamma)$ jest tezą KWRP. Posługując się schematem (C) wyprowadzamy stąd wniosek, że tezą tego rachunku jest także $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta \vee \gamma$. Ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do Φ, popadamy w sprzeczność z lematem 8(1).

(4 - i) Załóżmy, że $\beta \rightarrow \gamma \in \Phi$ i niewprost, że: $\beta \in \Phi$ lub $\gamma \notin \Phi$. Rozpatrzmy najpierw możliwość, że $\beta \in \Phi$.

(A) Zgodnie z lematem 8(1), żadna skończona alternatywa wyrazów ciągu Φ nie jest tezą KWRP. W szczególności nie może być więc tezą $\beta \vee (\beta \rightarrow \gamma)$, co jest sprzeczne ze stwierdzeniem, że schemat (J) jest schematem tez KWRP.

(B) Gdy $\gamma \notin \Phi$, z uwagi na lemat 8(2) istnieć musi taka liczba k, dla której $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma$ jest tezą KWRP. Korzystając ze schematu (I) w wersji, w której: α/γ, $\beta/\beta \rightarrow \gamma$, $\gamma/\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$ oraz z (T 2) $\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ i reguły odrywania (RO), możemy wnioskować, że formuła

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma) \rightarrow (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \rightarrow \gamma))$$

jest tezą KWRP. Ponieważ poprzednik jej, jak stwierdziliśmy wyżej, też jest tezą, więc na mocy reguły odrywania jest tezą również następnik: $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \rightarrow \gamma)$. Ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do Φ, popadamy w sprzeczność z lematem 8(1).

(4 - ii) Załóżmy, że $\beta \notin \Phi$, $\gamma \in \Phi$, a dla dowodu niewprost, że $\beta \rightarrow \gamma \notin \Phi$. Z uwagi na lemat 8(2), istnieją takie liczby naturalne k oraz m, że $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta$ i $\delta_0 \vee ... \vee \delta_m \vee (\beta \rightarrow \gamma)$ są tezami KWRP. Przypomnijmy, że: $k \geqslant m$ (dla $k < m$ rozumowanie jest analogiczne). Reguła dołączania alternatywy (DA) i schematy (B), (C), (C') umożliwiają wykazanie, że także: $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \rightarrow \gamma)$ jest tezą KWRP. Na

mocy reguły dołączania koniunkcji (DK) tezą KWRP jest również:

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta) \wedge (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee (\beta \rightarrow \gamma)).$$

Posługując się schematem tez (D') wnioskować możemy, że i

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k) \vee (\beta \wedge (\beta \rightarrow \gamma))$$

jest tezą rozważanego rachunku. Skorzystajmy teraz ze schematu (I) w wersji w której: $\alpha/(\beta \wedge (\beta \rightarrow \gamma))$, β/γ, $\gamma/\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$ oraz z (G) $(\beta \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow \gamma$ i reguły odrywania (RO), aby wywnioskować, że formuła

$$((\delta_0 \vee ... \vee \delta_k) \vee (\beta \wedge (\beta \rightarrow \gamma))) \rightarrow (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma)$$

jest tezą KWRP. Ponieważ jej poprzednik, jak stwierdziliśmy wyżej, też jest tezą, na mocy reguły odrywania tezą jest i następnik: $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \gamma$. Ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do zbioru Φ, popadamy w sprzeczność z lematem 8(1).

(5 - i) Niech $\bigwedge a\beta \in \Phi$. Przyjmijmy, że formuła ta jest k-tym wyrazem ciągu Φ: $\delta_k = \bigwedge a\beta$. Przypuśćmy dalej, że formuła ta figuruje w ciągu $\Sigma^{\rightarrow}$ z numerem m: $\gamma_m = \bigwedge a\beta$. Zgodnie z określeniem tego ostatniego ciągu, kolejnym jego wyrazem, z numerem m + 1, jest formuła $\beta(a/b)$, przy czym zmienna b nie wystąpiła jako zmienna wolna w żadnym z wcześniejszych wyrazów $\Sigma^{\rightarrow}$. Czy alternatywa $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta(a/b)$ może być tezą KWRP? Gdyby ta alternatywa istotnie była tezą, na mocy reguły generalizacji byłoby też tezą wyrażenie: $\bigwedge b(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta(a/b))$. Ponieważ zmienna b nie jest wolna w wyrażeniu $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$, więc na mocy schematu (M) na miano tezy zasługiwałaby również formuła $(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k) \vee \bigwedge b\beta(a/b)$. Korzystając ze schematu (I) w wersji, w której: $\alpha/\bigwedge b\beta(a/b)$, $\beta/\bigwedge a\beta$, $\gamma/\delta_0 \vee ... \vee \delta_k$ oraz z (L) $\bigwedge b\beta(a/b) \rightarrow \bigwedge a\beta$ i reguły odrywania (RO), możemy wnioskować, że formuła

$$(\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \bigwedge b\beta(a/b)) \rightarrow (\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \bigwedge a\beta)$$

jest tezą KWRP. Biorąc pod uwagę poprzednie rozważania, musielibyśmy też uznać za tezę $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \bigwedge a\beta$. Ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do Φ, popadlibyśmy w sprzeczność z lematem 8(1). Aby tej sprzeczności uniknąć, musimy uznać, że formuła $\delta_0 \vee ... \vee \delta_k \vee \beta(a/b)$ nie jest tezą. Skoro tak, to wyrażenie $\beta(a/b)$ należy włączyć do ciągu Φ jako jego k + 1-szy wyraz. Tym samym wykazaliśmy istnienie takiej zmiennej indywiduowej b, dla której $\beta(a/b) \in \Phi$.

(5-ii) Załóżmy, że dla pewnej zmiennej indywiduowej b zachodzi: $\beta(a/b) \in \Phi$ i przypuśćmy dla dowodu niewprost, że $\bigwedge a\beta \notin \Phi$. Wobec lematu 8(2) istnieje taka liczba naturalna k, że wyrażenie $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigwedge a\beta$ jest tezą KWRP. Weźmiemy pod uwagę schemat (I), ale tym razem w wersji, w której: $\alpha/\bigwedge a\beta$, $\beta/\beta(a/b)$, $\gamma/\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k$. Korzystając z (Ax. 12‴) $\bigwedge a\beta \to \beta(a/b)$ oraz reguły odrywania (RO), możemy stwierdzić, że formuła

$$(\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigwedge a\beta) \to (\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \beta(a/b))$$

jest tezą KWRP. Jej poprzednik jest tezą, a więc na mocy reguły odrywania jest nią także formuła $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \beta(a/b)$. Ponieważ wszystkie człony tej ostatniej alternatywy należą do Φ, powstaje sprzeczność z lematem 8(1).

(6-i) Przypuśćmy, że dla pewnej zmiennej indywiduowej b zachodzi: $\beta(a/b) \notin \Phi$ i to mimo, że $\bigvee a\beta \in \Phi$. Wobec lematu 8(2) istnieje taka liczba naturalna k, że: $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \beta(a/b)$ jest tezą KWRP. I znowu bierzemy pod uwagę schemat (I), tym razem w wersji w której: $\alpha/\beta(a/b)$, $\beta/\bigvee a\beta$, $\gamma/\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k$. Korzystając z (Ax. 13′) $\beta(a/b) \to \bigvee a\beta$ oraz reguły odrywania (RO) możemy stwierdzić, że formuła

$$(\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \beta(a/b)) \to (\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigvee a\beta)$$

jest tezą KWRP. Poprzednik tej formuły jest tezą, a więc na mocy reguły odrywania jest nią także formuła $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigvee a\beta$. Ponieważ wszystkie składniki tej ostatniej alternatywy należą do Φ, powstaje sprzeczność z lematem 8(1).

(6-ii) Załóżmy, że dla każdej zmiennej indywiduowej b zachodzi: $\beta(a/b) \in \Phi$. Dowód poprowadzimy niewprost i dlatego założymy dodatkowo, że $\bigvee a\beta \notin \Phi$. Z uwagi na pierwszy punkt dowodzonego właśnie lematu oznacza to, że $\neg\bigvee a\beta \in \Phi$. Ta ostatnia formuła musi mieć swój numer zarówno w ciągu Φ (niech $\neg\bigvee a\beta = \delta_k$), jak i w ciągu $\Sigma^{\neg}$ (powiedzmy, że $\neg\bigvee a\beta = \gamma_m$). Zgodnie z zasadami konstrukcji tego ostatniego ciągu, kolejnym jego wyrazem z numerem m + 1, jest formuła $\neg\beta(a/b)$, przy czym zmienna b nie wystąpiła jako zmienna wolna w żadnym z wcześniejszych wyrazów ciągu $\Sigma^{\neg}$. Czy alternatywa $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \neg\beta(a/b)$ może być tezą KWRP? Jeżeli tak, to na mocy reguły generalizacji byłaby też tezą formuła $\bigwedge b(\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \neg\beta(a/b))$. Ponieważ zmienna b nie jest wolna w wyrażeniu $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k$, więc na mocy tezy (M) na miano tezy zasługiwałaby również alternatywa

$$(\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k) \vee (\bigwedge b \neg\beta(a/b).$$

Korzystając ze schematu (I) w wersji: $\alpha/\bigwedge b\beta(a/b)$, $\beta/\bigwedge a\beta$, $\gamma/\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k$ oraz z (L) $\bigwedge b \neg\beta(a/b) \to \bigwedge a \neg\beta$ i reguły odrywania (RO), możemy wnioskować, że formuła

$$(\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigwedge b \neg\beta(a/b)) \to (\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \bigwedge a \neg\beta)$$

jest tezą KWRP. Ponownie wykorzystując (I), tym razem wraz z (N) wnosimy, że i $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \neg\bigvee a\beta$ jest tezą KWRP. Ponieważ wszystkie człony tej alternatywy należą do Φ, dochodzimy do sprzeczności z lematem 8(1). Aby tej sprzeczności uniknąć, musimy uznać, że formuła $\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_k \vee \neg\beta(a/b)$ tezą nie jest. Zgodnie z zasadami konstrukcji ciągu Φ wyrażenie $\neg\beta(a/b)$ należy doń włączyć jako δ_{k+1}. Skoro więc $\neg\beta(a/b) \in \Phi$, to wobec punktu 1 dowodzonego lematu $\beta(a/b) \notin \Phi$, a to jest sprzeczne z przyjętym założeniem.

Znając własności ciągu Φ, określamy z kolei odwzorowanie $v: \Sigma_{KWRP} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, tak aby spełniało następujący warunek:

$$v(\beta) =^{df} \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy} \quad \beta \in \Phi \\ \mathbf{1} & \phantom{\text{gdy}} \quad \beta \notin \Phi \end{cases}$$

Korzystając z lematu 9 wykazujemy, że odwzorowanie v jest wartościowaniem KWRP. Łatwe uzasadnienie tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi, ograniczając się do rozpatrzenia tytułem przykładu przypadku negacji i małego kwantyfikatora.

N e g a c j a. Załóżmy, że $v(\neg\gamma) = \mathbf{0}$. Stąd wobec określenia odwzorowania v: $\neg\gamma \in \Phi$. Na mocy punktu 1 lematu 9 jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \notin \Phi$. Ponownie korzystając z definicji funkcji v wnioskujemy, że $v(\gamma) = \mathbf{1}$. Załóżmy z kolei, że zachodzi $v(\neg\gamma) = \mathbf{1}$. Wówczas $\neg\gamma \notin \Phi$. Z punktu 1 lematu 9: $\gamma \in \Phi$, co oznacza w myśl definicji v, że $v(\gamma) = \mathbf{0}$.

M a ł y k w a n t y f i k a t o r. Gdy $v(\bigvee a\gamma) = \mathbf{1}$, wówczas $\bigvee a\gamma \notin \Phi$. Zgodnie z punktem 6 lematu 9, istnieje zmienna indywiduowa b, taka, że $\gamma(a/b) \notin \Phi$. Oznacza to, wobec definicji v, że zachodzi $v(\gamma(a/b)) = \mathbf{1}$. Jeśli natomiast $v(\bigvee a\gamma) = \mathbf{0}$, wtedy mamy $\bigvee a\gamma \in \Phi$. Stąd, odwołując się do punktu 6 lematu 9 wnioskujemy, że dla dowolnej zmiennej indywiduowej b: $\gamma(a/b) \in \Phi$, co oznacza, że dla dowolnej zmiennej indywiduowej b: $v(\gamma(a/b)) = \mathbf{0}$.

Przypomnijmy teraz, że formuła α, o której założyliśmy, że jest tautologią KWRP, stanowi pierwszy wyraz ciągu Φ. Zgodnie więc z określeniem wartościowania v: $v(\alpha) = \mathbf{0}$. Wykazaliśmy w ten sposób, że istnieje wartościowanie KWRP falsyfikujące α. Ta sprzeczność zamyka dowód twierdzenia o pełności dla klasycznego węższego rachunku predykatów •

Zadania

„Przetłumacz” poniższe wypowiedzi na język KRZ/I[illegible]/Ł3:

1. Arystoteles był uczniem Platona.
2. Każdy rok ma 365 dni.
3. Wszystkie planety naszego Układu Słonecznego.
4. Co to jest „megalomania”?
5. Dnieje.
6. Zamykać drzwi!
7. U góry pracują.
8. Nieupoważnionym wstęp wzbroniony.
9. Parasol noś i przy pogodzie.
10. Mikołaj Kopernik był pierwszym laureatem nagrody Nobla w dziedzinie fizyki.
11. Nieprawda, że lwy są trawożerne.
12. Liczba 38 dzieli się przez 7 lub liczba 38 nie dzieli się przez 7.
13. Skończyłem czytać i wyszedłem z biblioteki.
14. Jeśli dziś jest szesnasty, to pojutrze jest dziewiętnasty.
15. Gdy suma cyfr danej liczby dzieli się przez trzy, to również dana liczba dzieli się przez trzy.
16. Myślę, więc jestem.
17. Jeśli telegram był wysłany i nie został doręczony, to świadczy to o złym działaniu poczty.
18. Jeśli dziś pójdę na Kopiec Kościuszki, to nie zdążę przeczytać tej książki i będę ci ją mógł oddać dopiero we czwartek.
19. Jeśli jest chłodno, to włożę płaszcz, a jeśli pada, wezmę parasol i kalosze.
20. Nieprawda, że odległość z Gdańska do Krakowa jest większa niż odległość z Krakowa do Gdańska.
21. Jeśli nieprawda, że wyjeżdżam do Londynu lub że wyjeżdżam do Paryża, to nieprawda, że wyjeżdżam do Londynu i nieprawda, że wyjeżdżam do Paryża.
22. Jeśli spotkamy się po wykładach, to o ile pora nie będzie zbyt późna i dostaniemy bilety, to możemy iść do teatru lub do kina.
23. Jeśli zdam egzaminy, zgromadzę odpowiednie fundusze i dostanę paszport, to spędzę wakacje nad Amazonką, o ile nie będę miał innej, atrakcyjniejszej propozycji.
24. Odprowadzę cię, skoro już się wybierasz.
25. Pociąg do Łodzi Kaliskiej odjeżdża z toru 2a przy peronie 1 o godzinie 17.10.

„Przetłumacz" poniższe wypowiedzi na język Ł3 (wersja rozszerzona)/S4:

1. Możliwe, że wybiorę się w podróż balonem dookoła świata.
2. Jest konieczne, by miara sumy kątów w kwadracie wynosiła 360°.
3. Możliwe, że będzie padać, a możliwe, że nie.
4. Konieczne jest, żebyś tam poszedł lub zatelefonował.
5. Jeśli nie jest możliwe dziś nasze spotkanie, to koniecznie musimy zobaczyć się jutro.
6. Jeśli Jan zachorował, to możliwe, że dostanie gorączki i możliwe, że jutro nie pójdzie do pracy.
7. Jeśli wystąpiła gorączka lub inne niepokojące objawy, to konieczne jest, by pacjent pozostał w łóżku i nadal przyjmował leki.
8. Nieprawda, że jest możliwe odtworzenie zbiorów Biblioteki Aleksandryjskiej lub uprawianie ryżu na Księżycu.
9. Jeśli konieczna jest operacja, to o ile możliwy będzie transport chorego, to zabieg zostanie przeprowadzony w szpitalu w Poznaniu.
10. Możliwe, że konieczne będzie ponowienie ekspertyzy.

„Przetłumacz" poniższe wypowiedzi na język KWRP:

1. Wszystko przemija.
2. Nic nie trwa wiecznie.
3. Ziemia jest planetą.
4. Planeta jest ciałem niebieskim.
5. Niektóre ciała niebieskie są widoczne z Ziemi.
6. Tylko obiekty bliskie są widzialne.
7. Nieprawda, że wszystkie obiekty bliskie są widzialne.
8. Istnieją obiekty bliskie, które nie są widzialne.
9. Każde ciało niebieskie jest w ciągłym ruchu.
10. Nie tylko ciała niebieskie są w ciągłym ruchu.
11. Wszystko jest w ciągłym ruchu.
12. Każdy ma jakiegoś przewodnika.
13. Nie wszyscy mają wspólnego przewodnika.
14. Nie istnieje ktoś, kto jest wspólnym przewodnikiem wszystkich.
15. Każdy jest czyimś przewodnikiem.
16. Istnieje ktoś, kto nie ma żadnego przewodnika.
17. Kopernik był astronomem.
18. Każdy astronom jest zwolennikiem jakiejś teorii.
19. Nie istnieje teoria, której zwolennikami byliby wszyscy astronomowie.
20. Istnieje teoria, która nie ma zwolenników wśród astronomów.
21. Istnieje teoria, której zwolennikami są tylko astronomowie.
22. Jedni astronomowie głoszą takie poglądy, których inni astronomowie nie podzielają.

23. Żaden astronom nie dostrzegł żadnych przejawów życia na żadnej planecie.
24. Żaden astronom nie policzył wszystkich gwiazd.
25. Nie tylko gwiazdy świecą.

Ustal, czy jest tautologią:

Lp	Formuła	w KRZ	w INT	w Ł3
1	$p \to p$			
2	$p \vee \neg p$	+	–	–
3	$p \wedge \neg p$			
4	$p \to \neg p$			
5	$p \to \neg\neg p$			
6	$\neg\neg p \to p$			
7	$\neg\neg(\neg\neg p \to p)$			
8	$\neg(p \wedge \neg p)$	+	+	–
9	$\neg(p \to \neg p)$			
10	$(p \to \neg p) \to \neg p$			
11	$(\neg p \to p) \to p$			
12	$((p \to \neg p) \to p) \to p$			
13	$(p \to \neg p) \to (\neg p \to p)$			
14	$\neg(p \vee p) \vee p$			
15	$\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)$			
16	$(p \wedge q) \to p$			
17	$(p \wedge q) \to q$			
18	$(p \vee q) \to p$			
19	$(p \to q) \to p$			
20	$(p \to q) \to q$			
21	$p \to (p \vee q)$			
22	$q \to (p \vee q)$			
23	$p \to (p \wedge q)$			
24	$p \to (p \to q)$			
25	$q \to (p \to q)$			
26	$p \to (q \to q)$			
27	$(p \wedge q) \to (q \wedge p)$			
28	$(p \vee q) \to (q \vee p)$			
29	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	+	+	+
30	$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$			
31	$(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$			
32	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	+	–	+
33	$(p \wedge q) \to (\neg q \wedge \neg p)$			
34	$(p \vee q) \to (\neg q \vee \neg p)$			
35	$\neg(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$			

Lp	Formuła	w KRZ	w INT	w Ł3
36	$\neg(p \vee q) \to (\neg p \vee \neg q)$			
37	$\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$			
38	$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q)$			
39	$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$			
40	$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \wedge q)$			
41	$(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \vee q)$			
42	$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$			
43	$(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$			
44	$(\neg p \to \neg q) \to \neg(p \to q)$			
45	$(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$			
46	$((p \to q) \wedge q) \to p$			
47	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$			
48	$p \to (\neg p \to q)$			
49	$\neg p \to (p \to q)$			
50	$(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$			
51	$(\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p)$			
52	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$			
53	$((p \to q) \to p) \to p$			
54	$((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$			
55	$(p \to q) \vee (q \to p)$			
56	$(p \to (p \to (p \to q))) \to (p \to (p \to q))$			
57	$(p \to q) \to (\neg p \vee q)$			
58	$(\neg p \vee q) \to (p \to q)$			
59	$(\neg p \to q) \to (p \vee q)$			
60	$(p \vee q) \to (\neg p \to q)$			
61	$(p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$			
62	$\neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$			
63	$\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q)$			
64	$\neg(p \to q) \to (\neg\neg p \wedge \neg q)$			
65	$\neg\neg(p \to q) \to (p \to \neg\neg q)$			
66	$(p \wedge \neg q) \to \neg(p \to q)$			
67	$(p \vee q) \to ((p \to q) \to q)$			
68	$((p \to q) \to q) \to (p \vee q)$			
69	$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$			
70	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$			
71	$((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$			
72	$(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$			
73	$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$			
74	$(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$			
75	$(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$			
76	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$			
77	$((p \to q) \to (p \to r)) \to (p \to (q \to r))$			
78	$(p \to (q \wedge r)) \to ((p \to q) \wedge (p \to r))$			

Lp	Formuła	w KRZ	w INT	w Ł3
79	$(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$			
80	$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r)$			
81	$(p \to (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$			
82	$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$			
83	$((p \vee q) \to r) \to (p \to (q \to r))$			
84	$((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$			
85	$((p \wedge q) \to r) \to ((p \wedge \neg q) \to \neg r)$			
86	$((p \wedge \neg q) \to \neg r) \to ((p \wedge r) \to q)$			
87	$((p \wedge q) \wedge r) \to (p \wedge (q \wedge r))$			
88	$((p \vee q) \vee r) \to (p \vee (q \vee r))$			
89	$((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r))$			
90	$(p \wedge (q \wedge r)) \to ((p \wedge q) \wedge r)$			
91	$(p \vee (q \vee r)) \to ((p \vee q) \vee r)$			
92	$(p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$			
93	$(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$			
94	$((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \to (p \wedge (q \vee r))$			
95	$((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \to (p \vee (q \wedge r))$			
96	$((p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)) \vee (p \to q)$			
97	$\neg p \to (\neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r))$			
98	$(p \to q) \to ((p \wedge r) \to (q \wedge r))$			
99	$(p \to q) \to ((p \vee r) \to (q \vee r))$			
100	$(p \to q) \to ((p \to r) \to (q \to r))$			
101	$(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$			
102	$((p \to q) \wedge (r \to s)) \to ((r \to p) \to (s \to q))$			

Ustal, czy jest tautologią:

Lp	Formuła	w Ł3	w S4
1	$\Box p \to p$		
2	$p \to \Box p$		
3	$p \to \Diamond p$	+	+
4	$\Diamond p \to p$		
5	$\Box p \to \Diamond p$		
6	$\Diamond p \to \Box p$		
7	$\Box p \to \Box\Box p$		
8	$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$		
9	$\Box(p \vee \neg p)$		
10	$\Box p \vee \Box\neg p$		
11	$\Box\Diamond p \to \Box p$		
12	$\Box p \to \Box\Diamond p$		

Lp	Formuła	w Ł3	w S4
13	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$		
14	$\Diamond\Box p \to \Box p$		
15	$\Diamond p \to \Diamond\Box p$		
16	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$		
17	$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$		
18	$\Box\neg p \to \neg\Box p$		
19	$\neg\Box p \to \Box\neg p$		
20	$\Box\neg p \to \neg\Diamond p$		
21	$\neg\Diamond p \to \Box\neg p$		
22	$\Diamond\neg p \to \neg\Diamond p$		
23	$\neg\Diamond p \to \Diamond\neg p$		
24	$\Diamond\neg p \to \neg\Box p$		
25	$\neg\Box p \to \Diamond\neg p$		
26	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$		
27	$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$		
28	$\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$		
29	$\Diamond(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$		
30	$\Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$		
31	$\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$		
32	$(\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)$		
33	$(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$		
34	$(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$		
35	$(\Diamond p \to \Diamond q) \to \Diamond(p \to q)$		
36	$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$		
37	$(\Diamond p \vee \Diamond q) \to \Diamond(p \vee q)$		
38	$(\Diamond p \to \Diamond q) \to \Box(p \to q)$		
39	$\Box p \to \Box\Diamond\Box p$		
40	$\Box p \to \Diamond\Box\Diamond p$		
41	$\Box\Diamond\Box p \to \Box p$		
42	$\Diamond\Box\Diamond p \to \Box p$		
43	$\Diamond p \to \Box\Diamond\Box p$		
44	$\Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$		
45	$\Box\Diamond\Box p \to \Diamond p$		
46	$\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$		
47	$\Box\Diamond p \to \Box\Diamond\Box\Diamond p$		
48	$\Diamond\Box p \to \Diamond\Box\Diamond\Box p$		
49	$\Box\Diamond\Box\Diamond p \to \Box\Diamond p$		
50	$\Diamond\Box\Diamond\Box p \to \Diamond\Box p$		
51	$\Diamond\Box p \to \Diamond\Box\Diamond\Box p$		
52	$\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$		
53	$\Box\Box p \to \neg\Diamond\Diamond\neg p$		
54	$\neg\Diamond\Diamond\neg p \to \Box\Box p$		
55	$\Box\Box\neg p \to \neg\Diamond\Diamond p$		

Lp	Formuła	w Ł3	w S4
56	$\neg\Diamond\Diamond p \to \Box\Box\neg p$		
57	$\Box\Diamond\neg p \to \neg\Diamond\Box p$		
58	$\neg\Diamond\Box p \to \Box\Diamond\neg p$		
59	$\Diamond\Box\neg p \to \neg\Box\Diamond p$		
60	$\neg\Box\Diamond p \to \Diamond\Box\neg p$		
61	$\neg\Diamond(p \vee q) \to (\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond q)$		
62	$(\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond q) \to \neg\Diamond(p \vee q)$		
63	$\neg\Box(p \wedge q) \to (\neg\Box p \vee \neg\Box q)$		
64	$(\neg\Box p \vee \neg\Box q) \to \neg\Box(p \wedge q)$		

Ustal, czy jest tautologią w KWRP:

Lp	Formuła	KWRP
1	$\bigwedge x\, P(x) \to P(y)$	
2	$P(y) \to \bigwedge x\, P(x)$	
3	$\bigvee x\, P(x) \to P(y)$	
4	$P(y) \to \bigvee x\, P(x)$	
5	$\bigwedge x\, P(x) \to \bigvee y\, P(y)$	
6	$\bigwedge x(P(x) \to \bigwedge y\, P(y))$	
7	$\bigvee x(P(x) \to \bigwedge y\, P(y))$	
8	$\bigwedge x(\bigvee y\, P(y) \to P(x))$	
9	$\bigvee x(\bigvee y\, P(y) \to P(x))$	
10	$\bigwedge x\, \neg P(x) \to \neg\bigwedge x\, P(x)$	
11	$\neg\bigwedge x\, P(x) \to \bigwedge x\, \neg P(x)$	
12	$\bigvee x\, \neg P(x) \to \neg\bigvee x\, P(x)$	
13	$\neg\bigvee x\, P(x) \to \bigvee x\, \neg P(x)$	
14	$\bigwedge x\, \neg P(x) \to \neg\bigvee x\, P(x)$	
15	$\neg\bigvee x\, P(x) \to \bigwedge x\, \neg P(x)$	
16	$\bigvee x\, \neg P(x) \to \neg\bigwedge x\, P(x)$	
17	$\neg\bigwedge x\, P(x) \to \bigvee x\, \neg P(x)$	
18	$\bigwedge x(P(x) \to Q(x)) \to (\bigwedge x\, P(x) \to \bigwedge x\, Q(x))$	
19	$\bigwedge x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\bigwedge x\, P(x) \wedge \bigwedge x\, Q(x))$	
20	$\bigwedge x(P(x) \vee Q(x)) \to (\bigwedge x\, P(x) \vee \bigwedge x\, Q(x))$	
21	$\bigvee x(P(x) \to Q(x)) \to (\bigvee x\, P(x) \to \bigvee x\, Q(x))$	
22	$\bigvee x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\bigvee x\, P(x) \wedge \bigvee x\, Q(x))$	

Lp	Formuła	KWRP
23	$\bigvee x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\bigvee x P(x) \vee \bigvee x Q(x))$	
24	$(\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
25	$(\bigwedge x P(x)) \wedge \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \wedge Q(x))$	
26	$(\bigwedge x P(x) \vee \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \vee Q(x))$	
27	$(\bigvee x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x)) \rightarrow \bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
28	$(\bigvee x P(x) \wedge \bigvee x Q(x) \rightarrow \bigvee x(P(x) \wedge Q(x))$	
29	$(\bigvee x P(x) \vee \bigvee x Q(x)) \rightarrow \bigvee x(P(x) \vee Q(x))$	+
30	$\bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x))$	
31	$\bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigvee x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x))$	−
32	$\bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigvee x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x))$	
33	$\bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x))$	
34	$\bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigvee x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x))$	
35	$\bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x))$	
36	$(\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
37	$(\bigvee x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
38	$(\bigvee x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x)) \rightarrow \bigwedge x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
39	$(\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigvee x Q(x)) \rightarrow \bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
40	$(\bigvee x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
41	$(\bigwedge x P(x) \rightarrow \bigwedge x Q(x)) \rightarrow \bigvee x(P(x) \rightarrow Q(x))$	
42	$\bigwedge x P(x) \vee \bigvee y \neg P(y)$	
43	$\bigwedge x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y \bigwedge x R(x, y)$	
44	$\bigwedge x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee y \bigwedge x R(x, y)$	
45	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y \bigvee x R(x, y)$	
46	$\bigvee x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee y \bigvee x R(x, y)$	
47	$\bigwedge x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge x R(x, x)$	
48	$\bigwedge x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigwedge x R(x, x)$	
49	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge x R(x, x)$	
50	$\bigvee x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigwedge x R(x, x)$	
51	$\bigwedge x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigvee x R(x, x)$	
52	$\bigwedge x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee x R(x, x)$	
53	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigvee x R(x, x)$	
54	$\bigvee x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee x R(x, x)$	
55	$\bigwedge x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y R(y, y)$	
56	$\bigwedge x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y R(y, y)$	
57	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y R(y, y)$	
58	$\bigvee x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigwedge y R(y, y)$	

Lp	Formuła	KWRP
59	$\bigwedge x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigvee y R(y, y)$	
60	$\bigwedge x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee y R(y, y)$	
61	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y) \rightarrow \bigvee y R(y, y)$	
62	$\bigvee x \bigvee y R(x, y) \rightarrow \bigvee y R(y, y)$	
63	$\bigwedge x R(x, x) \rightarrow \bigwedge x \bigwedge y R(x, y)$	
64	$\bigwedge x R(x, x) \rightarrow \bigwedge x \bigvee y R(x, y)$	
65	$\bigwedge x R(x, x) \rightarrow \bigvee x \bigwedge y R(x, y)$	
66	$\bigwedge x R(x, x) \rightarrow \bigvee x \bigvee y R(x, y)$	
67	$\bigvee x R(x, x) \rightarrow \bigwedge x \bigwedge y R(x, y)$	
68	$\bigvee x R(x, x) \rightarrow \bigwedge x \bigvee y R(x, y)$	
69	$\bigvee x R(x, x) \rightarrow \bigvee x \bigwedge y R(x, y)$	
70	$\bigvee x R(x, x) \rightarrow \bigvee x \bigvee y R(x, y)$	
71	$\bigwedge y R(y, y) \rightarrow \bigwedge x \bigwedge y R(x, y)$	
72	$\bigwedge y R(y, y) \rightarrow \bigwedge x \bigvee y R(x, y)$	
73	$\bigwedge y R(y, y) \rightarrow \bigvee x \bigwedge y R(x, y)$	
74	$\bigwedge y R(y, y) \rightarrow \bigvee x \bigvee y R(x, y)$	
75	$\bigvee x \bigwedge y R(x, y)$	−

Sprawdź, czy jest schematem reguły normalnej:

Lp	Schemat reguły	w KRZ	w INT	w Ł3
1	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$			
2	$\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$			
3	$\dfrac{\alpha}{\alpha \wedge \beta}$			
4	$\dfrac{\beta}{\alpha \wedge \beta}$			
5	$\dfrac{\alpha}{\alpha \rightarrow \beta}$			

Lp	Schemat reguły	w KRZ	w INT	w Ł3
6	$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}$			
7	$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$			
8	$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$			
9	$\frac{\alpha;\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$			
10	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$			
11	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$			
12	$\frac{\alpha \to \beta}{\beta}$			
13	$\frac{\alpha \vee \beta;\ \neg\alpha}{\beta}$			
14	$\frac{\alpha \vee \beta;\ \neg\beta}{\alpha}$			
15	$\frac{\alpha \vee \beta;\ \alpha}{\neg\beta}$			
16	$\frac{\alpha \to \beta;\ \alpha}{\beta}$	+	+	+
17	$\frac{\alpha \to \beta;\ \beta}{\alpha}$	–		
18	$\frac{\alpha \to \beta;\ \neg\beta}{\neg\alpha}$			

Lp	Schemat reguły	w KRZ	w INT	w Ł3
19	$\frac{\alpha \to \beta;\ \neg\alpha}{\neg\beta}$			
20	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta \wedge \alpha}$			
21	$\frac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$			
22	$\frac{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}$			
23	$\frac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}$			
24	$\frac{\alpha;\ \neg\alpha}{\beta}$			
25	$\frac{\alpha \to \beta;\ \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$			
26	$\frac{\alpha \to \beta;\ \alpha \to \neg\beta}{\neg\alpha}$			
27	$\frac{\alpha \to \beta;\ \neg\alpha \to \beta}{\beta}$			
28	$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$			
29	$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}$			
30	$\frac{\alpha \to (\beta \to \gamma);\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$			
31	$\frac{\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma));\ \alpha \to (\alpha \to \beta)}{\alpha \to (\alpha \to \gamma)}$			
32	$\frac{\alpha \to \beta;\ \alpha \to \gamma}{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)}$			

Lp	Schemat reguły	w KRZ	w INT	w Ł3
33	$\dfrac{\alpha\to\gamma;\ \beta\to\gamma}{(\alpha\vee\beta)\to\gamma}$			
34	$\dfrac{\alpha\to\beta}{\neg\beta\to\neg\alpha}$			
35	$\dfrac{\neg(\alpha\to\beta)}{\alpha\wedge\neg\beta}$			
36	$\dfrac{\neg(\alpha\vee\beta)}{\neg\alpha\vee\neg\beta}$			

Sprawdź, czy jest schematem reguły normalnej:

Lp	Schemat	w Ł3	w S4	Lp	Schemat	w Ł3	w S4
1	$\dfrac{\Box\alpha}{\alpha}$			8	$\dfrac{\Diamond\neg\alpha}{\neg\Box\alpha}$		
2	$\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$			9	$\dfrac{\neg\Box\neg\alpha}{\Diamond\alpha}$		
3	$\dfrac{\Diamond\alpha}{\alpha}$			10	$\dfrac{\Box\alpha}{\Box(\alpha\to\beta)}$		
4	$\dfrac{\alpha}{\Diamond\alpha}$			11	$\dfrac{\Box\beta}{\Box(\alpha\to\beta)}$		
5	$\dfrac{\Box\alpha}{\neg\Diamond\neg\alpha}$			12	$\dfrac{\Diamond\alpha}{\Diamond(\alpha\to\beta)}$		
6	$\dfrac{\Diamond\alpha}{\neg\Box\neg\alpha}$			13	$\dfrac{\Diamond\beta}{\Diamond(\alpha\to\beta)}$		
7	$\dfrac{\Box\neg\alpha}{\neg\Diamond\alpha}$			14	$\dfrac{\Box\alpha}{\Box(\alpha\vee\beta)}$		

Lp	Schemat	w Ł3	w S4	Lp	Schemat	w Ł3	w S4
15	$\dfrac{\Diamond\alpha}{\Diamond(\alpha\vee\beta)}$			26	$\dfrac{\Box(\alpha\to\beta)}{\Diamond\alpha\to\Diamond\beta}$		
16	$\dfrac{\Box\alpha;\ \Box\beta}{\Box(\alpha\wedge\beta)}$			27	$\dfrac{\Box\alpha\to\Box\beta}{\Box(\alpha\to\beta)}$		
17	$\dfrac{\Box(\alpha\wedge\beta)}{\Box\alpha}$			28	$\dfrac{\Diamond\alpha\to\Diamond\beta}{\Diamond(\alpha\to\beta)}$		
18	$\dfrac{\Diamond(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\alpha}$			29	$\dfrac{\neg\Box(\alpha\wedge\beta)}{\neg\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta}$		
19	$\dfrac{\Box(\alpha\wedge\beta)}{\Box\alpha\wedge\Box\beta}$			30	$\dfrac{\neg\Box(\alpha\wedge\beta)}{\neg\Box\alpha\vee\neg\Box\beta}$		
20	$\dfrac{\Diamond(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\alpha\vee\Diamond\beta}$			31	$\dfrac{\neg\Box(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\neg\alpha\vee\Diamond\neg\beta}$		
21	$\dfrac{\Box(\alpha\to\beta);\ \Box\alpha}{\Box\beta}$			32	$\dfrac{\neg\Diamond(\alpha\vee\beta)}{\neg\Diamond\alpha\vee\neg\Diamond\beta}$		
22	$\dfrac{\Diamond(\alpha\to\beta);\ \Diamond\alpha}{\Diamond\beta}$			33	$\dfrac{\neg\Diamond(\alpha\vee\beta)}{\neg\Diamond\alpha\wedge\neg\Diamond\beta}$		
23	$\dfrac{\Box(\alpha\to\beta)}{\Box\alpha\to\Box\beta}$			34	$\dfrac{\neg\Diamond(\alpha\to\beta)}{\Box\neg\alpha\wedge\Box\neg\beta}$		
24	$\dfrac{\Diamond(\alpha\to\beta)}{\Diamond\alpha\to\Diamond\beta}$			35	$\dfrac{\alpha\to\beta \quad \alpha\to\Box\alpha}{\alpha\to\Box\beta}$		
25	$\dfrac{\Box(\alpha\to\beta)}{\neg\Box\beta\to\neg\Box\alpha}$						

Sprawdź, czy jest schematem reguły normalnej w KWRP:

Lp	Schemat reguły	KWRP	Lp	Schemat reguły	KWRP
1	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha}{\alpha}$		14	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\bigwedge a\,\alpha \to \bigwedge a\,\beta}$	
2	$\dfrac{\alpha}{\bigwedge a\,\alpha}$		15	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \to \beta)}{\bigwedge a\,\alpha \to \bigwedge a\,\beta}$	
3	$\dfrac{\bigvee a\,\alpha}{\alpha}$		16	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\bigvee a\,\alpha \to \bigvee a\,\beta}$	
4	$\dfrac{\alpha}{\bigvee a\,\alpha}$		17	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \to \beta)}{\bigvee a\,\alpha \to \bigvee a\,\beta}$	
5	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha}{\bigvee a\,\alpha}$		18	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha \to \bigwedge a\,\beta}{\bigwedge a(\alpha \to \beta)}$	
6	$\dfrac{\neg \bigwedge a\,\alpha}{\bigvee a \neg \alpha}$		19	$\dfrac{\bigvee a\,\alpha \to \bigvee a\,\beta}{\bigvee a(\alpha \to \beta)}$	
7	$\dfrac{\neg \bigwedge a\,\alpha}{\bigwedge a \neg \alpha}$		20	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \wedge \beta)}{\bigwedge a\,\alpha \wedge \bigwedge a\,\beta}$	
8	$\dfrac{\bigwedge a \neg \alpha}{\neg \bigwedge a\,\alpha}$		21	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha \wedge \bigwedge a\,\beta}{\bigwedge a(\alpha \wedge \beta)}$	
9	$\dfrac{\bigwedge a \neg \alpha}{\neg \bigvee a\,\alpha}$		22	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \vee \beta)}{\bigwedge a\,\alpha \vee \bigwedge a\,\beta}$	
10	$\dfrac{\neg \bigvee a\,\alpha}{\bigvee a \neg \alpha}$		23	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha}{\bigwedge a(\alpha \vee \beta)}$	
11	$\dfrac{\neg \bigvee a\,\alpha}{\bigwedge a \neg \alpha}$		24	$\dfrac{\bigwedge a\,\alpha \vee \bigwedge a\,\beta}{\bigwedge a(\alpha \vee \beta)}$	
12	$\dfrac{\bigvee a \neg \alpha}{\neg \bigvee a\,\alpha}$		25	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}{\bigvee a\,\alpha}$	
13	$\dfrac{\bigvee a \neg \alpha}{\neg \bigwedge a\,\alpha}$		26	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}{\bigvee a\,\beta}$	

Lp	Schemat reguły	KWRP	Lp	Schemat reguły	KWRP
27	$\dfrac{\bigvee a\,\alpha \wedge \bigvee a\,\beta}{\bigvee a(\alpha \wedge \beta)}$		32	$\dfrac{\bigvee a\,\alpha \vee \bigvee a\,\beta}{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}$	
28	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}{\bigvee a\,\alpha}$		33	$\dfrac{\bigwedge a \bigwedge b\,\alpha}{\bigwedge b \bigwedge a\,\alpha}$	
29	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}{\bigvee a\,\alpha \vee \bigvee a\,\beta}$		34	$\dfrac{\bigwedge a \bigvee b\,\alpha}{\bigvee b \bigwedge a\,\alpha}$	
30	$\dfrac{\bigvee a\,\alpha}{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}$		35	$\dfrac{\bigvee a \bigwedge b\,\alpha}{\bigwedge b \bigvee a\,\alpha}$	
31	$\dfrac{\bigvee a\,\beta}{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}$		36	$\dfrac{\bigvee a \bigvee b\,\alpha}{\bigvee b \bigvee a\,\alpha}$	

Schematy aksjomatów i reguły pierwotne KRZ:

Ax. 1 $\alpha \to (\beta \to \beta)$
Ax. 2 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 4 $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax. 7 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
Ax. 8 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 9 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 10 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
Ax. 11 $(\neg \alpha \to \neg \beta) \to (\beta \to \alpha)$

(RO) $\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha}{\beta}$

Wykaż, że są schematami tez KRZ:

Lp	Schemat formuł	Uwagi
1	$\alpha \to \alpha$	T1; prawo tożsamości
2	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	T2; prawo poprzedzania
3	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	T3; sylogizm Fregego

Lp	Schemat formuł	Uwagi
4	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	T4; mocne prawo podw. negacji
5	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	T5; słabe prawo podw. negacji
6	$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	T6; słabe prawo transpozycji
7	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	T7; słabe prawo transpozycji
8	$(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$	T8; mocne prawo transpozycji
9	$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$	T9; prawo przepełnienia
10	$(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$	T10; słabe prawo Claviusa
11	$(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$	T11; mocne prawo Claviusa
12	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$	T12; słaby dylemat destrukcyjny
13	$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	T13
14	$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$	T14; *modus tollens*
15	$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$	T15; prawo Peirce'a
16	$\alpha \vee \neg\alpha$	T16; prawo wyłączonego środka
17	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$	
18	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	
19	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$	
20	$(\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha)$	mocny dylemat destrukcyjny
21	$(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$	dylemat konstrukcyjny
22	$\neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$	
23	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	
24	$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	
25	$\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$	prawo idempotencji dla $\wedge$
26	$(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$	prawo przemienności dla $\wedge$
27	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$	prawo łączności dla $\wedge$
28	$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \to (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	prawo łączności dla $\wedge$
29	$(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$	*modus ponens*
30	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$	prawo importacji
31	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	prawo eksportacji
32	$(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$	prawo rozdzielności $\to / \wedge$
33	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$	słabe prawo transpozycji złoż.
34	$((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$	mocne prawo transpozycji złoż.
35	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \wedge \beta))$	
36	$\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)$	
37	$(\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$	
38	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$	
39	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha$	
40	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\beta$	
41	$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	prawo de Morgana
42	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$	prawo de Morgana
43	$\neg\alpha \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
44	$\neg\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
45	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	prawo de Morgana
46	$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$	prawo de Morgana

Lp	Schemat formuł	Uwagi
47	$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$	prawo idempotencji dla $\vee$
48	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	prawo przemienności dla $\vee$
49	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$	prawo łączności dla $\vee$
50	$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \to (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$	prawo łączności dla $\vee$
51	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta)$	
52	$(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$	
53	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \vee \alpha) \to (\gamma \vee \beta))$	
54	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma))$	
55	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$	
56	$(\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	
57	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	prawo rozdzielności $\wedge / \vee$
58	$((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \to (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma))$	
59	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$	prawo rozdzielności $\vee / \wedge$
60	$((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \to (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma))$	
61	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	prawo niesprzeczności
62	$\alpha \vee (\alpha \to \beta)$	paradoks implikacji
63	$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$	paradoks implikacji
64	$((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \to \alpha$	prawo rezolucji

Wykaż, że są schematami reguł wyprowadzalnych w KRZ:

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
1	$\dfrac{\alpha;\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$	(DK)	2	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ $\quad$ $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$	(OK)
3	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ $\quad$ $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	(DA)	4	$\dfrac{\alpha \vee \beta;\ \neg\alpha}{\beta}$ $\quad$ $\dfrac{\alpha \vee \beta;\ \neg\beta}{\alpha}$	(OA)
5	$\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$	(RP)	6	$\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$	(RKom)
7	$\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$	(DPN)	8	$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$	(OPN)
9	$\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma);\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$	(PRO)	10	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$	(RPI)

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
11	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \neg\beta}{\neg\alpha}$	(MT)	12	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}$	
13	$\dfrac{\neg\alpha \to \neg\beta}{\beta \to \alpha}$		14	$\dfrac{\alpha;\ \neg\alpha}{\beta}$	
15	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha \to \neg\beta}{\neg\alpha}$		16	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \neg\alpha \to \beta}{\beta}$	
17	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta \wedge \alpha}$	(PK)	18	$\dfrac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$	(PA)
19	$\dfrac{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}$ $\dfrac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}$		20	$\dfrac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}$ $\dfrac{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}$	
21	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha \to \gamma}{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)}$		22	$\dfrac{\alpha \to \gamma;\ \beta \to \gamma}{(\alpha \vee \beta) \to \gamma}$	
23	$\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$		24	$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$	
25	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\neg\alpha \vee \beta}$		26	$\dfrac{\alpha \vee \beta}{\neg\alpha \to \beta}$	
27	$\dfrac{\neg(\alpha \to \beta)}{\alpha \wedge \neg\beta}$		28	$\dfrac{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}{\alpha \to \beta}$	
29	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \gamma \to \delta}{(\alpha \wedge \gamma) \to (\beta \wedge \delta)}$		30	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \gamma \to \delta}{(\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \delta)}$	
31	$\dfrac{\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}$		32	$\dfrac{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)}$	
33	$\dfrac{(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}{\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)}$		34	$\dfrac{(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)}{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)}$	

Schematy aksjomatów i reguły pierwotne INT:

Ax. 1 $\alpha \to (\beta \to \beta)$
Ax. 2 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 4 $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax. 7 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
Ax. 8 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 9 $\beta \to (\alpha \vee \beta$
Ax. 10 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
Ax. 11′ $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$
Ax. 12 $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

(RO) $\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha}{\beta}$

Wykaż, że są schematami tez INT:

Lp	Schemat formuł	Uwagi
1	$\alpha \to \alpha$	T 1; prawo tożsamości
2	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	T 2; prawo poprzedzania
3	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	T 3; sylogizm Fregego
4	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	T 5; słabe prawo podw. negacji
5	$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	T 6; słabe prawo transpozycji
6	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	T 7; słabe prawo transpozycji
7	$(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$	T 10; słabe prawo Claviusa
8	$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	T 13
9	$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$	T 14; *modus tollens*
10	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$	
11	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	
12	$\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$	
13	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$	
14	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	
15	$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	
16	$\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$	prawo idempotencji dla $\wedge$
17	$(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$	prawo przemienności dla $\wedge$
18	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$	prawo łączności dla $\wedge$
19	$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \to (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	prawo łączności dla $\wedge$
20	$(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$	*modus ponens*
21	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)$	prawo importacji
22	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	prawo eksportacji

Lp	Schemat formuł	Uwagi
23	$(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$	prawo rozdzielności $\to / \wedge$
24	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to ((\alpha \wedge \neg\gamma) \to \neg\beta)$	słabe prawo transpozycji złoż.
25	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \wedge \beta))$	
26	$\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	
27	$\neg\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\neg\beta)$	
28	$(\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$	
29	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$	
30	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha$	
31	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\beta$	
32	$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	prawo de Morgana
33	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$	prawo de Morgana
34	$\neg\alpha \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
35	$\neg\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
36	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	prawo de Morgana
37	$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$	prawo idempotencji dla $\vee$
38	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	prawo przemienności dla $\vee$
39	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$	prawo łączności dla $\vee$
40	$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \to (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$	prawo łączności dla $\vee$
41	$(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$	
42	$(\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$	
43	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma))$	
44	$(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha) \to (\gamma \vee \beta))$	
45	$(\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	
46	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	prawo rozdzielności $\wedge / \vee$
47	$((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \to (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma))$	
48	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$	prawo rozdzielności $\vee / \wedge$
49	$((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \to (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma))$	
50	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	prawo niesprzeczności
51	$\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$	
52	$\neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	
53	$\neg\neg(((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha)$	
54	$\neg\neg((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha))$	
55	$\neg\neg((\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha))$	

Wykaż, że są schematami reguł wyprowadzalnych w INT:

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
1	$\dfrac{\alpha; \beta}{\alpha \wedge \beta}$	(DK)	2	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ $\quad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$	(OK)

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
3	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ $\quad \dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	(DA)	4	$\dfrac{\alpha \vee \beta; \neg\alpha}{\beta}$ $\quad \dfrac{\alpha \vee \beta; \neg\beta}{\alpha}$	(OA)
5	$\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$	(RP)	6	$\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$	(RKom)
7	$\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$	(DPN)	8	$\dfrac{\neg\neg\neg\alpha}{\neg\alpha}$	
9	$\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma); \alpha \to \beta}{\alpha \to \gamma}$	(PRO)	10	$\dfrac{\alpha \to \beta; \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$	(RPI)
11	$\dfrac{\alpha \to \beta; \neg\beta}{\neg\alpha}$	(MT)	12	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}$	
13	$\dfrac{\neg(\alpha \to \beta)}{\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta}$		14	$\dfrac{\alpha; \neg\alpha}{\beta}$	
15	$\dfrac{\alpha \to \beta; \alpha \to \neg\beta}{\neg\alpha}$		16	$\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$	
17	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta \wedge \alpha}$	(PK)	18	$\dfrac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$	(PA)
19	$\dfrac{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}$ $\quad \dfrac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}$		20	$\dfrac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}$ $\quad \dfrac{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}$	

Schematy aksjomatów i reguły pierwotne Ł3:

Ax. 1 $\alpha \to (\beta \to \beta)$
Ax. 2 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 4′ $(\alpha \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta))$
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax. 7 $(\alpha \to) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
Ax. 8 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 9 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

Ax. 10 $(\alpha \to \gamma) \to \big((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)\big)$

Ax. 11 $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Ax. 12' $\alpha \vee \big(\neg\alpha \vee (\beta \vee (\neg\beta \vee (\alpha \to \beta)))\big)$

(RO) $\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha}{\beta}$

Wykaż, że są schematami tez Ł3:

Lp	Schemat formuł	Uwagi
1	$\alpha \to \alpha$	T 1; prawo tożsamości
2	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	T 2; prawo poprzedzania
3	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	T 4; mocne prawo podw. negacji
4	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	T 5; słabe prawo podw. negacji
5	$(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	T 6; słabe prawo transpozycji
6	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	T 7; słabe prawo transpozycji
7	$(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$	T 8; mocne prawo transpozycji
8	$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$	T 9; prawo przepełnienia
9	$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	T 13
10	$\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$	T 17
11	$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$	T 18; prawo de Morgana
12	$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$	T 19; prawo de Morgana
13	$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$	T 20; prawo idempotencji dla $\vee$
14	$(\alpha \vee \neg\alpha) \to \big((\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)\big)$	T 21
15	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha$	
16	$\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\beta$	
17	$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$	prawo de Morgana
18	$\neg\alpha \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
19	$\neg\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	
20	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$	prawo de Morgana
21	$\alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$	prawo idempotencji dla $\wedge$
22	$(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$	prawo przemienności dla $\wedge$
23	$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$	prawo łączności dla $\wedge$
24	$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \to (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	prawo łączności dla $\wedge$
25	$\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$	
26	$\neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$	
27	$\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$	
28	$\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)$	
29	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	prawo przemienności dla $\vee$
30	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$	prawo łączności dla $\vee$
31	$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \to (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$	prawo łączności dla $\vee$
32	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$	prawo rozdzielności $\wedge / \vee$
33	$((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)) \to (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma))$	
34	$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee\ ))$	prawo rozdzielności $\vee / \wedge$
35	$((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \to (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma))$	
36	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$	
37	$((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	
38	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$	
39	$((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$	prawo eksportacji
40	$(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma))$	prawo rozdzielności $\to / \wedge$
41	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \wedge \beta))$	
42	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \vee \gamma))$	
43	$(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$	
44	$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma))$	
45	$(\alpha \to \beta) \to ((\gamma \vee \alpha) \to (\gamma \vee \beta))$	
46	$((\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \vee \beta)$	
47	$(\alpha \vee \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	
48	$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$	paradoks implikacji
49	$\neg(\alpha \to \neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \alpha)$	
50	$(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	

Wykaż, że są schematami reguł wyprowadzalnych w Ł3:

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
1	$\dfrac{\alpha;\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$	(DK)	2	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$	(OK)
3	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	(DA)	4	$\dfrac{\alpha \vee \beta;\ \neg\alpha}{\beta}$ $\dfrac{\alpha \vee \beta;\ \neg\beta}{\alpha}$	(OA)
5	$\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}$	(RP)	6	$\dfrac{\alpha \to (\beta \to \gamma)}{\beta \to (\alpha \to \gamma)}$	(RKom)
7	$\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$	(DPN)	8	$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$	(OPN)
9	$\dfrac{\alpha \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \quad \alpha \to (\alpha \to \beta)}{\alpha \to (\alpha \to \gamma)}$	(PPRO)	10	$\dfrac{\alpha \vee (\beta \to \gamma) \quad \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \gamma}$	(OCA)

Lp	Schemat	Uwagi	Lp	Schemat	Uwagi
11	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \neg\beta}{\neg\alpha}$	(MT)	12	$\dfrac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}$	
13	$\dfrac{\neg\alpha \to \neg\beta}{\beta \to \alpha}$		14	$\dfrac{\alpha;\ \neg\alpha}{\beta}$	
15	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta \wedge \alpha}$	(PK)	16	$\dfrac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$	(PA)
17	$\dfrac{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}$ $\dfrac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}$		18	$\dfrac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}$ $\dfrac{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}$	
19	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha \to \gamma}{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)}$		20	$\dfrac{\alpha \to \gamma;\ \beta \to \gamma}{(\alpha \vee \beta) \to \gamma}$	
21	$\dfrac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$		22	$\dfrac{\alpha \to \beta;\ \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$	(RPI)

Schematy aksjomatów i reguły pierwotne S4:

Ax. 1 $\alpha \to (\beta \to \beta)$
Ax. 2 $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$
Ax. 4 $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$
Ax. 5 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$
Ax. 6 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$
Ax. 7 $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \wedge \gamma)))$
Ax. 8 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 9 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
Ax. 10 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$
Ax. 11 $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
Ax. 12" $\Box\alpha \to \alpha$
Ax. 13 $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$
Ax. 14 $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
Ax. 15 $\Diamond\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$
Ax. 16 $\neg\Box\neg\alpha \to \Diamond\alpha$

(RO) $\dfrac{\alpha \to \beta;\ \alpha}{\beta}$ (RGd) $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

Wykaż, że są schematami tez S4:

Lp	Schemat formuł	Uwagi
1	$\alpha \to \Diamond\alpha$	T 22
2	$\neg\Diamond\alpha \to \Box\neg\alpha$	T 23
3	$\neg\Box\alpha \to \Diamond\neg\alpha$	T 24
4	$\Box\alpha \to \Diamond\alpha$	
5	$\Box(\alpha \wedge \beta) \to (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$	
6	$(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	
7	$\Box\alpha \to \neg\Diamond\neg\alpha$	
8	$\neg\Diamond\neg\alpha \to \Box\alpha$	
9	$\Box(\alpha \to \beta) \to (\Diamond\alpha \to \Diamond\beta)$	
10	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	
11	$(\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta) \to \Diamond(\alpha \vee \beta)$	
12	$\neg\Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\neg\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\beta)$	
13	$(\neg\Diamond\alpha \wedge \neg\Diamond\beta) \to \neg\Diamond(\alpha \vee \beta)$	
14	$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$	
15	$\Diamond(\alpha \wedge \beta) \to (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$	
16	$\Diamond(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Diamond\beta)$	
17	$(\Box\alpha \to \Diamond\beta) \to \Diamond(\alpha \to \beta)$	
18	$\Box\Box\alpha \to \neg\Diamond\Diamond\neg\alpha$	
19	$\neg\Diamond\Diamond\neg\alpha \to \Box\Box\alpha$	
20	$\Box\Box\neg\alpha \to \neg\Diamond\Diamond\alpha$	
21	$\neg\Diamond\Diamond\alpha \to \Box\Box\neg\alpha$	
22	$\Diamond\Diamond\neg\alpha \to \neg\Box\Box\alpha$	
23	$\neg\Box\Box\alpha \to \Diamond\Diamond\neg\alpha$	
24	$\Box\Diamond\neg\alpha \to \neg\Diamond\Box\alpha$	
25	$\neg\Diamond\Box\alpha \to \Box\Diamond\neg\alpha$	
26	$\Diamond\Box\neg\alpha \to \neg\Box\Diamond\alpha$	
27	$\neg\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\Box\neg\alpha$	
28	$\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$	
29	$\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$	
30	$\Box\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\Box\Diamond\alpha$	
31	$\Box\Diamond\Box\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$	

Wykaż, że są schematami reguł wyprowadzalnych w S4:

Lp	Schemat	Lp	Schemat	Lp	Schemat
1	$\dfrac{\Box\alpha}{\alpha}$	2	$\dfrac{\Box(\alpha \to \beta)}{\Box\alpha \to \Box\beta}$	3	$\dfrac{\Diamond\alpha}{\neg\Box\neg\alpha}$

Lp	Schemat	Lp	Schemat	Lp	Schemat
4	$\frac{\neg\Box\neg\alpha}{\Diamond\alpha}$	5	$\frac{\alpha}{\Diamond\alpha}$	6	$\frac{\alpha\to\beta}{\Box\alpha\to\Box\beta}$
7	$\frac{\alpha\to\beta}{\Diamond\alpha\to\Diamond\beta}$	8	$\frac{\Box(\alpha\wedge\beta)}{\Box\alpha}$	9	$\frac{\Box(\alpha\wedge\beta)}{\Box\beta}$
10	$\frac{\Box\alpha\wedge\Box\beta}{\Box(\alpha\wedge\beta)}$	11	$\frac{\Box\alpha}{\Box(\alpha\vee\beta)}$	12	$\frac{\Box\beta}{\Box(\alpha\vee\beta)}$
13	$\frac{\Box\alpha\vee\Box\beta}{\Box(\alpha\vee\beta)}$	14	$\frac{\Diamond(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\alpha}$	15	$\frac{\Diamond(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\beta}$
16	$\frac{\Diamond(\alpha\wedge\beta)}{\Diamond\alpha\wedge\Diamond\beta}$	17	$\frac{\Diamond(\alpha\vee\beta)}{\Diamond\alpha\vee\Diamond\beta}$	18	$\frac{\Diamond\alpha}{\Diamond(\alpha\vee\beta)}$
19	$\frac{\Diamond\beta}{\Diamond(\alpha\vee\beta)}$	20	$\frac{\Diamond\alpha\vee\Diamond\beta}{\Diamond(\alpha\vee\beta)}$	21	$\frac{\alpha\to\beta \quad \alpha\to\Box\alpha}{\alpha\to\Box\beta}$ (PRGd)

Schematy aksjomatów i reguły pierwotne KWRP:

Ax. 1 $\alpha\to(\beta\to\beta)$
Ax. 2 $(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$
Ax. 3 $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\beta\to(\alpha\to\gamma))$
Ax. 4 $(\alpha\to(\alpha\to\beta))\to(\alpha\to\beta)$
Ax. 5 $(\alpha\wedge\beta)\to\alpha$
Ax. 6 $(\alpha\wedge\beta)\to\beta$
Ax. 7 $(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\gamma)\to(\alpha\to(\beta\wedge\gamma)))$
Ax. 8 $\alpha\to(\alpha\vee\beta)$
Ax. 9 $\beta\to(\alpha\vee\beta)$
Ax. 10 $(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to((\alpha\vee\beta)\to\gamma))$
Ax. 11 $(\neg\alpha\to\neg\beta)\to(\beta\to\alpha)$
Ax. 12''' $\bigwedge a\alpha\to\alpha(a/b)$
Ax. 13' $\alpha\to\bigvee a\alpha$
Ax. 14' $\bigwedge a(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\bigwedge a\beta)$ o ile a nie jest wolna w α
Ax. 15' $\bigwedge a(\alpha\to\beta)\to(\bigvee a\alpha\to\beta)$ o ile a nie jest wolna w β

(RO) $\frac{\alpha\to\beta;\alpha}{\beta}$ (RG) $\frac{\alpha}{\bigwedge a\alpha}$

Wykaż, że są schematami tez KWRP:

Lp	Schemat formuł	Uwagi
1	$\bigwedge a\neg\alpha\to\neg\bigvee a\alpha$	T 25; prawo de Morgana
2	$\bigwedge a(\alpha\to\beta)\to(\bigwedge a\alpha\to\bigwedge a\beta)$	T 26; pr. rozkładu $\bigwedge$ wzgl. $\to$
3	$\bigwedge a(\alpha\vee\beta)\to(\alpha\vee\bigwedge a\beta)$	T 27; (gdy a nie jest wolna w α)
4	$\bigwedge a\alpha(b/a)\to\bigwedge b\alpha$	T 28
5	$\bigwedge a\alpha\to\bigvee a\alpha$	
6	$\neg\bigvee a\alpha\to\bigwedge a\neg\alpha$	prawo de Morgana
7	$\bigvee a\neg\alpha\to\neg\bigwedge a\alpha$	prawo de Morgana
8	$\neg\bigwedge a\alpha\to\bigvee a\neg\alpha$	prawo de Morgana
9	$\bigwedge a\alpha\to\neg\bigvee a\neg\alpha$	prawo de Morgana
10	$\neg\bigvee a\neg\alpha\to\bigwedge a\alpha$	prawo de Morgana
11	$\bigvee a\alpha\to\neg\bigwedge a\neg\alpha$	prawo de Morgana
12	$\neg\bigwedge a\neg\alpha\to\bigvee a\alpha$	prawo de Morgana
13	$\bigwedge a\neg\alpha\to\neg\bigwedge a\alpha$	
14	$\neg\bigvee a\alpha\to\bigvee a\neg\alpha$	
15	$\bigwedge a(\alpha\wedge\beta)\to(\bigwedge a\alpha\wedge\bigwedge a\beta)$	prawo rozkładu $\bigwedge$ względem $\wedge$
16	$(\bigwedge a\alpha\wedge\bigwedge a\beta)\to\bigwedge a(\alpha\wedge\beta)$	prawo wyciągania $\bigwedge$ przed $\wedge$
17	$(\bigwedge a\alpha\vee\bigwedge a\beta)\to\bigwedge a(\alpha\vee\beta)$	prawo wyciągania $\bigwedge$ przed $\vee$
18	$\bigvee a(\alpha\vee\beta)\to(\bigvee a\alpha\vee\bigvee a\beta)$	prawo rozkładu $\bigvee$ względem $\vee$
19	$(\bigvee a\alpha\vee\bigvee a\beta)\to\bigvee a(\alpha\vee\beta)$	prawo wyciągania $\bigvee$ przed $\vee$
20	$\bigvee a(\alpha\wedge\beta)\to(\bigvee a\alpha\wedge\bigvee a\beta)$	prawo rozkładu $\bigvee$ względem $\wedge$
21	$\bigwedge a(\alpha\to\beta)\to(\bigvee a\alpha\to\bigvee a\beta)$	
22	$\bigvee a(\alpha\to\beta)\to(\bigwedge a\alpha\to\bigvee a\beta)$	
23	$(\bigwedge a\alpha\to\bigvee a\beta)\to\bigvee a(\alpha\to\beta)$	
24	$(\bigvee a\alpha\to\bigwedge a\beta)\to\bigvee a(\alpha\to\beta)$	
25	$(\bigvee a\alpha\to\bigwedge a\beta)\to\bigwedge a(\alpha\to\beta)$	
26	$(\bigwedge a\alpha\wedge\bigvee a\beta)\to\bigvee a(\alpha\wedge\beta)$	
27	$(\alpha\to\bigwedge a\beta)\to(\bigwedge a\alpha\to\bigwedge a\beta)$	
28	$(\bigvee a\alpha\to\beta)\to(\bigvee a\alpha\to\bigvee a\beta)$	
29	$\bigwedge a\bigwedge b\alpha\to\bigwedge b\bigwedge a\alpha$	przestawianie kwantyfikatorów
30	$\bigvee a\bigvee b\alpha\to\bigvee b\bigvee a\alpha$	przestawianie kwantyfikatorów
31	$\bigvee a\bigwedge b\alpha\to\bigwedge b\bigvee a\alpha$	przestawianie kwantyfikatorów
32	$\bigvee a(\alpha\to\bigwedge a\alpha)$	
33	$(\alpha\to\bigwedge a\beta)\to\bigwedge a(\alpha\to\beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
34	$(\bigvee a\alpha\to\beta)\to\bigwedge a(\alpha\to\beta)$	! gdy a nie jest wolna w β

Lp	Schemat formuł	Uwagi
35	$\bigvee a(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bigvee a\beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
36	$(\alpha \to \bigvee a\beta) \to \bigvee a(\alpha \to \beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
37	$\bigvee a(\alpha \to \beta) \to (\bigwedge a\alpha \to \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
38	$(\bigwedge a\alpha \to \beta) \to \bigvee a(\alpha \to \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
39	$\bigwedge a(\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \bigwedge a\beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
40	$\bigwedge a(\alpha \wedge \beta) \to (\bigwedge a\alpha \wedge \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
41	$\bigvee a(\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \wedge \bigvee a\beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
42	$(\alpha \wedge \bigvee a\beta) \to \bigvee a(\alpha \wedge \beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
43	$\bigvee a(\alpha \wedge \beta) \to (\bigvee a\alpha \wedge \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
44	$(\bigvee a\alpha \wedge \beta) \to \bigvee a(\alpha \wedge \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
45	$(\alpha \vee \bigwedge a\beta) \to \bigwedge a(\alpha \vee \beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
46	$\bigwedge a(\alpha \vee \beta) \to (\bigwedge a\alpha \vee \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
47	$(\bigwedge a\alpha \vee \beta) \to \bigwedge a(\alpha \vee \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β
48	$\bigvee a(\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \bigvee a\beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
49	$(\alpha \vee \bigvee a\beta) \to \bigvee a(\alpha \vee \beta)$	! gdy a nie jest wolna w α
50	$\bigvee a(\alpha \vee \beta) \to (\bigvee a\alpha \vee \beta)$	! gdy a nie jest wolna w β

Wykaż, że są schematami reguł wyprowadzalnych w KWRP:

Lp	Schemat	Lp	Schemat
1	$\dfrac{\bigwedge a\alpha}{\alpha(a/b)}$	2	$\dfrac{\alpha}{\bigvee a\alpha}$
3	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \to \beta)}{\bigwedge a\alpha \to \bigwedge a\beta}$	4	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \to \beta)}{\bigvee a\alpha \to \bigvee a\beta}$
5	$\dfrac{\bigwedge a(\alpha \wedge \beta)}{\bigwedge a\alpha \wedge \bigwedge a\beta}$	6	$\dfrac{\bigvee a(\alpha \vee \beta)}{\bigvee a\alpha \vee \bigvee a\beta}$
7	$\dfrac{\neg\bigwedge a\alpha}{\bigvee a\neg\alpha}$	8	$\dfrac{\neg\bigvee a\alpha}{\bigwedge a\neg\alpha}$
9	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ a \text{ nie jest wolne w } \alpha\end{array}}{\alpha \to \bigwedge a\beta}$	10	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ a \text{ nie jest wolne w } \beta\end{array}}{\bigvee a\alpha \to \beta}$

Spis treści